18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL
Univers
MICHIG

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Drei und funfzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1857.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Vorwort.

Vor mehr als einem Jahre habe ich den Lesern dieses Journals die Mittheilung davon, dafs ich die Herausgabe desselben übernommen habe, in einer besonderen Anzeige gemacht, von der ich hier das Wesentliche noch einmal abdrucken lasse:

Die Nachricht von dem am 6ten October v. J. erfolgten Tode des Gründers und bisherigen Herausgebers dieses Journals ist von der ganzen mathematischen Welt mit tiefem Bedauern aufgenommen worden.

Was der Verstorbene als Gelehrter geleistet hat, durch seltene Vielseitigkeit und unermüdliche Thätigkeit, das möge an anderer Stelle seine Würdigung finden. Hier soll vor Allem von dem hohen Verdienst die Rede sein, welches sich derselbe durch Gründung des mathematischen Journals erworben hat.

Zu einer Zeit, wo es ungeachtet des glänzenden von *Gauſs* gegebenen Vorbildes nur wenige Mathematiker in Deutschland gab, die an der Erweiterung ihrer Wissenschaft arbeiteten, und wo diese Wenigen, wenn sie nicht zu Akademien gehörten, sich mit ihren Abhandlungen nach dem Auslande wenden mufsten, um sie zu veröffentlichen —, zu solcher Zeit gründete *Crelle* sein Journal für Mathematik. Es gehörte hierzu nicht allein seine Begeisterung für die Sache, sondern auch seine Erkenntnifs, dafs die junge Generation, die ihn umgab, Kräfte in sich schlofs, die in der mathematischen Forschung ein frisches Leben hervorrufen würden.

Wenige Unternehmungen sind so zur rechten Zeit gekommen, wie *Crelle's* Journal. Es wurde der Sammelplatz für die Arbeiten jener Männer, die vor einem Viertel-Jahrhundert der Mathematik einen neuen Aufschwung gaben, und wenn dieser Aufschwung überall als das Werk deutscher Wissenschaft anerkannt wurde, so ist dies zum grofsen Theil der Vereinigung zu verdanken, in welcher die neuen Entdeckungen durch *Crelle's* Vermittlung erschienen. Während eines Zeitraums von 30 Jahren hat das *Crelle*sche Journal den schönen Beruf erfüllt, der Hauptrepräsentant der deutschen Mathematik zu sein, und ist hierin durch die thätige Beförderung der hohen Preufsischen Behörden wesentlich unterstützt worden.

Eine für den Fortschritt der Mathematik so nützliche Zeitschrift hat der Herr Verleger derselben der Wissenschaft erhalten wollen. Als derselbe

in solcher Absicht mir den Antrag machte, die fernere Herausgabe zu besorgen, mufste ich, von der Schwierigkeit dieses mühevollen Geschäfts und von der Unzulänglichkeit meiner Kräfte überzeugt, Anstand nehmen, dem Antrage zu entsprechen. Nachdem indefs meine geehrten Berufsgenossen, die Herren *Steiner*, *Schellbach*, *Kummer* und *Kronecker* mir ihre gütige Mitwirkung zugesagt hatten, habe ich, von dieser ausgezeichneten Mitwirkung unterstützt, die Herausgabe des Journals übernommen.

Unter der neuen Redaktion wird das Journal sowohl seine äufsere Einrichtung beibehalten, als auch den Zwecken, die es bisher verfolgt hat, treu bleiben. Die Aufsätze, welche dasselbe seinen Lesern liefern wird, und deren Gegenstände aus allen Zweigen der reinen sowie der angewandten Mathematik und mathematischen Physik entnommen sein können, sollen Original-Untersuchungen enthalten, die entweder durch die Resultate, zu denen sie führen, oder durch die Begründung dieser Resultate neu sind.

Die gegenwärtige Redaktion wendet sich an die bisherigen geehrten Mitarbeiter des Journals, an alle Mathematiker und namentlich an die Deutschlands vertrauensvoll mit der Bitte, durch Einsendung ihrer Arbeiten das Bestehen eines für die Fachgenossen so nothwendigen Organs sicherzustellen. Sie kann nicht unterlassen, es zugleich auszusprechen, wie wünschenswerth im Interesse des Unternehmens wie der Autoren es ist, dafs die Beiträge den für Mittheilungen in Zeitschriften üblichen Umfang nicht übersteigen mögen, damit sich für den Druck derselben um so früher Platz finde.

Möge das Journal künftig dieselbe Theilnahme finden, deren es sich unter dem früheren Herausgeber während so vieler Jahre zu erfreuen gehabt hat.

Berlin, im Februar 1856.

Indem ich gegenwärtig den ersten unter der neuen Redaktion erscheinenden Band des Journals dem mathematischen Publikum übergebe, habe ich als ein erfreuliches seit der Veröffentlichung obiger Anzeige eingetretenes Ereignifs anzuführen, dafs mein geehrter Freund Herr *Weierstrafs* als Mitwirkender zu dem Unternehmen hinzugetreten ist.

Schliefslich bemerke ich, dafs von dem vorliegenden 53sten Bande das erste Heft noch dem früheren Herausgeber, die drei folgenden Hefte, von Seite 103 beginnend der jetzigen Redaktion angehören.

Berlin, am 1sten Mai 1857.

Borchardt.

Inhalts-Verzeichnifs des drei und funfzigsten Bandes.

1. Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche. Von Herrn *M. A. Stern*, in Göttingen. . . . . Seite 1
2. Über Reihenentwicklungen, welche nach den Potenzen eines gegebenen Polynoms fortschreiten, und zu Coefficienten Polynome eines niedereren Grades haben. Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi*. — 103
3. Über eine Eigenschaft der quadratischen Formen von positiver Determinante. Von Herrn *G. Lejeune-Dirichlet*. . . . . — 127
4. Sur un théorème relatif aux séries. Par M. *G. Lejeune-Dirichlet*. . . — 130
5. Über die Flächen dritten Grades. Von Herrn *J. Steiner*. . . . . — 133
6. Über die den Gaufsischen Perioden der Kreistheilung entsprechenden Congruenzwurzeln. Von Herrn *E. E. Kummer*. . . . . — 142
7. De aequationibus quarti et sexti gradus quae in theoria linearum et superficierum secundi gradus occurrunt. Auctore *F. Joachimsthal*. . . . . — 149
8. Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten. Von Herrn *L. Kronecker*. . . . . — 173
9. Über complexe Einheiten. Von Herrn *L. Kronecker*. . . . . — 176
10. Extrait d'une lettre de M. *C. Hermite* à M. *Borchardt* sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés. . . — 182
11. Bestimmung der symmetrischen Verbindungen vermittelst ihrer erzeugenden Function. Von *C. W. Borchardt*. . . . . — 193
12. Die Reduktion der elliptischen Integrale in ihre kanonische Form. Von Herrn *E. Heine*. . . . . — 199
13. Über eine besondere Curve dritter Klasse (und vierten Grades). Von Herrn *J. Steiner*. . . . . — 231
14. Einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen. Von Herrn *R. Lipschitz*. . . . . — 238
15. Propriétés générales des courbes algébriques et théorèmes sur les coniques homothétiques. Par M. *Woepke*. . . . . — 260
16. Über eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks. Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi*. . . . . — 266

17. Extrait d'une lettre de M. *C. Hermite* à M. *Borchardt* sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynomes homogènes du second degré. . . . . Seite 271
18. Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen. Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi*. . . . . — 275
19. Bemerkung über die beiden vorstehenden Aufsätze. Von *C. W. Borchardt*. — 281
20. Auszug eines Schreibens über Kettenbrüche von Herrn *E. Heine* an den Herausgeber. . . . . — 284
21. Sur une formule d'Analyse. Par M. *P. Tchebichev*. . . . . — 286
22. Über die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit, Note zu der Abhandlung im Band LII dieses Journals. Von Herrn *Clebsch*. . — 287
23. Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes. Von Demselben. . . . . — 292
24. Zur Theorie der binären kubischen Formen. Von Herrn *F. Arndt*. . . — 309
25. Einige neue Sätze aus der Lehre von den Combinationen. Von Herrn *Öttinger*. . . . . — 322
26. Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie. Tirée des manuscrits inédits de *C. G. J. Jacobi*. . . . . — 335
27. *C. G. J. Jacobi*'s Ableitung der in seinem Aufsatze: „Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie" enthaltenen Formeln. Mitgetheilt von Herrn *E. Luther*. . . . . — 342
28. Note sur la méthode d'élimination de *Bezout*. Par M. *A. Cayley*. . . . — 366
29. Remarque relative à la note précédente. Par M. *C. W. Borchardt*. . . — 367
30. Note sur l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, $D \equiv 5 \pmod 8$. Par M. *A. Cayley*. — 369
31. Sur une nouvelle propriété du résultant de deux équations algébriques. Par M. *Brioschi* à Pavie. . . . . — 372
32. Sur une formule de M. *Cayley*. Par le même. . . . , ... — 377

Anzeige einer Schrift des Herrn *Reuschle* in Stuttgart von Herrn *Kummer*. . — 379

Druckfehler im 50sten und 53sten Bande. . . . . — 380

1.

Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche.

(Von Herrn Dr. *M. A. Stern,* Professor der Mathematik an der Universität zu Göttingen.)

Bezeichnen x und y die kleinsten Werthe in ganzen Zahlen, welche der Gleichung

$$(1.) \qquad x^2 - Ay^2 = 1$$

genügen, wo A eine nicht quadratische ganze Zahl ist, so erhält man, wie bekannt, die Werthe von x und y, indem man $\sqrt{A}$ in einen *periodischen Kettenbruch* verwandelt. Man hat schon Tafeln berechnet, welche für jedes gegebene A, bis zu einer gewissen Grenze, die entsprechenden Werthe von x und y angeben. Namentlich hat *Degen* unter dem Titel „Canon Pellianus" eine solche Tafel herausgegeben, in welcher für alle Zahlen von 1 bis 1000 nicht blofs die Werthe von x und y, sondern auch die Theilnenner (Quotienten) des Kettenbruchs und die Nenner der entsprechenden vollständigen Quotienten angegeben sind. Abgesehen von der Benutzung einiger wenigen Rechnungsvortheile, sind diese Tafeln dadurch entstanden, dafs man direct für jede Zahl zuerst den Kettenbruch entwickelte, und dann aus diesem die Werthe von x und y berechnet hat. Das Folgende hat zunächst den Zweck verschiedene Abkürzungen anzugeben, die sich bei der Berechnung einer solchen Tafel, welche ich eine *Pellische* nennen werde, anbringen lassen; es werden sich hieraus verschiedene noch unerörterte Eigenschaften der periodischen Kettenbrüche ergeben.

Ich werde zuerst zeigen, wie man, um x und y zu finden, statt den Kettenbruch zu reduciren, den man bisher hierzu angewandt hat, nur einen anderen anzuwenden braucht, welcher eine um die *Hälfte* kleinere Anzahl Theilnenner enthält. Alsdann werde ich die Frage erörtern, wie man, wenn für irgend eine Zahl der periodische Kettenbruch, welcher ihre Quadratwurzel ausdrückt, bekannt ist, hieraus unmittelbar die periodischen Kettenbrüche finden kann, welche der Quadratwurzel unzählig vieler anderer Zahlen gleich sind, oder, kürzer gesagt, die periodischen Kettenbrüche, welche unzählig vielen andern Zahlen *entsprechen*.

Schon ***Euler*** hat gefunden, dafs es gewisse Zahlenformen giebt, für welche sich die entsprechenden Kettenbrüche sofort angeben lassen und ich habe bereits in meiner „Theorie der Kettenbrüche" (S. 191 etc. Bd. 11. S. 331 ff. dieses Journals) bemerkt, dafs sich deren Zahl ins Unendliche vermehren lasse; indessen ist bis jetzt noch keine allgemeine Untersuchung dieses Gegenstandes bekannt geworden.

1.

Wenn a die gröfste in $\sqrt{A}$ enthaltene ***ganze Zahl*** bedeutet, so hat die Periode des dazu gehörenden Kettenbruchs entweder ***kein Mittelglied***, so dafs die zwischen dem ***Anfangsgliede*** a und dem die Periode schliefsenden Gliede $2a$ enthaltenen Theilnenner in der Ordnung

$$a_1, a_2, \ldots a_m, a_m, \ldots a_2, a_1$$

auf einander folgen, oder es ist noch ***ein Mittelglied*** k vorhanden, so dafs die Reihe der auf einander folgenden Theilnenner

$$a_1, a_2, \ldots a_m, k, a_m, \ldots a_2, a_1$$

ist. Diese zwei Reihen werde ich die ***Periode*** des Kettenbruchs nennen und das folgende Glied $2a$ das ***Schlufsglied*** der Periode. Dagegen sollen die Glieder $a_1, a_2, \ldots a_m$, welche sich in umgekehrter Ordnung wiederholen, die ***periodischen Glieder*** heifsen. Wie in früheren Untersuchungen werde ich durch a, a_m den ***Zähler***, durch a_1, a_m den ***Nenner*** des reducirten Bruchs bezeichnen, welcher den Werth des Kettenbruchs

$$(2.) \qquad a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_m}}}$$

angiebt. Wo es aber die Deutlichkeit nicht stört, werde ich zur Abkürzung $a, a_m = p$; $a_1, a_m = q$; $a, a_{m-1} = p_0$; $a_1, a_{m-1} = q_0$; $a_2, a_m = q_1$; $a_2, a_{m-1} = p_1$; $a_1, a_{m-2} = r$; $a_2, a_{m-2} = r_1$ setzen.

Man nehme nun zuerst an, die Periode habe ***ein Mittelglied***, so dafs die Entwickelung von $\sqrt{A}$ mit den auf einander folgenden Theilnennern

$$(3.) \qquad a, a_1, \ldots a_m, k, a_m, \ldots a_1$$

beginnt. Bisher hat man, um die Werthe von x und y zu finden, welche der Gleichung (1.) genügen, den der Reihe (3.) entsprechenden Kettenbruch reducirt. Ist nämlich X der Werth dieses reducirten Bruchs, so geben Zähler und Nenner desselben die gesuchten Werthe von x und y. Nun bezeichne

aber Y den Werth des reducirten Bruchs, welcher zu dem Kettenbruche (2.) gehört. Nach bekannten Elementarsätzen ist

$$X = \frac{(kq+q_0)p+qp_0}{(kq+q_0)q+qq_0}.$$

Setzt man $kq+2q_0=g$ und berücksichtigt die Gleichung

$$pq_0-qp_0 = \pm 1,$$

so hat man demnach

$$x = gp \mp 1,$$
$$y = gq,$$

mithin

$$\frac{x}{y}-\frac{p}{q} = \mp\frac{1}{y},$$

d. h.

$$(4.) \qquad X-Y = \mp\frac{1}{y}.$$

Aus der Gleichung (1.) folgt

$$X^2-A = \frac{1}{y^2},$$

mithin nach (4.):

$$(5.) \qquad X = \tfrac{1}{2}\left(Y+\frac{A}{Y}\right).$$

Um X zu finden, braucht man also nur Y zu berechnen, d. h. man braucht nur den der *halben* Periode entsprechenden Kettenbruch zu reduciren.

Hat die Periode *kein Mittelglied,* so dafs die Entwickelung des Kettenbruchs mit den Theilnennern

$$(6.) \qquad a,\ a_1,\ \ldots\ a_m,\ a_m,\ \ldots\ a_1$$

beginnt, bezeichnet X_0 den dieser Reihe entsprechenden reducirten Bruch, x_0 seinen Zähler, y_0 seinen Nenner, während Y seine frühere Bedeutung behält, so findet man statt der Gleichung (4.) die Gleichung

$$(7.) \qquad X_0-Y = \pm\frac{q_0}{q}\cdot\frac{1}{y_0}.$$

Hier genügen aber auch, wie bekannt, x_0 und y_0 nicht mehr der Gleichung (1.). Um diese aufzulösen, mufs man vielmehr *noch eine Periode* hinzuziehen. Bezeichnet man den reducirten Werth des Kettenbruchs, dessen Theilnenner

$$a,\ a_1,\ \ldots\ a_m,\ a_m,\ \ldots\ a_1,\ 2a,\ a_1,\ \ldots\ a_m,\ a_m,\ \ldots\ a_1$$

sind, durch X, seinen Zähler durch x, seinen Nenner durch y, so sind x und y die Werthe, welche der Gleichung (1.) genügen; und da der Kettenbruch ein Mittelglied $2a$ hat, so hat man auch wieder nach (4.):

$$X - X_0 = \pm\frac{1}{y}$$

und zugleich

$$X^2 - A = \frac{1}{y^2}$$

also auch

$$X = \tfrac{1}{2}\left(X_0 + \frac{A}{X_0}\right),$$

d. h. man braucht auch in diesem Falle nur den halben Kettenbruch zu reduciren.

Es ergiebt sich hieraus noch Folgendes. Wenn man den Kettenbruch, welcher $\sqrt{A}$ ausdrückt, bis zum letzten Gliede a_1 der $2n$ten Periode entwickelt, den entsprechenden reducirten Bruch X_{2n}, seinen Zähler x, seinen Nenner y nennt, so hat man, wie bekannt, $x^2 - Ay^2 = 1$. Dieser Kettenbruch hat das Mittelglied $2a$. Bezeichnet man daher durch X_n den reducirten Werth des Kettenbruchs, welcher die Theilnenner bis zum letzten Gliede a_1 der $n$ten Periode enthält, so hat man nach (4.):

$$X_{2n} - X_n = \pm\frac{1}{y},$$

mithin auch

$$X_{2n} = \tfrac{1}{2}\left(X_n + \frac{A}{X_n}\right).$$

Diese letzte Gleichung hat schon *Serret* gefunden. (Journ. des Mathém. T. 12. p. 518.)

2.

Aus dem Vorhergehenden folgen verschiedene Sätze, die ich hier zusammenstelle, da später Gebrauch davon wird gemacht werden. Einzelnes ist schon bekannt, jedoch auf weniger einfache Art bewiesen.

Die Periode des Kettenbruchs habe ein Mittelglied k. Setzt man wieder $\frac{x}{y}$ statt X und $\frac{p}{q}$ statt Y, so folgt aus (5.):

$$(8.) \qquad \frac{x}{y} = \frac{p^2 + Aq^2}{2pq}.$$

Ist aber $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$ der vollständige Quotient, welcher zu k gehört, so ist bekanntlich

$$p^2 - Aq^2 = \pm D,$$

mithin

$$[p^2 - Aq^2]^2 = [p^2 + Aq^2]^2 - A[2pq]^2 = D^2$$

und

$$(9.) \quad \left[\frac{p^2+Aq^2}{2pq}\right]^2 - A = \left[\frac{D}{2pq}\right]^2.$$

Nimmt man aber den Werth von $\frac{x}{y}$ aus (8.) und setzt ihn in

$$\frac{x^2}{y^2} - A = \frac{1}{y^2},$$

so erhält man

$$(10.) \quad \left[\frac{p^2+Aq^2}{2pq}\right]^2 - A = \frac{1}{y^2}.$$

Aus dem Vergleich von (9. und 10.) folgt mithin, dafs er folgende Formeln zur Berechnung von x und y giebt, nemlich:

$$(11.) \quad y = \frac{2pq}{D},$$

$$(12.) \quad x = \frac{p^2+Aq^2}{D}.$$

Es sei f^α die höchste Potenz einer Primzahl f, welche in D, wenn dies eine *ungerade* Zahl, oder in $\frac{1}{2}D$, wenn D *gerade* Zahl ist, enthalten ist. Da p und q keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so mufs nach (11.) entweder p oder q durch f^α theilbar sein. Im zweiten Falle könnte aber die Gleichung (12.) nicht bestehen, folglich wird $2p$ *immer* und q *niemals* durch D theilbar sein, mithin wird auch $2A$ immer durch D theilbar sein. Nun kann D nicht $= 2A$ sein, da es höchstens $= 2a$ sein kann; ist $D = A$, so mufs nach (12.) nothwendig $p = lD$ sein, wo l eine ganze Zahl ist. Hieraus folgt $D = 2$, sobald A eine Primzahl ist. Wäre nemlich D nicht $= 2$, so müfste es $= A$ sein, dann aber würde aus $p^2 - Aq^2 = \pm D$, $l^2D - q^2 = \pm 1$ oder

$$q^2 - Al^2 = \mp 1$$

folgen. Nun kann diese Gleichung nicht mit dem oberen Zeichen bestehen, weil, wie bekannt, die Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ nicht lösbar ist, sobald der Kettenbruch, welcher der Zahl A entspricht, *ein Mittelglied* hat; die Gleichung kann aber auch nicht mit dem unteren Zeichen bestehen, da $q < x$, $l < y$. Mithin kann D nur $= 2$ sein. Die Primzahl A mufs aber in der Form $4n + 3$ enthalten sein; ist dagegen A eine Primzahl von der Form $4n + 1$, so kann die Periode des entsprechenden Kettenbruchs *kein Mittel-*

glied haben. Soll nemlich die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ Statt finden, während $A = 4n+1$ ist, so mufs y gerade und x ungerade sein. Nach (12.) hätte man aber

$$x = \tfrac{1}{2}(p^2 + Aq^2),$$

also müfsten p und q beide ungerade Zahlen sein. Dann würde aber aus (11.) folgen, dafs $y = pq$, d. h. dafs y eine ungerade Zahl ist, mithin können die Gleichungen (11. und 12.) nicht Statt finden, sobald A eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist.

Berücksichtigt man die Gleichung $p^2 - Aq^2 = \pm D$, so erhält man noch aus (12.):

$$(13.) \qquad x = \frac{2p^2}{D} \mp 1$$

oder

$$(14.) \qquad x = \frac{2Aq^2}{D} \pm 1.$$

Ist also $D = 2$, so ergiebt sich

$$(15.) \quad x = p^2 \mp 1 = Aq^2 \pm 1$$

und zugleich

$$(16.) \qquad y = pq.$$

Wie bekannt, mufs aber die Periode immer ***ein Mittelglied*** haben, sobald A eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist, und dieses Mittelglied mufs, wie vorher bewiesen wurde, gleich 2 sein. Die Formeln (15. und 16.) gelten also namentlich in diesem Falle. In diesem speciellen Falle hat schon ***Legendre*** den Zusammenhang zwischen x, y und p und q bemerkt (Théorie des nombres T. 1. p. 66 ed. 3).

3.

Die Beschaffenheit des Mittelgliedes k ist bisher nicht vollständig untersucht worden. Es ist bekannt, dafs k nicht gröfser als $\frac{2a}{D}$ sein kann, da J höchstens $= a$ ist; die obigen Formeln führen aber weiter. Vergleicht man nemlich die Formel (11.) mit dem in (§. 1.) gefundenen Werthe $y = g.q$ und setzt wieder für g seinen Werth $kq + 2q_0$, so findet sich

$$(17.) \qquad kq + 2q_0 = \frac{2p}{D}.$$

Setzt man hier für p seinen Werth $aq + q_1$, so hat man

$$(18.) \quad (2a - kD)q = 2(q_0 D - q_1).$$

Nun ist $q > q_0$, folglich $2a - kD < 2D$, und

$$k > \frac{2a}{D} - 2.$$

Das Mittelglied liegt also immer zwischen den Grenzen $\frac{2a}{D} - 2$ und $\frac{2a}{D}$, wenn es nicht $= \frac{2a}{D}$ ist. Nennt man den auf $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$ folgenden vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt{A}+J'}{D'}$, so ist, wie bekannt, $J + J' = kD$ und, da $J = J'$,

$$(19.) \quad k = \frac{2J}{D}.$$

Demnach kann das Mittelglied überhaupt nur D verschiedene Werthe haben, nemlich:

$$\frac{2a}{D}, \ \frac{2(a-1)}{D}, \ \frac{2(a-2)}{D}, \ \ldots \ \frac{2[a-(D-1)]}{D},$$

und es folgt zugleich, dafs J nur einen der D Werthe

$$a, \ a-1, \ a-2, \ \ldots \ a-D+1$$

haben kann.

Ist $k = \frac{2a}{D}$, so folgt aus (18.)

$$Dq_0 = q_1.$$

Nun ist $q > q_1$, also auch $q > Dq_0$. Andererseits ist $q = a_m q_0 + r$, also $q < (a_m + 1) q_0$ (da $r < q_0$), mithin $a_m > D - 1$, d. h. wenn $k = \frac{2a}{D}$, so ist der kleinste Werth, welchen der *letzte periodische Theilnenner* haben kann, nicht kleiner als D.

Ist $k < \frac{2a}{D}$ und zwar $k = \frac{2(a-i)}{D}$, so kann i alle Werthe von $i = 1$ bis $i = D - 1$ haben, und nach (18.) ist

$$iq = q_0 D - q_1,$$

also $q < \frac{q_0}{i} D$. Nun ist $q > a_m q_0$, mithin $a_m < \frac{D}{i}$. Sobald also i den Werth $\frac{1}{2}D$ erreicht, d. h. sobald das Mittelglied k nicht gröfser als $\frac{2(a-\frac{1}{2}D)}{D} = \frac{2a}{D} - 1$ ist, kann der *letzte periodische Theilnenner* nur der *Einheit* gleich sein. Man darf diesen Satz jedoch nicht umkehren, indem der letzte periodische Theilnenner, auch wenn $i < \frac{1}{2}D$ ist, $= 1$ sein kann. Dies ist z. B. bei der Zahl 759 der Fall, wo $a = 27$, $D = 11$, $k = 4$, also $i = 5 < \frac{11}{2}$ ist, und dennoch ist $a_m = 1$.

Ist $D=2$, so kann, dem Vorhergehenden zufolge, k nur $=a$ oder $=a-1$ sein. Nun ist in diesem Falle $x=\frac{1}{2}(p^2+Aq^2)$. Sobald A eine *ungerade* Zahl ist, müssen daher auch p und q *ungerade* Zahlen sein. Aus (17.) folgt aber

$$(20.) \qquad k=\frac{p-2q_0}{q},$$

mithin wird $k=a$ oder $=a-1$ sein, je nachdem a eine *ungerade* oder eine *gerade* Zahl ist. Dies wird (nach §. 2.) namentlich immer dann eintreten, wenn A eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist. Ist dagegen A eine *gerade* Zahl, so mufs auch p eine *gerade* Zahl, folglich q eine *ungerade* Zahl sein; mithin wird in diesem Falle $k=a$ oder $=a-1$ sein, je nachdem a eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Es wird also überhaupt $k=a$ oder $=a-1$ sein, je nachdem $A-a$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Nun folgt aus (18.), wenn man $D=2$ setzt:

$$(21.) \qquad a-k=\frac{2q_0}{q}-\frac{q_1}{q}.$$

Diese Formel enthält also folgenden Satz:

Wenn das Anfangsglied des der Zahl A entsprechenden Kettenbruchs $=a$ ist, die periodischen Glieder $a_1, a_2, \ldots a_m$ sind, und $D=2$ ist, so wird der Unterschied des doppelten Werthes des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a_m+\cfrac{1}{a_{m-1}+\cdots+\cfrac{1}{a_1}}}$$

und des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_m}}}$$

entweder $=0$ oder $=1$ sein, je nachdem $A-a$ entweder eine *gerade* oder eine *ungerade* Zahl ist, d. h. dieser Unterschied wird immer $=\frac{1}{2}(1-(-1)^{A-a})$ sein. Man kann dies auch so ausdrücken: je nachdem $A-a$ eine *gerade* oder eine *ungerade* Zahl ist, wird $2q_0=q_1$ oder $2q_0=q+q_1$ sein.

Unter denselben Voraussetzungen folgt aus dem Obigen, dafs $a_m=1$ oder $a_m>1$ sein wird, je nachdem $k=a-1$ oder $k=a$ ist, d. h. je nachdem $A-a$ eine *gerade* oder eine *ungerade* Zahl ist.

Ist D eine ***ungerade*** Zahl, so kann nach (19.) das Mittelglied k nicht $=1$ sein, und da k nicht $>\frac{2a}{D}$ sein kann, so kann a nicht $<D$ sein. Setzt man daher $a=sD+t$, wo $t<D$ (und auch $=0$ sein kann), so giebt es in der Reihe

$$\frac{2a}{D},\ \frac{2(a-1)}{D},\ \ldots\ \frac{2[a-(D-1)]}{D}$$

nur eine ganze Zahl, nemlich $\frac{2(a-t)}{D}$; in diesem Falle ist also $k=2s$ und $J=sD=a-t$.

Ist D eine ***gerade*** Zahl, so kann a nicht kleiner als $\frac{1}{2}D$ sein, da k mindestens $=1$ und zugleich $k\leqq\frac{2a}{D}$ ist. Ist $a=\frac{1}{2}D$, so ist $k=1$. Ist $a>\frac{1}{2}D$ und man setzt $a=s.\frac{1}{2}D+t$, wo $t<\frac{1}{2}D$ (und auch $=0$ sein kann), so kann k nur einer der ganzen Zahlen gleich sein, welche in der Form $\frac{a-l}{\frac{1}{2}D}$ enthalten sind, wo $l<D$ ist, oder, wenn man für a seinen Werth setzt, einer der ganzen Zahlen, welche in der Form $s-\frac{l-t}{\frac{1}{2}D}$ enthalten sind. Man kann also $l=t$ oder $l=\frac{1}{2}D+t$ setzen, d. h. k wird entweder $=s$ oder $=s-1$ sein.

Auch ergiebt sich noch Folgendes. Setzt man $D=2^{\alpha}.h$, wo h ***ungerade*** ist, so ist nach (12.):

$$x=\frac{p^2+Aq^2}{2^{\alpha}.h}.$$

Ist nun A eine ungerade Zahl, so mufs $\alpha=1$ sein, da $2A$ durch D theilbar ist, mithin müssen p und q ungerade Zahlen sein. Nach (17.) ist aber in diesem Falle

$$kq+2q_0=\frac{p}{h};$$

woraus sich ergiebt, dafs k eine ungerade Zahl sein mufs; demnach wird $k=s$ oder $=s-1$ sein, je nachdem s eine ***ungerade*** oder eine ***gerade*** Zahl ist.

Ist A eine ***gerade*** Zahl, so mufs auch p eine gerade, q eine ungerade Zahl sein. Ist nun $\alpha=1$, so ist $\frac{p}{h}$ eine gerade Zahl, also auch k eine gerade Zahl, mithin $k=s$ oder $=s-1$, je nachdem s gerade oder ungerade ist. Ist dagegen $\alpha>1$, so wird jedenfalls $2p$ durch D theilbar sein, man

setze daher $2p = 2^{\alpha+\beta}.h'$, wo h' eine ungerade Zahl ist. Dann folgt aus (17.):

$$kq + 2q_0 = \frac{2^\beta.h'}{h},$$

also wird k eine gerade oder eine ungerade Zahl sein, je nachdem $\beta > 0$ oder $= 0$ ist.

In dem besonderen Falle, $D=4$, kann k nur einen der vier Werthe $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}(a-1)$, $\frac{1}{2}a-1$, $\frac{1}{2}(a-3)$ haben, und zwar ist $k = \frac{1}{2}a$ oder $= \frac{1}{2}a-1$, wenn *a gerade*, und $k = \frac{1}{2}(a-1)$ oder $= \frac{1}{2}(a-3)$, wenn *a ungerade* ist. Da $2p$ durch 4 theilbar ist, so mufs p eine gerade Zahl, q ungerade und also A durch 4 theilbar sein. Nun ist

$$k.q + 2q_0 = \tfrac{1}{2}p.$$

Ist also p in der Form $4n$ enthalten, so mufs k eine gerade Zahl sein, mithin $k = \frac{1}{2}a$ oder $= \frac{1}{2}a-1$, je nachdem a in der Form $4n$ oder $4n+2$ enthalten ist, und $k = \frac{1}{2}(a-1)$ oder $= \frac{1}{2}(a-3)$, je nachdem a in der Form $4n+1$ oder $4n+3$ enthalten ist. Ist dagegen p von der Form $4n+2$, so mufs k *ungerade* sein, also $k = \frac{1}{2}a$ oder $= \frac{1}{2}a-1$, je nachdem a in der Form $4n+2$ oder $4n$ enthalten ist, und $k = \frac{1}{2}(a-3)$ oder $= \frac{1}{2}(a-1)$, je nachdem a in der Form $4n+1$ oder $4n+3$ enthalten ist. Aus der Gleichung $p^2 - Aq^2 = \pm 4$ folgt aber, dafs p in der Form $4n$ oder $4n+2$ enthalten ist, je nachdem A in der Form $8n+4$ oder $8n$ enthalten ist. Demnach wird $k = \frac{1}{2}a$ sein, wenn entweder $A = 8n+4$, $a = 4n$ ist, oder $A = 8n$, $a = 4n+2$. Ist $A = 8n+4$, $a = 4n+2$ oder $A = 8n$, $a = 4n$, so ist $k = \frac{1}{2}a-1$. Ist $A = 8n+4$, $a = 4n+1$ oder $A = 8n$, $a = 4n+3$, so ist $k = \frac{1}{2}(a-1)$. Ist $A = 8n+4$, $a = 4n+3$ oder $A = 8n$, $a = 4n+1$, so ist $k = \frac{1}{2}(a-3)$. D. h. es wird $k = \frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a-1$, $\frac{1}{2}(a-1)$, $\frac{1}{2}(a-3)$ sein, je nachdem bezüglich $\frac{1}{2}A-a$ in einer der Formen $4n+2$, $4n$, $4n+1$, $4n-1$ enthalten ist.

Bei dieser Gelegenheit bemerke man noch Folgendes. Da, wie früher (§. 2.) bewiesen, $2p$ immer durch D theilbar ist, so mufs nach (11.) auch y durch q theilbar sein. Sobald die Periode ein Mittelglied hat, kann daher y *niemals* eine Primzahl sein, ausgenommen wenn $q=1$, d. h. wenn die Periode entweder nur aus dem Mittelgliede k, oder aus den drei Gliedern 1, k, 1 besteht.

4.

Hat die Periode *kein Mittelglied*, so soll, wie früher angenommen wurde, x_0 der Zähler, y_0 der Nenner des reducirten Bruchs sein, welcher der

Reihe (6.) entspricht. Man hat alsdann

$$(22.) \quad x_0 = pq + p_0 q_0,$$

$$(23.) \quad y_0 = q^2 + q_0^2$$

und

$$(24.) \quad x_0^2 - Ay_0^2 = -1.$$

Aus der letzteren Gleichung folgt aber, dafs y_0 eine *ungerade* Zahl sein mufs, da $x_0^2 + 1$ niemals durch 4 theilbar sein kann; mithin mufs eine der Zahlen q und q_0 gerade, die andere ungerade sein. Auch ist

$$\frac{x^2}{y^2} - A = \frac{1}{y^2},$$

und nach (§. 1.):

$$X = \frac{x}{y} = \frac{x_0^2 + Ay_0^2}{2x_0 y_0},$$

also

$$\left[\frac{x_0^2 + Ay_0^2}{2x_0 y_0}\right]^2 - A = \frac{1}{y^2}.$$

Nun folgt aus (24.)

$$[x_0^2 + Ay_0^2]^2 - A(2x_0 y_0)^2 = 1,$$

mithin

$$y = 2x_0 y_0,$$
$$x = x_0^2 + Ay_0^2 = 2x_0^2 + 1.$$

5.

Nach diesen Vorbereitungen soll nun die Frage beantwortet werden, wie, wenn man den periodischen Kettenbruch kennt, welcher einer gewissen ganzen Zahl A entspricht, alle ganzen Zahlen sich finden lassen, von der Beschaffenheit, dafs die ihnen entsprechenden periodischen Kettenbrüche *dieselbe* Periode haben.

Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Kettenbruch, welcher der Zahl A entspricht, *ein Mittelglied* hat oder *nicht*. Im *ersten* Falle sollen also alle Zahlen gefunden werden, deren entsprechenden Kettenbrüche dieselben periodischen Glieder und dasselbe *Mittelglied* enthalten, wie der Kettenbruch, welcher der gegebenen Zahl entspricht, oder, kürzer ausgedrückt: alle Zahlen, welchen dieselben periodischen Glieder und dasselbe Mittelglied zukommen. Im *zweiten* Falle sollen alle Zahlen gefunden werden, deren entsprechenden Kettenbrüche dieselben periodischen Glieder, und zwar

ohne folgendes Mittelglied, enthalten, wie der Kettenbruch, welcher der gegebenen Zahl entspricht, oder kürzer: alle Zahlen, welchen dieselben periodischen Glieder, *ohne* folgendes Mittelglied, zukommen.

Zur Beantwortung dieser Frage benutze ich einen Satz, welchen ich schon in meiner „Theorie der Kettenbrüche" erörtert habe. (S. 182 Bd. 11. S. 322 dieses Journals.) Entwickelt sich nemlich $\sqrt{A}$ in einen periodischen Kettenbruch, dessen Anfangsglied b und dessen Periode $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ ist, so dafs $b_1 = b_{n-1}$; $b_2 = b_{n-2}$, u. s. w. und ist das Schlufsglied der Periode $b_n = 2b$, so ist es nothwendig und hinreichend, dafs $\frac{b_2, b_n}{b_1, b_{n-1}}$ eine ganze Zahl ist, wenn A eine ganze Zahl sein soll. Man findet nämlich durch eine leichte Reduction:

$$(25.) \qquad A = b^2 + \frac{b_2, b_n}{b_1, b_{n-1}},$$

also ist A eine ganze Zahl, wenn $\frac{b_2, b_n}{b_1, b_{n-1}}$ eine solche ist. Weifs man umgekehrt, dafs einer ganzen Zahl A ein periodischer Kettenbruch mit dem Anfangsgliede b, der Periode $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ und dem Schlufsgliede $b_n = 2b$ entspricht, so folgt, dafs $\frac{b_2, b_n}{b_1, b_{n-1}}$ eine ganze Zahl ist. Es ist aber

$$b_2, b_n = b_n . b_2, b_{n-1} + b_2, b_{n-2};$$

nennt man nun g die ganze Zahl, welcher $\frac{b_2, b_n}{b_1, b_{n-1}}$ gleich sein soll, und setzt $b_1, b_{n-1} = c$, $b_2, b_{n-1} = d$, $b_2, b_{n-2} = e$, so ist

$$(26.) \qquad cg - db_n = e.$$

Betrachtet man nun in dieser Gleichung g und b_n als unbekannte Gröfsen, während $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$, also auch c, d, e, bekannt sind, so läfst sich, da c und d relative Primzahlen sind, die Gleichung immer in ganzen Zahlen auflösen. Ist

$$(27.) \qquad cz - dv = 1$$

und bezeichnen z' und v' die kleinsten positiven Werthe von z und v, und h Null oder irgend eine ganze positive Zahl, so erhält man

$$(28.) \qquad g = ez' \pm dh,$$

$$(29.) \qquad b_n = ev_1 \pm ch,$$

mithin, wenn β_n der kleinste positive Werth von b_n ist, der sich aus der letzten Formel ergiebt:

$$(30.) \qquad b_n = \beta_n + ch.$$

Da aber $b_n = 2b$ und b eine ganze Zahl sein soll, so mufs man einen solchen Werth von h annehmen, dafs $\beta_n + ch$ eine gerade Zahl ist. Unter dieser Beschränkung läfst sich also sagen: Wenn es eine ganze Zahl giebt, deren entsprechender Kettenbruch die Periode $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ hat, so wird das Schlufsglied der Periode, einer der in der Form $\beta_n + ch$ enthaltenen Werthe sein. Es wird aber alsdann *jeder* Kettenbruch, welcher, bei derselben Periode, ein in dieser Form enthaltenes Schlufsglied hat, und ***nur ein solcher***, einer ganzen Zahl entsprechen, weil ***immer***, und ***nur*** bei einem solchen, $\frac{b_2, b_n}{b_1, b_{n-1}}$ eine ganze Zahl ist. Hierdurch ist demnach die obige Frage gelöset. Sobald man eine Zahl kennt, deren entsprechender Kettenbruch eine gewisse Periode und ein gewisses Schlufsglied enthält, so kann man daraus *alle* ganzen Zahlen ableiten, welchen *dieselbe* Periode zukommt. Aus der bekannten Periode berechnet man zunächst den Werth von β_n, alsdann sind alle diese Zahlen nach (25.) in der Formel

$$(31.) \quad \tfrac{1}{4}(\beta_n + ch)^2 + \frac{(\beta_n + ch)d + e}{c} = \tfrac{1}{4}(\beta_n + ch)^2 + dh + \frac{\beta_n d + e}{c}$$

enthalten. Die kleinste dieser Zahlen werde ich die ***Grundzahl*** nennen. Ist β_n eine *gerade* Zahl, so ist das Anfangsglied des Kettenbruchs, welcher der Grundzahl entspricht, $\frac{1}{2}\beta_n$, mithin kleiner als $\frac{1}{2}c$, während bei den folgenden Zahlen das Anfangsglied $\frac{1}{2}(\beta_n + ch)$ jedenfalls gröfser als $\frac{1}{2}c$ sein mufs, und zugleich gröfser als c, wenn c eine ***ungerade*** Zahl ist, weil man dann für h nur gerade Zahlen nehmen darf. Ist β_n eine ***ungerade*** Zahl, so mufs auch c ungerade sein, sonst könnte $\frac{1}{2}(\beta_n + ch)$ für keinen Werth von h eine ganze Zahl sein, für h dürfen nur ungerade Zahlen gesetzt werden. Das Anfangsglied des Kettenbruchs, welcher der Grundzahl entspricht, wird also $\frac{1}{2}(\beta_n + c)$, d. h. $> \frac{1}{2}c$ und $< c$ sein, während bei allen folgenden Zahlen das Anfangsglied gröfser als c sein mufs. Ist $\beta_n = 0$, was dann der Fall wird, wenn $e = 0$ ist, so wird das zu der Grundzahl gehörende Anfangsglied $\frac{1}{2}c$ oder c sein, je nachdem c eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, und das zu den folgenden Zahlen gehörende Anfangsglied wird bezüglich gröfser als $\frac{1}{2}c$ oder gröfser als c sein. Die Grundzahl hat also das characteristische Kennzeichen, dafs bei ihr das Anfangsglied des entsprechenden Kettenbruchs $< \frac{1}{2}c$, $= \frac{1}{2}c$ (und in einem Falle $= c$) oder $> \frac{1}{2}c$ und $< \frac{1}{2}c$ ist, je nachdem β_n eine *gerade* Zahl, ***Null***, oder eine ***ungerade*** Zahl ist, während bei den folgenden Zahlen das Anfangsglied in den zwei ersten Fällen $> \frac{1}{2}c$, im letzten Falle $> c$ sein mufs. Auch ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dafs bei den fol-

genden Zahlen überhaupt das Anfangsglied $> \frac{1}{2}c$ oder $> c$ sein mufs, je nachdem c gerade oder ungerade ist.

Bei der Zahl 7 z. B. ist das Anfangsglied 2, die Periode 1, 1, 1. Hier ist $c=3$, $d=2$, $e=1$, mithin $z'=1$, $v'=1$, $\beta_n=1$ und $b_n=1+3h$. Hier dürfen also für h nur *ungerade* Zahlen gesetzt werden. Der kleinste Werth von b_n ist demnach 4, das entsprechende Anfangsglied 2, mithin ist 7 die Grundzahl. Die übrigen Zahlen sind in der Form $\frac{1}{4}(1+3h)^2+(1+3h)\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$ enthalten, also 32, 75, 136, ..., welche sämmtlich die Periode 1, 1, 1 haben.

Bei der Zahl 29 ist das Anfangsglied 5, die Periode 2, 1, 1, 2, also $c=13$, $d=5$, $e=2$, $z'=2$, $v'=5$, $\beta_n=10$ und $b_n=10+13h$. Hier sind mithin für h nur *gerade* Zahlen zu setzen, oder Null. Der kleinste Werth von b_n ist also 10, und das entsprechende Anfangsglied 5, demnach ist 29 die Grundzahl. Aus der Formel $\frac{1}{4}(10+13h)^2+(10+13h)\frac{5}{13}+\frac{2}{13}$ ergiebt sich, dafs die folgenden Zahlen mit derselben Periode 338, 985, ... sind.

Enthält die Periode nur ein Glied k, welches also zugleich das Mittelglied ist, so hat man $c=k$, $d=1$, $e=0$. Dies ist z. B. bei der Zahl 2 der Fall. Das Anfangsglied ist 1, und die Periode besteht aus dem einzigen Gliede 2. Es ist also $z'=1$, $v'=1$. Da aber $e=0$, so ist $b_n=2h$, also 2 der kleinste Werth von b_n; das entsprechende Anfangsglied ist 1, und 2 ist mithin die Grundzahl. Die folgenden Zahlen ergeben sich aus der Formel h^2+h und sind 6, 12, 20 ...

In Beziehung auf die Gröfse v', von welcher der Werth von b_n abhangt, ist noch zu bemerken, dafs man, um sie zu finden, nicht nöthig hat, die Gleichung (27.) noch besonders aufzulösen, sondern dafs es hinreicht die Gröfsen c, d zu kennen. Erwägt man nemlich, dafs b_1, $b_{n-2}=b_2$, $b_{n-1}=d$ ist, so zeigt sich, dafs der Näherungswerth, welcher $\frac{c}{d}$ vorausgeht, $\frac{d}{e}$ ist. Nimmt also $\frac{c}{d}$ eine gerade Stelle ein, d. h. ist die Anzahl der Theilnenner $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ eine *gerade* Zahl, so hat man

$$ce-dd=1,$$

mithin $z'=e$; $v'=d$. Ist dagegen die Anzahl dieser Theilnenner *ungerade*, also

$$ce-dd=-1,$$

so ist $z'=d-e$, $v'=c-d$. Mithin ist, je nachdem $n-1$ eine gerade

oder eine ungerade Zahl ist,

$$b_n = de \pm ch,$$

oder

$$b_n = (c-d)e \pm ch.$$

6.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wird es zweckmäfsig sein, die zwei Fälle zu trennen, je nachdem die Periode *ein Mittelglied* enthält oder *nicht.*

Behält man die in (§. 1.) eingeführte Bezeichnung bei, und nimmt zuerst an, dafs die Periode *kein* Mittelglied enthält, und die periodischen Glieder $a_1, a_2, \ldots a_m$ sind, so hat man $c = q^2 + q_0^2$; $d = qq_1 + q_0p_1$; $e = q_1^2 + p_1^2$. Nach (§. 4.) ist also c eine ungerade Zahl. Ist β_n *gerade,* so mufs man in (30.) für h Null oder alle *geraden* Zahlen setzen. Setzt man $\beta_n = 2a$, so ist a das Anfangsglied des Kettenbruchs, welcher der Grundzahl entspricht; setzt man noch $2h$ statt h, so dafs man nun für h Null oder alle ganzen Zahlen zu nehmen hat, so ist die allgemeine Form des Anfangsgliedes $a + ch$. Ist β_n *ungerade,* so mufs man für h alle ungeraden Zahlen annehmen. Man setze daher $2h+1$ statt h und nehme wieder für h Null oder alle ganzen Zahlen an. Das Anfangsglied des Kettenbruchs, welcher der Grundzahl entspricht, ist also $\frac{1}{2}(\beta_n + c)$, dies setze man wieder $= a$; dann ist die allgemeine Form des Anfangsgliedes $a + ch$.

Bezeichnet man daher durch A_h die $h$te auf die Grundzahl folgende Zahl in der Reihe der Zahlen, welchen die periodischen Glieder $a_1, a_2, \ldots a_n$ zukommen, so ist nach (31.):

$$(32.) \qquad A_h = (a+ch)^2 + 2(a+ch)\frac{d}{c} + \frac{e}{c},$$

und wenn man die Werthe von c, d, e berücksichtigt:

$$(33.) \qquad A_h = \frac{[(a+ch)q + q_1]^2 + [(a+ch)q_0 + p_1]^2}{c}.$$

Sobald bei einer Zahl A_h das Anfangsglied des entsprechenden Kettenbruchs, d. h. die gröfste in $\sqrt{A_h}$ enthaltene ganze Zahl, bekannt ist, weifs man auch die wievielte nach der Grundzahl sie sei. Dividirt man nemlich das Anfangsglied durch c, und nimmt die gröfste in diesem Quotienten enthaltene ganze Zahl, so ist es die gesuchte Zahl, da das Anfangsglied $= a + ch$ und $a < c$ ist. Für die Zahl 985 z. B. ist das Anfangsglied 31, und $c = 13$, wie oben gefunden wurde. Die Zahl 985 ist daher die zweite nach der Grundzahl; wie ebenfalls schon oben gefunden wurde.

Hat die Periode ***ein Mittelglied k*** und sind die periodischen Theilnenner wieder $a_1, a_2, \ldots a_m$, so ist $c = (kq + 2q_0)q$; $d = (kq + q_0)q_1 + qp_1$; $e = (kq_1 + 2p_1)q_1$.

Ist β_n ***ungerade,*** so mufs auch c ***ungerade*** sein, wie schon früher bemerkt; und in der Formel $b_n = \beta_n + ch$ dürfen für h nur ungerade Zahlen gesetzt werden. Schreibt man daher $2h+1$ statt h und nimmt für h alle ganzen Zahlen, so wird das Anfangsglied des Kettenbruchs, welcher der Grundzahl entspricht, $\frac{1}{2}(\beta_n + c)$, wofür man wieder a setzen kann; die allgemeine Form des Anfangsgliedes ist wieder $a + ch$.

Ist β_n *gerade* und c ***ungerade,*** so mufs man für h Null, oder alle geraden Zahlen setzen. Man nehme daher $2h$ statt h und setze für h Null, oder alle ganzen Zahlen. Hier ist das Anfangsglied des Kettenbruchs, welcher der Grundzahl entspricht, $\frac{1}{2}\beta_n$, wofür man a setze, die allgemeine Form des Anfangsgliedes ist wieder $a + ch$.

In diesen zwei Fällen hat man mithin, wenn wieder A_h die $h$te auf die Grundzahl folgende Zahl bedeutet:

$$(34.) \qquad A_h = (a + ch)^2 + 2(a + ch)\frac{d}{c} + \frac{e}{c}$$

und es läfst sich in derselben Weise wie früher angeben, die wievielte nach der Grundzahl eine gewisse Zahl ist.

Ist β_n *gerade,* und zugleich c *gerade* (was immer der Fall sein wird, wenn k gerade ist), so ist wieder das Anfangsglied des Kettenbruchs, welcher der Grundzahl entspricht, $\frac{1}{2}\beta_n = a$, die allgemeine Form des Anfangsgliedes ist $a + \frac{1}{2}c.h$ und

$$(35.) \qquad A_h = (a + \tfrac{1}{2}c.h)^2 + 2(a + \tfrac{1}{2}c.h)\frac{d}{c} + \frac{e}{c}.$$

Hier ist $a < \frac{1}{2}c$. Man findet also die wievielte Zahl nach der Grundzahl A_h sei, indem man das Anfangsglied durch $\frac{1}{2}c$ dividirt und die gröfste in dem Quotienten enthaltene ganze Zahl nimmt.

Die vorhergehenden Formeln gelten auch noch, wenn $\beta_n = 0$, nur darf man dann dem h nicht mehr den Werth Null geben; es bedeutet also dann A_h die $h$te Zahl, die Grundzahl als ***erste*** gerechnet.

7.

Die obigen Resultate enthalten demnach eine wesentliche ***Abkürzung*** der Berechnung einer ***Pell***'schen Tafel. Man braucht nur ***denjenigen*** Kettenbruch *direct* zu suchen, welcher der ***Grundzahl*** entspricht; dann findet sich

daraus eine unendliche Zahlenreihe, welche entsprechende Kettenbrüche mit der gleichen Periode haben, und deren Anfangsglieder durch die Formel (30.) bestimmt werden. Aus den Formeln des vorigen Paragraphen sieht man, dafs diese Zahlenreihe eine ***arithmetische Reihe zweiter Ordnung*** ist; man wird also diese Formeln nur dazu nöthig haben, um die ersten zwei auf die Grundzahl folgenden Zahlen zu finden, die übrigen finden sich einfacher durch die ***ersten und zweiten Differenzen.*** Diese Formeln zeigen aber zugleich, dafs die einzelnen Zahlen der Reihe, selbst wenn die Periode des entsprechenden Kettenbruchs aus einer nur mäfsigen Anzahl Glieder besteht, und wenn auch diese Glieder, einzeln genommen, klein sind, dennoch weit von einander abstehen, und dafs dieser Abstand mit der Anzahl und Gröfse der Glieder der Periode rasch zunimmt. So z. B. ist die Zahl 61 die Grundzahl der Zahlenreihe, welcher die periodischen Glieder 1, 4, 3, 1, 2 zukommen (ohne Mittelglied). Berechnet man nach der Formel (32.) die nächste auf die Grundzahl folgende Zahl, so findet man 14537522; die Zahl 61 ist also unter den ersten 14 Millionen, die einzige welcher die periodischen Glieder 1, 4, 3, 1, 2 (ohne Mittelglied) zukommen. Die practische Bedeutung dieser Abkürzung der Berechnung der ***Pell***'schen Tafel wird daher besonders dann sich zeigen, wenn die Tafel *weit* fortgesetzt werden soll. Eben das gilt auch von den weiter zu erörternden Abkürzungen.

8.

Wie schon im Eingange erwähnt, enthält die ***Degen***'sche Tafel auch die ***Nenner*** der vollständigen Quotienten, aus welchen sich die Glieder des Kettenbruchs ergeben. Auch diese Nenner lassen sich für jede Zahl A_h unmittelbar finden, sobald man sie für die ***Grundzahl*** kennt. Gesetzt der Kettenbruch, welcher der Grundzahl A entspricht, habe das Anfangsglied a, auf welches die Glieder $a_1, a_2, \ldots a_i, a_{i+1}$, u. s. w. folgen, man kennt den Nenner D des vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$, aus welchem man a_{i+1} findet, man sucht den Nenner D_h des vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt{A_h}+J_h}{D_h}$, aus welchem man in der Entwicklung von $\sqrt{A_h}$ dasselbe Glied a_{i+1} findet. Es sei $a+fh$ (wo $f=c$ oder $=\frac{1}{2}c$ ist), das Anfangsglied des Kettenbruchs, welcher A_h entspricht. Dann ist

$$(a, a_i)^2 - A.(a_1, a_i)^2 = [a.a_1, a_i + a_2, a_i]^2 - A.(a_1, a_i)^2 = \pm D,$$

$$[(a+f.h)a_1, a_i + a_2, a_i]^2 - A_h(a_1, a_i)^2 = \pm D_h,$$

mithin

$$\pm(D_h - D) = [2fh.a, a_i + f^2h^2.a_1, a_i - (A_h - A)a_1, a_i]a_1, a_i.$$

Erwägt man nun, dafs $A_h = (a+fh)^2 + \frac{2(a+fh)d+e}{c}$; $A = a^2 + \frac{2ad+e}{c}$ ist, so findet sich durch eine einfache Reduction:

$$\pm(D_h - D) = 2fh\, a_1, a_i\left(a_2, a_i - \frac{d}{c}a_1, a_i\right).$$

Die Nenner der vollständigen Quotienten, welche denselben Theilnenner des Kettenbruchs geben, bilden also eine ***einfache arithmetische Reihe.***

Es wurde z. B. oben gefunden, dafs 29 eine Grundzahl, die nächst folgende Zahl 338 ist, ferner $a = 5$, $f = 13$, $d = 5$, $c = 13$. Die Periode besteht aus den Gliedern 2, 1, 1, 2. Man weifs, dafs bei der Grundzahl der Nenner des vollständigen Quotienten, aus welchem sich der zweite Theilnenner 1 ergiebt, $= 5$ ist, und sucht den entsprechenden Nenner für die Zahl 338, dann ist, da $a_1, a_i = 3$; $a_2, a_i = 1$ (ohne Rücksicht auf das Zeichen):

$$D_1 - D = 2.13.3\left(1 - \frac{5.3}{13}\right) = 12,$$

also

$$D_1 = 17.$$

Für die nächst folgende Zahl 985 ist das entsprechende $D_2 = 5 + 2.12 = 29$ u. s. w.

9.

Die Erörterungen in (§. 5.) enthalten zugleich die Beantwortung folgender Frage: Ist eine Zahlenreihe gegeben, so zusammengesetzt, wie es die Periode eines Kettenbruchs, welcher einer ganzen Zahl entspricht, sein mufs, so dafs also in dieser Zahlenreihe b_1, b_2, ... b_{n-1}, die gleich weit von Anfang und Ende abstehenden Zahlen, einander gleich sind, giebt es dann ganze Zahlen, deren entsprechender Kettenbruch eine aus dieser Zahlenreihe bestehende Periode enthält?

Jedenfalls läfst sich nemlich die Gleichung (26.) auflösen, und für g und b_n lassen sich ***ganze*** Zahlen finden; für solche Werthe von b_n wird also $\frac{b_2, b_n}{b_1, b_{n-1}}$ eine ganze Zahl sein. Nennt man nun die Zahl, welcher der Kettenbruch mit der Periode b_1, b_2, ... b_{n-1} und dem Schlufsgliede b_n entspricht, A, so hat man nach (25.)

$$A = \tfrac{1}{4}(b_n)^2 + \frac{b_2, b_n}{b_1, b_{n-1}}.$$

Je nachdem also für b_n *gerade* Werthe gefunden werden können, oder nicht, wird A eine *ganze* Zahl sein, oder nicht. Setzt man aber $b_n = 2b$, so heifst das, es giebt ganze Zahlen, welchen die Periode $b_1, \ldots b_{n-1}$ zukommt, oder nicht, je nachdem für g und b *ganze* Zahlen gefunden werden können, welche der Gleichung

$$cg - 2db = e$$

genügen, oder nicht. Diese Gleichung kann aber immer in *ganzen* Zahlen aufgelöset werden, wenn c eine *ungerade* Zahl ist, da c und d keinen gemeinschaftlichen Factor haben, oder wenn zugleich c und e gerade Zahlen sind; sie ist dagegen nicht lösbar wenn c gerade und zugleich e ungerade ist. Nun wurde schon früher bewiesen (§. 6.), dafs c eine ungerade Zahl sein mufs, wenn die einer ganzen Zahl zukommende Periode kein Mittelglied hat; man hat also folgende einfache Regel: Wenn die Reihe $b_1, \ldots b_{n-1}$ ***kein*** Mittelglied hat, so wird sie die Periode einer ganzen Zahl sein, oder nicht, je nachdem c eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, d. h. je nachdem von den zwei Zahlen q und q_0 die eine gerade, die andere ungerade ist, oder beide ungerade sind. Hat dagegen die einer ganzen Zahl zukommende Periode ein Mittelglied, so folgt aus den in §. 6. gefundenen Werthen von c und e, dafs c eine ungerade Zahl ist, wenn k und q beide ungerade Zahlen sind; ferner werden c und e beide gerade Zahlen sein, wenn k eine gerade Zahl ist (da q und q_1 nicht zugleich gerade Zahlen sein können), dagegen wird c gerade und e ungerade sein, wenn q eine gerade, k eine ungerade Zahl ist. Hat also die Reihe $b_1, \ldots b_{n-1}$ ***ein Mittelglied,*** so wird sie immer die Periode einer ganzen Zahl sein, wenn dieses Mittelglied eine gerade Zahl ist; ist es eine ungerade Zahl, so wird die Reihe die Periode einer ganzen Zahl sein, oder nicht, je nachdem q eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

10.

Eine weitere Abkürzung der Berechnung einer *Pell*'schen Tafel ergiebt sich aus der Bemerkung, dafs jede Grundzahl nicht blofs der Anfang einer *einzigen* Zahlenreihe, sondern ***unzählig vieler*** Zahlenreihen ist, welche die Eigenschaft haben, dafs die in jeder Reihe enthaltenen Zahlen entsprechende Kettenbrüche mit derselben Periode haben, ja dafs überhaupt jede (nicht quadratische) ganze Zahl eine Grundzahl für unzählig viele Zahlenreihen ist.

Man nehme wieder an, die Zahl A sei die Grundzahl aller Zahlen,

welchen Kettenbrüche mit der Periode

$$(36.) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_2,\ a_1$$

entsprechen, das Anfangsglied des der Zahl A entsprechenden Kettenbruchs sei a, so kann man A auch offenbar als eine Zahl ansehen, welcher die Periode

$$(37.) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_2,\ a_1,\ 2a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_2,\ a_1$$

zukommt. Sie mufs zugleich die ***Grundzahl*** aller Zahlen sein, welchen diese Periode zukommt. Gäbe es eine kleinere Zahl B, welcher dieselbe Periode zukäme, und wäre b das Anfangsglied des Kettenbruchs, welcher B entspricht, so wäre $b < a$, also $2a > 2b$; d. h. unter den Theilnennern des Kettenbruchs käme einer vor, welcher gröfser als das Doppelte des Anfangsgliedes wäre; was, wie bekannt, unmöglich ist. Man kann mithin nach dem früheren Verfahren, aus dem bekannten Kettenbruche, welcher der Zahl A entspricht, die unendliche Zahlenreihe berechnen, welcher die Periode (37.) zukommt. Diese Zahlenreihe soll die *zweiperiodische* heifsen, im Gegensatze zu der Zahlenreihe, welcher die Periode (36.) zukommt, und die *einperiodische* heifsen soll. Der einperiodischen Zahlenreihe kommt also eine Periode *mit* oder *ohne* Mittelglied zu, während die Periode der zweiperiodischen Zahlen immer ein Mittelglied $2a$ hat. Man sieht leicht, wie sich diese Betrachtungen weiter fortsetzen lassen. Die Zahl A ist nemlich auch die Grundzahl der *dreiperiodischen* Zahlenreihe, welcher die Periode

$$(38.) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_2,\ a_1,\ 2a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_2,\ a_1,\ 2a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_2,\ a_1$$

zukommt, und diese Periode wird *ein* Mittelglied oder *keines* haben, je nachdem die Reihe (36.) ein solches hat, oder nicht hat. Indem man so fortfährt, kann man demnach allgemein A als die Grundzahl einer *n periodischen* Zahlenreihe ansehen, und dieser Zahlenreihe kommt immer eine Periode mit einem Mittelgliede zu, wenn n eine gerade Zahl ist, während sie, wenn n ungerade ist, ein solches enthalten, oder nicht enthalten wird, je nachdem das eine oder das andere bei der Reihe (36.) der Fall ist.

Aber auch jede Zahl aus jeder dieser Zahlenreihen kann wieder als die Grundzahl unzählig vieler Zahlenreihen angesehen werden. Man nehme z. B. eine Zahl A_h, welcher die Periode (36.) zukommt, das Anfangsglied des ihr entsprechenden Kettenbruchs wird also in der Form $a + fh$ enthalten sein. Nun kann man die Zahl A_h auch als eine solche ansehen, welcher die Periode

$$(39.) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_2,\ a_1,\ 2a + 2fh,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_2,\ a_1$$

zukommt, und zwar zeigt das schon oben angewandte Raisonnement, dafs sie die Grundzahl aller Zahlen sein mufs, welchen diese Periode zukommt. Man kann mithin wieder aus dem bekannten, der Zahl A_h entsprechenden Kettenbruche, alle Zahlen ableiten, welchen die Periode (39.) zukommt. Eben so kann man aber auch A_h als die Grundzahl der Zahlenreihe ansehen, welcher die Periode

(40.) $a_1, a_2, \ldots a_2, a_1, 2a+2fh, a_1, a_2, \ldots a_2, a_1, 2a+2fh, a_1, a_2, \ldots a_2, a_1$

entspricht, und indem man so fortfährt, ergiebt sich, dafs A_h die Grundzahl unzählig vieler Zahlenreihen ist. Insofern mithin jeder ganzen (nicht quadratischen) Zahl eine gewisse Periode zukommt, ist auch jede solche Zahl die Grundzahl unzählig vieler Zahlenreihen; woraus zugleich folgt, dafs die Anzahl der Grundzahlen unendlich grofs ist.

Unter der Voraussetzung, dafs sich die Periode (36.) nicht wieder auf eine einfachere zurückführen läfst, wie (37.) auf (36.), werde ich die Grundzahl, welcher die Periode (36.) zukommt, die ***Urzahl*** aller Zahlen nennen, die in den daraus abgeleiteten Zahlenreihen enthalten sind.

Eine solche Urzahl ist z. B. die Zahl 2, deren entsprechender Kettenbruch die Theilnenner 1, 2, 2, 2, ... enthält. Hier ist $a=1$, betrachtet man den nächst folgenden Theilnenner 2 als das Schlufsglied der Periode, so ist hier die Periode (36.) gar nicht vorhanden, oder die ***einperiodische*** Zahlenreihe hat eigentlich gar keine Periode. Unter dieser Voraussetzung ist $c=1$, $d=0$, $e=1$; die allgemeine Form des Anfangsgliedes ist $1+h$, und die einperiodische Zahlenreihe ist nach (34.)

5, 10, 17, 26, ...

Stellt man sich dagegen vor, dafs der zweite Theilnenner 2 das Schlufsglied ist, so enthält die Periode den einzigen Theilnenner 2, also $c=2$, $d=1$, $e=0$, und die ***zweiperiodische*** Zahlenreihe ist

6, 12, 20, ...

Betrachtet man die zwei Theilnenner 2, 2, als die Periode, also den dritten Theilnenner 2, als das Schlufsglied, so ist $c=5$, $d=2$, $e=1$ und die ***dreiperiodische*** Zahlenreihe ist

41, 130, 269, 458, ...

u. s. w.

Nimmt man nun z. B. aus der einperiodischen Zahlenreihe die Zahl 5, so kann man dieselbe wieder als die Grundzahl der Zahlenreihe ansehen,

welcher die Periode 4 zukommt, und erhält so die Zahlenreihe

18, 39, 68, 105, ...

Betrachtet man dagegen 5 als die Grundzahl der Zahlenreihe, welcher die Periode 4, 4 zukommt, so erhält man die Zahlen

370, 1313, 2834, ...

u. s. w. Die zu allen diesen Zahlen gehörenden Kettenbrüche sind also bekannt, sobald man den zur Urzahl 2 gehörenden Kettenbruch kennt.

11.

Eine *andere* wesentliche Abkürzung der Berechnung einer *Pell*'schen Tafel ergiebt sich aus folgendem Satze:

I. Wenn es eine Grundzahl A giebt, welcher die periodischen Glieder

$$(41.) \qquad a_1, a_2, \ldots a_m$$

ohne folgendes *Mittelglied* zukommen und es ist $a_1 > 1$, so giebt es auch eine Grundzahl B, welcher die periodischen Glieder

$$(42.) \qquad 1, a_1 - 1, a_2, \ldots a_m$$

ohne folgendes Mittelglied zukommen, und umgekehrt.

II. Wenn es eine Grundzahl A giebt, welcher die periodischen Glieder (41.) *nebst* einem folgenden *Mittelgliede* k zukommen, so giebt es auch eine Grundzahl B, welcher die periodischen Glieder (42.) nebst dem folgenden Mittelgliede k zukommen, und umgekehrt.

Man nehme zuerst an, der Grundzahl A komme die Reihe (41.) *ohne* folgendes Mittelglied zu, das Anfangsglied des entsprechenden Kettenbruchs sei a. Berücksichtigt man die in (§. 6.) bestimmten Werthe von c, d, e, so folgt aus der Gleichung (26.), dafs es eine ganze Zahl g giebt, welche durch die Gleichung

$$(43.) \qquad g = \frac{2a(qq_1 + q_0p_1) + q_1^2 + p_1^2}{q^2 + q_0^2}$$

bestimmt wird. Nun setze man für den Augenblick $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = a_1 - 1$, $\alpha_3 = a_2$, ... $\alpha_{m+1} = a_m$, so dafs die Reihe (42.) in

$$(44.) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+1}$$

übergeht. Es sei $\alpha_1, \alpha_{m+1} = Q$; $\alpha_1, \alpha_m = Q_0$; $\alpha_2, \alpha_{m+1} = Q_1$; $\alpha_2, \alpha_m = P_1$; so ist $Q = q$; $Q_0 = q_0$; $Q_1 = q - q_1$; $P_1 = q_0 - p_1$.

Zunächst sieht man also, dafs die Reihe (44.) die Reihe der periodischen Glieder einer ganzen Zahl B ist, da von den zwei Zahlen Q und Q_0 die eine gerade, die andere ungerade ist (§. 9.). Setzt man nun $Q^2+Q_0^2=q^2+q_0^2=c'$; $QQ^1+Q_0P^1=q^2+q_0^2-(qq_1+q_0p_1)=d'$; $Q_1^2+P_1^2=q^2+q_0^2+q_1^2+p_1^2-2(qq_1+q_0p_1)=e'$; so ist $c'=c$; $d'=c-d$; $e'=c+e-2d$, und nennt α das Anfangsglied des der Zahl B entsprechenden Kettenbruchs, so giebt es eine ganze Zahl G, welche durch die Gleichung

$$G=\frac{2\alpha[q^2+q_0^2-(qq_1+q_0p_1)]+q^2+q_0^2+q_1^2+p_1^2-2(qq_1+q_0p_1)}{q^2+q_0^2}$$

bestimmt wird, nemlich

$$G=2\alpha+1+\frac{q_1^2+p_1^2-2(\alpha+1)(qq_1+q_0p_1)}{q^2+q_0^2}.$$

Setzt man nun $\alpha=i-(a+1)$ und berücksichtigt die Gleichung (43.), so zeigt sich, dafs $i=h(q^2+q_0^2)$ sein mufs, wo h jede ganze positive Zahl bedeuten kann. Daher ist α nothwendig in der Form $h(q^2+q_0^2)-(a+1)=hc-(a+1)$ enthalten. Um also das Anfangsglied zu erhalten, welches der ***Grundzahl*** B zukommt, mufs man den kleinsten positiven Werth von $hc-(a+1)$ nehmen. Nun kann aber nicht $a+1=c$ sein, denn wäre dies, so müfste das gesuchte Anfangsglied *mindestens* $=2c-(a+1)=c$ sein, während nach der Voraussetzung das Anfangsglied kleiner als c sein mufs, da e nicht Null ist (§. 5.). Mithin ist $c-(a+1)>0$ und also das Anfangsglied des Kettenbruchs, welcher der Grundzahl B entspricht, $=c-(a+1)$.

Die Zahlen A und B sollen ***conjugirte Grundzahlen*** heifsen, und zwar die Zahl A, bei welcher das erste periodische Glied gröfser als die Einheit ist, die *primäre*, die andere, wie hier B, die *secundäre*.

Aus der Formel (32.) findet sich

(45.) $$A=a^2+\frac{2ad}{c}+\frac{e}{c},$$

(46.) $$B=(c-a-1)^2+2(c-a-1)\frac{d'}{e'}+\frac{e'}{c'}=(c-a-1)^2+2(c-a-1)\frac{c-d}{c}+\frac{c+e-2d}{c}.$$

Die Zahl A wird also *gerade* oder *ungerade* sein, je nachdem a^2c+e *gerade* oder *ungerade* ist. Entwickelt man aber den Werth von B und berücksichtigt, dafs $c-1$ eine *gerade* Zahl ist, so sieht man, dafs B *gerade* oder *ungerade* ist, je nachdem a^2c+e+1 *gerade* oder *ungerade* ist. ***Von den zwei conjugirten Grundzahlen ist also immer die eine gerade, die andere ungerade.***

Bezeichnet man durch B_h die $h$te Zahl in der Zahlenreihe, deren Grundzahl B ist, und setzt B_1 statt B, so findet sich nach der Formel (32.):

$$B_h = \frac{c[hc-(a+1)]^2+2[hc-(a+1)](c-d)+c+e-2d}{c} = (a-hc)^2+2(a-hc)\frac{d}{c}+\frac{e}{c}.$$

Diese Formel stimmt also genau mit (32.) überein, sobald man $-h$ statt h setzt, und man sieht daraus, dafs die beiden Zahlenreihen, welche aus den zwei conjugirten Grundzahlen entspringen, durch eine und dieselbe Formel ausgedrückt werden. Es ist daher nur nöthig, den Kettenbruch zu kennen, welcher der einen Grundzahl entspricht. Es ergeben sich daraus die Kettenbrüche, welche den beiden Zahlenreihen entsprechen.

Der Formel (33.) analog, erhält man auch

$$(47.) \qquad B_h = \frac{[(a-ch)q+q_1]^2+[(a-ch)q_0+p_1]^2}{c}.$$

Von den zwei Zahlen A und B wird die erste die *gröfsere* oder die *kleinere* sein, je nachdem a *gröfser* oder *kleiner* als $c-(a+1)$ ist, d. h. je nachdem $2a+1$ *gröfser* oder *kleiner* als c ist. Ist $c=2a+1$, so wird B die gröfsere sein. Da nemlich allgemein $q > a_1 q_1$ und $q_0 > a_1 p_1$ und nach der Voraussetzung *mindestens* $a_1 = 2$ ist, so hat man $q > 2q_1$; $q_0 > 2p_1$, mithin

$$q^2+q_0^2 > 2(qq_1+q_0p_1);$$

d. h. $c > 2d$ und $c-d > d$, mithin folgt aus den Formeln (45. und 46.), dafs $B > A$ ist. Da c eine ungerade Zahl ist, so läfst sich kürzer sagen: die gröfsere Zahl wird A oder B sein, je nachdem $2a$ gröfser oder kleiner als c ist.

Es wurde früher (§. 5.) z. B. gefunden, dafs 29 eine Grundzahl ist; die periodischen Glieder sind 2, 1, also ist 29 eine *primäre* Grundzahl. Ferner ist $a=5$, $c=13$, $d=5$, $e=2$, also die *secundäre* Grundzahl $=58$, das Anfangsglied des entsprechenden Kettenbruchs ist $13-(5+1)=7$ und die periodischen Glieder sind 1, 1, 1.

Man nehme nun an, der Grundzahl A komme die Reihe (41.) nebst dem folgenden Mittelgliede k zu, das Anfangsglied des entsprechenden Kettenbruchs sei wieder a. Berücksichtigt man die hier geltenden Werthe von c, d, e, so findet man wieder aus (26.), dafs es eine ganze Zahl g giebt, welche durch die Gleichung

$$(48.) \qquad g = \frac{2a[(kq+q_0)q_1+qp_1]+(kq_1+2p_1)q_1}{(kq+2q_0)q} = \frac{2ad+e}{c}$$

bestimmt wird. Behalten nun die Gröfsen Q, Q_0, Q_1, P_1 ihre früher bestimmten

Werthe, so hat man wieder:

$$c' = (kQ + 2Q_0)Q = (kq + 2q_0)q = c,$$
$$d' = (kQ + Q_0)Q_1 + QP' = (kq + q_0)(q - q_1) + q(q_0 - p_1) = c - d,$$
$$e' = (kQ_1 + 2P_1)Q_1 = [k(q - q_1) + 2(q_0 - p_1)](q - q_1) = c + e - 2d.$$

Nun ist (§. 9.) entweder q eine ungerade Zahl, wenn k eine ungerade Zahl ist, also dann auch Q ungerade, oder es ist k eine gerade Zahl. Jedenfalls kommt mithin die Reihe (42.) einer ganzen Zahl B zu. Nennt man daher das Anfangsglied des entsprechenden Kettenbruchs α, so mufs es eine ganze Zahl G geben, welche durch die Gleichung

$$G = \frac{2ad' + e'}{c'} = 2(\alpha + 1) - \frac{2(\alpha+1)d + c}{c}$$

bestimmt wird. Setzt man $\alpha = i - (a+1)$, so folgt aus (48.), dafs, wenn h jede ganze positive Zahl bedeutet, $i = hc$ oder $i = \frac{1}{2}hc$ ist, je nachdem c ungerade oder gerade ist. Mithin ist im ersten Falle $c-(a+1)$ und im zweiten $\frac{1}{2}c-(a+1)$ das Anfangsglied des der *Grundzahl* B entsprechenden Kettenbruchs, da auch hier wieder nicht $a+1 = c$ oder $= \frac{1}{2}c$ sein kann.

Auch in diesem Falle sollen die Zahlen A und B *conjugirte* Grundzahlen heifsen, und, wie im früheren Falle, als *primäre* und *secundäre* unterschieden werden.

Ist c eine *ungerade* Zahl, also auch k, so gelten die Ausdrücke (45. und 46.) unverändert. Also ist auch wieder eine der conjugirten Grundzahlen gerade, die andere ungerade. Ist dagegen c eine *gerade* Zahl, so wird zwar noch immer A durch die Formel (45.) bestimmt, dagegen erhält man

$$(49.) \quad B = (\tfrac{1}{2}c - a - 1)^2 + 2(\tfrac{1}{2}c - a - 1)\frac{c-d}{c} + \frac{c+c-2d}{c}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, so findet sich, dafs B eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, je nachdem $A + (\frac{1}{2}c-1)^2 - d + 1$ gerade oder ungerade ist, also (da d ungerade sein mufs, weil c gerade ist), je nachdem $A + (\frac{1}{2}c-1)^2$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Ist mithin $\frac{1}{2}c$ eine *ungerade* Zahl, so werden A und B zu gleicher Zeit gerade oder ungerade sein, ist dagegen $\frac{1}{2}c$ *gerade,* so wird eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade sein. Man bemerke noch, dafs jedenfalls, wenn c gerade sein soll, eine der Zahlen k und q gerade sein mufs. Da aber nach (§. 9.) nicht zugleich k ungerade und q gerade sein kann, so mufs k gerade sein.

Dem Vorhergehenden zufolge kann man die beiden Fälle, wenn die den Grundzahlen entsprechenden Perioden ein Mittelglied haben oder nicht, in dem Satze zusammenfassen:

Die zwei conjugirten Grundzahlen werden zu gleicher Zeit gerade und ungerade sein, wenn c von der Form $4n+2$ ist, in allen andern Fällen ist die eine Grundzahl gerade, die andere ungerade.

Die Zahl 28 z. B. ist eine Grundzahl, das Anfangsglied ist $=5$, die Periode 3, 2, 3, mithin $c=24$, also $\frac{1}{2}c$ eine gerade Zahl, die conjugirte Grundzahl ist 45. Die Zahl 52 ist eine Grundzahl, das Anfangsglied ist 7, die Periode 4, 1, 2, 1, 4, also $\frac{1}{2}c=45$; die conjugirte Grundzahl ist 1428.

Bezeichnet man wieder durch B_h das $h$te Glied in der Zahlenreihe, deren Grundzahl $B=B_1$ ist, so findet sich auch in dem Falle, wenn die Periode ein Mittelglied hat, wie in dem früheren, sobald c ungerade ist,

$$B_h = (a-hc)^2+2(a-hc)\frac{d}{c}+\frac{e}{c},$$

d. h. es werden wieder die beiden Zahlenreihen, welche aus den conjugirten Grundzahlen entspringen, durch dieselbe Formel ausgedrückt, je nachdem man für h alle ganzen positiven Zahlen (Null eingeschlossen) oder alle ganzen negativen Zahlen nimmt. Ist c gerade, so ergiebt sich

$$B_h = [h\tfrac{1}{2}c-(a+1)]^2+\frac{2[h\frac{1}{2}c-(a+1)](c-d)+c+e-2d}{c}$$

$$=(a-\tfrac{1}{2}c.h)^2+2(a-\tfrac{1}{2}c.h)\frac{d}{c}+\frac{e}{c}.$$

Vergleicht man diese Formel mit (35.), so zeigt sich, dafs wieder die beiden aus den zwei Grundzahlen entspringenden Zahlenreihen durch dieselbe Formel ausgedrückt werden, sobald h positiv und negativ angenommen werde.

Ist c eine *ungerade* Zahl, so folgt wieder wie früher, dafs von den zwei Zahlen A und B die erste die gröfsere oder die kleinere sein wird, je nachdem $2a+1$ gröfser oder kleiner als c ist. Eben so findet sich, wenn c *gerade* ist, dafs A die gröfsere oder die kleinere Zahl sein wird, je nachdem $2a+1$ gröfser oder kleiner als $\frac{1}{2}c$ ist. Ist, wenn c eine ungerade Zahl ist, $c=2a+1$, oder, wenn c eine gerade Zahl, $\frac{1}{2}c=2a+1$, so wird die secundäre Grundzahl die gröfsere sein. Denn da $c=(kq+q_0)q+qq_0$; $d=(kq+q_0)q_1+qp_1$ und $q>2q_1$; $q_0>2p_1$ ist, so folgt $c>2d$, also, nach den Formeln (45, 46 und 49.), $A<B$.

12.

Nach diesen Betrachtungen kehre ich nochmals zu dem Falle zurück, wenn es eine Grundzahl A giebt, deren entsprechender Kettenbruch ***kein Mittelglied*** hat. Ich nehme wieder an, dafs das Anfangsglied a und die periodischen Glieder $a_1, a_2, \ldots a_m$ sind. Nach der Formel (33.) hat man

$$A = \frac{(aq+q_1)^2+(aq_0+p_1)^2}{c}.$$

Nun ist, vermöge der Bezeichnung in (§. 1.), $p = aq+q_1$; $p_0 = aq_0+p_1$. Setzt man also noch für c seinen Werth $q^2+q_0^2$, so hat man

$$(50.) \qquad A = \frac{p^2+p_0^2}{q^2+q_0^2} = \frac{(pq_0+p_0q)^2+(pq-p_0q_0)^2}{(q^2+q_0^2)^2}.$$

Es sei

$$t = \frac{pq_0+p_0q}{q^2+q_0^2}; \quad u = \frac{pq-p_0q_0}{q^2+q_0^2},$$

so ist $A = t^2+u^2$. Nun ist aber leicht zu zeigen, dafs t und u ***ganze*** Zahlen sind. Denn aus der Gleichung

$$(51.) \qquad pq_0-p_0q = \pm 1$$

folgt

$$pq_0+p_0q = \pm(p^2q_0^2-p_0^2q^2) \quad \text{und}$$
$$pq_0+p_0q \pm q^2(p^2+p_0^2) = \pm p^2(q^2+q_0^2).$$

Nach (50.) ist aber offenbar $p^2+p_0^2$ durch $q^2+q_0^2$ theilbar, folglich mufs auch pq_0+p_0q durch $q_2^2+q_0^2$ theilbar sein, d. h. t ist eine ***ganze*** Zahl, mithin mufs auch u eine ***ganze*** Zahl sein. Aus (33.) ergiebt sich aber, dafs man den Werth von A_h aus dem Werthe von A findet, wenn man $p+chq$ statt p und p_0+chq_0 statt p_0 setzt. Setzt man also

$$(52.) \qquad t_h = \frac{(p+chq)q_0+(p_0+chq_0)q}{q^2+q_0^2} = t+2qq_0h,$$

$$(53.) \qquad u_h = \frac{(p+chq)q-(p_0+chq_0)q_0}{q^2+q_0^2} = u+(q^2-q_0^2)h,$$

so erhält man

$$A_h = (t+2qq_0h)^2+(u+(q^2-q_0^2)h)^2 = t_h^2+u_h^2;$$

d. h. sobald der Kettenbruch, welcher der Zahl A_h entspricht, ***kein*** Mittelglied hat, ist diese Zahl die ***Summe der Quadrate*** zweier ganzen Zahlen. Da nun nach (§. 2.) der Kettenbruch, welcher einer Primzahl ***von der Form*** $4n+1$ entspricht, kein Mittelglied hat, so ist namentlich jede solche Zahl die ***Summe zweier Quadrate*** in ganzen Zahlen. Gewöhnlich wird dieses bekannte

Theorem in einer andern Form aus der Theorie der Kettenbrüche abgeleitet. Ist nemlich $\frac{\sqrt{A_h}+J_h}{D_h}$ der vollständige Quotient, aus welchem sich das letzte periodische Glied a_m ergiebt, so beweiset man, dafs $A_h = J_h^2 + D_h^2$ ist. Es ist leicht zu zeigen wie dies mit den obigen Formeln übereinstimmt, welche aber den Vorzug haben, dafs sie unmittelbar nachweisen, wie die zwei Quadratzahlen aus den Theilnennern des periodischen Kettenbruchs zusammengesetzt sind.

Sind nemlich P und P_0 die Zähler der reducirten Brüche, welche bezüglich den Kettenbrüchen mit den Theilnennern

$$a+ch,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m$$

und

$$a+ch,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{m-1}$$

gleich sind, so ist

$$P=(a+ch)q+q_1=p+chq;\ P_0=(a+ch)q_0+p_1=p_0+chq_0,$$

mithin

$$t_h=\frac{Pq_0+P_0q}{q^2+q_0^2};\quad u_h=\frac{Pq-P_0q_0}{q^2+q_0^2}\quad\text{und}\quad A_h=\frac{P^2+P_0^2}{q^2+q_0^2},$$

auch ist $Pq_0-P_0q=q_0q_1-p_1q=\pm 1$. Nun ist bekanntlich $\pm J_h = A_hqq_0-PP_0$, wo das Zeichen, wie in der vorhergehenden Gleichung, zu nehmen ist. Substituirt man statt A_h seinen eben gefundenen Werth, so ergiebt sich

$$\pm J_h=\frac{P^2+P_0^2}{q^2+q_0^2}qq_0-PP_0=\frac{(Pq_0-P_0q)(Pq-P_0q_0)}{q^2+q_0^2},$$

also $J_h=u_h$. Unter denselben Umständen ist $\pm D_h=P^2-A_hq^2$, setzt man auch hier statt A_h seinen Werth, so findet man eben so $D_h=t_h$.

Es scheint aber noch nicht bemerkt worden zu sein, dafs sich mit Hülfe der Kettenbrüche auch der bekannte wichtige ***Ergänzungssatz*** beweisen läfst, dafs die Zahl A_h, wenn sie eine ***Primzahl*** ist, sich ***nur auf eine einzige Weise*** in zwei Quadrate zerlegen läfst.

Wenn nemlich in einem Kettenbruche alle Theilnenner in umgekehrter Ordnung wiederkehren, so dafs die Theilnenner dieses Kettenbruchs

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_m,\ \ \alpha_m\ \ldots\ \alpha_2,\ \alpha_1$$

sind, und es ist M der Zähler, N der Nenner des reducirten Werths dieses Kettenbruchs, so wird N^2+1 durch M theilbar sein. Denn es ist

$$M = (\alpha_1, \alpha_m)^2+(\alpha_1, \alpha_{m-1})^2,$$
$$N = \alpha_1,\ \alpha_m.\alpha_2,\ \alpha_m+\alpha_1,\ \alpha_{m-1}.\alpha_2,\ \alpha_{m-1},$$

ferner

$$(\alpha_1, \alpha_m . \alpha_2, \alpha_{m-1} - \alpha_1, \alpha_{m-1} . \alpha_2, \alpha_m)^2 = 1,$$

also

$$N^2 + 1 = [(\alpha_1, \alpha_m)^2 + (\alpha_1, \alpha_{m-1})^2][(\alpha_2, \alpha_m)^2 + (\alpha_2, \alpha_{m-1})^2],$$

mithin ist N^2+1 durch M dividirbar oder $N^2 \equiv -1 \pmod{M}$.

Ist A_h eine Primzahl, so kann der Congruenz $x^2 \equiv -1 \pmod{A_h}$ durch nicht mehr als zwei Werthe von x, die kleiner als A_h sind, genügt werden; nennt man den einen x', so ist der andere $A_h - x'$. Nun sei $A_h = t_h^2 + u_h^2$ gefunden worden. Die Zahlen t_h und u_h können keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Man nehme die gröfsere als Zähler, die kleinere als Nenner eines Bruchs an und verwandle den Bruch in einen Kettenbruch, dessen Theilnenner $b_1, b_2, \ldots . b_n$ sein sollen. Man hat also $A_h = (b_1, b_n)^2 + (b_2, b_n)^2$. Bezeichnet man durch $\frac{s}{s'}$ den Werth des Kettenbruchs, dessen Theilnenner $b_n, b_{n-1}, \ldots b_1; b_1, b_2, \ldots b_n$ sind, so ist $s = A_h$, mithin $s' < A_h$ und $s'^2 \equiv -1 \pmod{A_h}$. Man kann daher $s' = x'$ setzen. Könnte nun A_h noch auf andere Weise in zwei Quadrate zerlegt werden, etwa in $A_h = R^2 + S^2$, so sei $R > S$. Man verwandle $\frac{R}{S}$ in einen Kettenbruch, dessen Theilnenner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_m$ sein sollen, so dafs $A_h = (\alpha_1, \alpha_m)^2 + (\alpha_2, \alpha_m)^2$ ist. Bildet man nun den Kettenbruch, dessen Theilnenner $\alpha_m, \ldots \alpha_1, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ sind, so wird der Zähler des reducirten Werths dieses Kettenbruchs $= A_h$ sein, der Nenner sei B. Mithin müfste $B^2 \equiv -1 \pmod{A_h}$ sein, und da $B < A_h$ ist, entweder $B = x' = s'$, oder $B = A_h - s'$. Im ersten Falle wäre also $\frac{A_h}{s'} = \frac{A_h}{B}$, d. h. die zwei Kettenbrüche, deren Theilnenner $b_n, \ldots b_1, b_1, \ldots b_n$ und $\alpha_m, \ldots \alpha_1, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ sind, wären einander gleich, also auch $b_1, b_n = \alpha_1, \alpha_m$; $b_2, b_n = \alpha_2, \alpha_m$. Im zweiten Falle wäre $\frac{A_h}{B} = \frac{1}{1 - \frac{s'}{A_h}} = 1 + \frac{1}{-1 + \frac{A_h}{s'}}$, d. h.

$$\alpha_m + \frac{1}{\alpha_{m-1} + \ddots + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1 + \ddots + \frac{1}{\alpha_m}}}} = 1 + \frac{1}{b_n - 1 + \frac{1}{b_{n-1} + \ddots + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_1 + \ddots + \frac{1}{b_n - 1 + \frac{1}{1}}}}}},$$

also wieder $b_1,\ b_n = \alpha_1,\ \alpha_m;\ b_2,\ b_n = \alpha_2,\ \alpha_m$. Die Primzahl A_h kann mithin *nur auf eine Weise* in zwei Quadrate zerlegt werden.

Übrigens bietet die Gleichung (24.) noch ein anderes Mittel dar, jede Zahl A_h in zwei Quadrate zu zerlegen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. Setzt man nemlich jetzt $Pq + P_0 q_0 = x_0$ und wie früher $q^2 + q_0^2 = y_0$, so hat man $A_h y_0^2 - x_0^2 = 1$.

Ist *erstens* $A_h > x_0$, so folgt aus der letzten Gleichung, dafs $y_0^2 < x_0$ ist; in dem Bruche $\frac{x_0}{y_0^2}$ sind also Zähler und Nenner bezüglich kleiner als in dem Bruche $\frac{A_h}{x_0}$. Da A_h und x_0 keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so verwandle man $\frac{A_h}{x_0}$ in einen Kettenbruch, dessen Theilnenner $b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_m$ sein sollen, so dafs $A_h = b_1, b_m;\ x_0 = b_2, b_m$ ist. Ist m eine *gerade* Zahl, so hat man $A_h . b_2, b_{m-1} - x_0 . b_1, b_{m-1} = 1$, mithin $y_0^2 = b_2, b_{m-1},\ x_0 = b_1, b_{m-1}$. Hieraus folgt $\frac{A_h}{x_0} = \frac{b_1, b_m}{b_1, b_{m-1}}$, d. h. $\frac{A_h}{x_0}$ ist der Werth des Kettenbruchs, dessen Theilnenner $b_m,\ b_{m-1},\ \ldots\ b_1$ sind, also ist $b_1 = b_m;\ b_2 = b_{m-1}$, u. s. w. In dem Kettenbruche, welcher $\frac{A_h}{x_0}$ gleich ist, kehren folglich dieselben Theilnenner in umgekehrter Ordnung wieder, und da m eine gerade Zahl ist, so hat er *kein* Mittelglied, seine Theilnenner werden mithin $b_1, b_2, \ldots b_n, b_n, \ldots b_2, b_1$ sein. Hieraus folgt

$$\frac{A_h}{x_0} = \frac{(b_1, b_n)^2 + (b_1, b_{n-1})^2}{b_1, b_n . b_2, b_{n-1} + b_1, b_{n-1} . b_2, b_n}.$$

Da nun A_h und x_0 keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so ist $A_h = (b_1, b_n)^2 + (b_1, b_{n-1})^2$ also die Summe zweier Quadrate. Ist m eine *ungerade* Zahl und bedeutet $\frac{s}{s'}$ den reducirten Werth des Kettenbruchs, dessen Theilnenner $b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_m - 1$ sind, so hat man $A_h s' - x_0 . s = 1$, also $x_0 = s$, d. h. es ist

$$\frac{A_h}{x_0} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \ddots + \dfrac{1}{b_m - 1 + \dfrac{1}{1}}} = \frac{A_h}{s} = 1 + \frac{1}{b_m - 1 + \dfrac{1}{b_{m-1} + \ddots + \dfrac{1}{b_1}}}$$

also $$b_1 = 1,\ b_2 = b_m - 1,\ b_3 = b_{m-1},\ \text{u. s. w.},$$

oder $\frac{A_h}{x_0}$ ist der Werth des Kettenbruchs, dessen $1,\ b_2,\ \ldots\ b_n,\ b_n,\ \ldots\ b_2, 1$ sind, mithin ist A_h wieder die Summe zweier Quadrate.

Ist *zweitens* $A_h < x_0$, so ist $y_0^2 > x_0$; in dem Bruche $\frac{x_0}{A_h}$ sind also Zähler und Nenner bezüglich kleiner als in dem Bruche $\frac{y_0^2}{x_0}$. Nun haben y_0^2 und x_0 keinen gemeinschaftlichen Factor. Verwandelt man daher $\frac{y_0^2}{x_0}$ in einen Kettenbruch, so wird, wie im vorhergehenden Falle, bewiesen, dafs die Theilnenner sich in umgekehrter Ordnung wiederholen müssen, und etwa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \alpha_n, \ldots \alpha_2, \alpha_1$ sind. $\frac{x_0}{A_h}$ ist daher der vorhergehende Näherungswerth, oder der Werth des Kettenbruchs, dessen Theilnenner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \alpha_n, \ldots \alpha_2$ sind, mithin $A_h = (\alpha_2, \alpha_n)^2 + (\alpha_2, \alpha_{n-1})^2$.

Für die Zahl 41 z. B. ist $x_0 = 32$, mithin $A_h > x_0$ und

$$\frac{A_h}{x_0} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}}},$$

mithin $A_h = 5^2 + 4^2$. Für die Zahl 61 ist $x_0 = 29718$, also $A_h < x_0$ und

$$\frac{x_0}{A_h} = 487 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}},$$

mithin $A_h = 6^2 + 5^2$.

Ein ähnliches Verfahren hat schon *Serret* angewandt. (Journal des Mathématiques T. 13.)

13.

Setzt man zur Abkürzung $q^2 - q_0^2 = \alpha$ und $2qq_0 = \beta$, so folgt aus (52. und 53.)

$$t_h = t + \beta h; \qquad u_h = u + \alpha h$$

und

$$\alpha t_h - \beta u_h = \alpha t - \beta u.$$

Aus den Werthen von t und u ergiebt sich aber

$$\alpha t - \beta u = p_0 q - p q_0 = \mp 1,$$

mithin allgemein:

$$(54.) \qquad \alpha t_h - \beta u_h = \mp 1,$$

wo das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem in der Gleichung (51.) das obere oder das untere Zeichen gilt. Also sind t_h und u_h

zusammengehörende Werthe der ganzen Zahlen z und v, welche der unbestimmten Gleichung

$$(55.) \qquad \alpha z - \beta v = \mp 1$$

Genüge leisten. Diese Gleichung ist immer auflösbar; denn da q und q_0 keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so gilt dasselbe von $q^2 - q_0^2$ und qq_0. Nun ist aber auch $q^2 - q_0^2$ eine ungerade Zahl, da von den Zahlen q und q_0 die eine gerade, die andere ungerade sein mufs, mithin sind α und β relative Primzahlen.

Die Zahlen t und u, welche der ***Grundzahl*** A entsprechen, sind aber die ***kleinsten*** zusammengehörenden positiven Werthe, welche der Gleichung (55.) entsprechen. Gäbe es nemlich zwei kleinere zusammengehörende Werthe dieser Art, die t' und u' heifsen mögen, so wäre $t' = t - \beta k$ und $u' = u - \alpha k$, wo k irgend eine ganze positive Zahl bedeutet. Also $t^2 + u^2 = t'^2 + u'^2 + 2(\beta t' + \alpha u')k + (\alpha^2 + \beta^2)k^2$. Nun ist $t^2 + u^2 = A$, $\alpha^2 + \beta^2 = (q^2 + q_0^2)^2 = c^2$; es wäre demnach $\sqrt{A} > c$, während die gröfste in $\sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl a kleiner als c sein mufs (§. 5.). Die allgemeine Auflösung der Gleichung (55.) ist demnach in der Form

$$z = t + \beta h; \quad v = u + \alpha h$$

enthalten. Vergleicht man diese Werthe mit den Werthen von t_h und u_h, so ergiebt sich, dafs die Zahlen t_h und u_h, deren Quadratsumme die $h$te Zahl in der Zahlenreihe giebt, deren Grundzahl aus der Summe der Quadrate von t und u besteht, zugleich die $h$te Auflösung in positiven ganzen Zahlen der Gleichung (55.) geben, welche auf die Auflösung in den kleinsten positiven ganzen Zahlen t und u folgt. Zugleich enthält das Vorstehende eine einfache Auflösung folgender Aufgabe: Wenn man die Periode $a_1, a_2, \ldots a_m, a_m, \ldots a_2, a_1$ kennt, die einer gewissen Zahlenreihe zukommt, die Grundzahl A dieser Reihe, und zwar als Summe zweier Quadrate ausgedrückt, zu finden.

Wie in (§. 11.) bewiesen wurde, findet man die der Grundzahl A conjugirte Grundzahl B, wenn man in dem Werthe von A_h statt h überall $-h$ und dann $h = 1$ setzt. Nun ist

$$A_h = (t + \beta h)^2 + (u + \alpha h)^2, \text{ also}$$
$$B = (t - \beta)^2 + (u - \alpha)^2.$$

Es mufs aber $t < \beta$ und $u < \alpha$ sein. Wäre nemlich $t > \beta$ und zugleich $u > \alpha$, so wäre $t^2 + u^2 > \alpha^2 + \beta^2$, d. h. es wäre $A > c^2$, was, wie schon bewiesen, nicht sein kann. Wäre $t > \beta$ und zugleich $\alpha > u$, so wäre $\alpha t - \beta u$

positiv und gröfser als die Einheit und könnte also nicht ∓ 1 sein. Eben so wird bewiesen, dafs nicht $\beta > t$ und zugleich $u > \alpha$ sein kann. Setzt man daher $\beta - t = t'$ und $\alpha - u = u'$, so sind t' und u' positive Gröfsen und man findet

$$B = t'^2 + u'^2.$$

Zugleich ist auch

$$(56.) \qquad \alpha t' - \beta u' = \pm 1,$$

je nachdem

$$(57.) \qquad \alpha t - \beta u = \mp 1$$

ist, und man sieht zugleich, dafs t' und u' die *kleinsten* zusammengehörenden Werthe sind, welche der Gleichung (55.), mit entsprechenden Zeichen genommen, genügen.

Der Grund dieses Zusammenhanges zwischen den Gröfsen t und u einerseits und den Gröfsen t' und u' andererseits, ist leicht zu sehen. In der Gleichung (51.) ist nemlich das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, je nachdem die Anzahl der Theilnenner $a, a_1, \ldots a_m$ gerade oder ungerade, d. h. je nachdem die Anzahl der periodischen Glieder ungerade oder gerade ist. Es gilt also auch in der Gleichung (55.) das obere oder das untere Zeichen, je nachdem die Reihe $a_1, a_2, \ldots a_m$ eine ungerade oder eine gerade Anzahl Glieder hat. Nun sei $a_1 > 1$, so dafs B die Grundzahl der Zahlenreihe ist, welcher die periodischen Glieder $1, a_1 - 1, a_2, \ldots a_m$ zukommen. Behalten Q und Q_0 die in (§. 11.) angenommene Bedeutung, und setzt man $Q^2 - Q_0^2 = \alpha'$; $2QQ_0 = \beta'$; so mufs man, um t' und u' zu finden, die kleinsten Werthe nehmen, welche der Gleichung $\alpha' z - \beta' v = \mp 1$ genügen, da aber $Q = q$ und $Q_0 = q_0$, so ist auch $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$; es ist also die Gleichung $\alpha z - \beta v = \mp 1$ aufzulösen. Nun ist die Anzahl der Glieder $1, a_1 - 1, a_2, \ldots a_m$ gerade oder ungerade, je nachdem die Anzahl der Glieder $a_1, a_2, \ldots a_m$ ungerade oder gerade ist, man mufs mithin in der letzten Gleichung, wenn man t' und u' finden will, das obere oder das untere Zeichen nehmen, je nachdem man, um t und u zu finden, das untere oder das obere Zeichen nehmen mufs.

14.

Aus der Gleichung (54.) folgt, dafs t_h und u_h keinen gemeinschaftlichen Factor haben, also namentlich nicht beide gerade Zahlen sein können, mithin kann A_h nicht durch 4 theilbar sein. Da ferner β eine gerade Zahl

ist, so mufs t_h immer ungerade sein; mithin wird u gerade oder ungerade sein, je nachdem A_h ungerade oder gerade ist. Es ist dies eine Verallgemeinerung des von *Gaufs* bewiesenen Satzes, dafs t_h ungerade, u_h gerade ist, wenn A_h eine Primzahl ist. (Disquisit. arithm. art. 265.) Die vorhergehenden Betrachtungen führen aber noch weiter, indem sie zugleich ein Kennzeichen angeben, mittels dessen sich entscheiden läfst, ob t_h von der Form $4n+1$ oder $4n+3$ ist. Da nemlich eine der Zahlen q und q_0 gerade ist, so ist β durch 4 theilbar. Gilt daher in (54.) das *obere* Zeichen, d. h.: ist die Anzahl der periodischen Glieder ungerade, so mufs eine der Zahlen α und t_h in der Form $4n+1$, die andere in der Form $4n+3$ enthalten sein, gilt dagegen das *untere* Zeichen, d. h. ist die Anzahl der periodischen Glieder gerade, so müssen beide Zahlen in der Form $4n+1$ oder beide in der Form $4n+3$ enthalten sein. Nun ist aber α in der Form $4n+1$ oder in der Form $4n+3$ enthalten, je nachdem q ungerade oder gerade ist. Man hat mithin folgenden Satz:

> Die Zahl t_h (oder D_h) wird in der Form $4n+3$ enthalten sein, wenn q und die Anzahl der periodischen Glieder beide gerade oder beide ungerade Zahlen sind. Ist dagegen eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade, so ist t_h in der Form $4n+1$ enthalten.

Hieraus folgt zugleich, dafs t' in der Form $4n\mp1$ enthalten ist, je nachdem t die Form $4n\pm1$ hat.

15.

Es sei

$$\frac{\alpha}{\beta} = l + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{l_2 + \cdots + \cfrac{1}{l_{r-1} + \cfrac{1}{l_r}}}},$$

wo auch $l = 0$ sein kann. Ferner sei

$$\frac{\gamma}{\delta} = l + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{l_2 + \cdots + \cfrac{1}{l_{r-1}}}}$$

und

$$\frac{\gamma'}{\delta'} = l + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{l_2 + \cdots + \cfrac{1}{l_{r-1} + \cfrac{1}{l_{r-1}}}}}$$

Es wird vorausgesetzt, dafs γ und δ relative Primzahlen sind; eben so γ' und δ'. Man hat also

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$
$$\alpha\delta' - \beta\gamma' = \mp 1,$$

wo die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem die Anzahl der Theilnenner l, l_1, l_2, ... l_r gerade oder ungerade ist. Nun wurde früher bewiesen, dafs, je nachdem die Anzahl der periodischen Glieder a_1, a_2, ... a_m gerade oder ungerade ist, in den Gleichungen

$$\alpha t - \beta u = \pm 1,$$
$$\alpha t' - \beta u' = \mp 1$$

das obere oder das untere Zeichen genommen werden mufs. Da nun t, u und t', u' die kleinsten zusammengehörenden positiven Werthe bedeuten, welche diesen Gleichungen genügen, und diese kleinsten Werthe andererseits bezüglich durch δ, γ und δ', γ' ausgedrückt werden, so ergiebt sich folgende Beziehung. Ist zu gleicher Zeit die Anzahl der Theilnenner l, l_1, ... l_r und die Anzahl der periodischen Glieder a_1, a_2, ... a_m gerade oder ungerade, so ist $t = \delta$, $u = \gamma$, $t' = \delta'$, $u' = \gamma'$. Ist dagegen die eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade, d. h. ist zu gleicher Zeit die Anzahl der Theilnenner l, l_1, ... l_r und die Anzahl der periodischen Glieder 1, $a_1 - 1$, a_2, ... a_m gerade oder ungerade, so ist $t' = \delta$, $u' = \gamma$, $t = \delta'$, $u = \gamma'$. Da nun $\delta' > \delta$, $\gamma' > \gamma$ ist, so folgt dafs im ersten Falle die primäre Grundzahl $t^2 + u^2$, im zweiten die secundäre Grundzahl $t'^2 + u'^2$ die kleinere ist. Man hat also folgenden merkwürdigen Satz:

> Je nachdem die Anzahl der Theilnenner in dem Kettenbruche, dessen Werth $\frac{\alpha}{\beta}$ ist, gerade oder ungerade ist, wird auch die Anzahl der periodischen Glieder, welche zu der kleineren der zwei conjugirten Grundzahlen gehört, gerade oder ungerade sein, und umgekehrt.

Nun wurde (§. 14.) bewiesen, dafs von den Zahlen t und t' die eine die Form $4n+1$, die andere die Form $4n+3$ hat, und zwar wird diejenige, welche zu der Grundzahl gehört, welcher eine gerade Anzahl periodischer Glieder entspricht, in der Form $4n+3$ oder $4n+1$ enthalten sein, je nachdem α die Form $4n+3$ oder $4n+1$ hat. Verbindet man diese Bemerkung mit dem vorhergehenden Satze, so folgt daraus, dafs von den zwei Zahlen t und t' diejenige, welche zu der kleineren, oder diejenige, welche zu der gröfseren

der zwei conjugirten Grundzahlen gehört, in derselben Form wie α enthalten sein wird, je nachdem die Anzahl der Theilnenner des Kettenbruchs, welcher $= \frac{\alpha}{\beta}$ ist, gerade oder ungerade ist. Es wurde z. B. gefunden (§. 11.), dafs 29 und 58 conjugirte Grundzahlen sind. Nun ist $29 = 5^2+2^2$; $58 = 7^2+3^2$, ferner $\alpha = 5$, $\beta = 12$ und $\frac{\alpha}{\beta} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}$. Die Anzahl der Theilnenner dieses Kettenbruchs ist gerade (da der erste Theilnenner $= 0$ mitzählt), daher ist hier $t = 5$, welches zu der *kleineren* Grundzahl gehört, in eben der Form $4n+1$ enthalten, wie α. Die Zahlen $73 = 3^2+8^2$ und $13562 = 41^2+109^2$ sind ebenfalls conjugirte Grundzahlen, hier ist $\alpha = 117$, $\beta = 44$ und $\frac{\alpha}{\beta} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{14}}}}$, also die Anzahl der Theilnenner ungerade, daher ist hier $t = 41$, welches zu der *gröfseren* Grundzahl gehört, in der Form $4n+1$ enthalten, wie α.

In (§. 11.) wurde gefunden, dafs die primäre oder die secundäre Grundzahl die kleinere ist, je nachdem $2a+1 \gtrless c$ oder $2a+1 > c$, wo a die gröfste in der Quadratwurzel der primären Grundzahl enthaltene ganze Zahl bedeutet. Nun wurde so eben gefunden, dafs der erste Fall Statt findet, wenn die Anzahl der periodischen Glieder der primären Grundzahl und die Anzahl der Theilnenner des Kettenbruchs, welcher $= \frac{\alpha}{\beta}$ ist, zugleich gerade oder ungerade ist; der zweite Fall dagegen, wenn nur eine dieser Zahlen gerade ist. Aus dem Vergleich dieser beiden Sätze ergiebt sich,

dafs die gröfste in der Quadratwurzel der primären Grundzahl enthaltene ganze Zahl *gröfser,* oder *nicht gröfser* sein wird als die gröfste in der Quadratwurzel der secundären Grundzahl enthaltene ganze Zahl, je nachdem der Unterschied der Anzahl der periodischen Glieder der primären Grundzahl und der Theilnenner des Kettenbruchs, welcher $= \frac{\alpha}{\beta}$ ist, ungerade oder gerade ist.

16.

Ich gehe nun zu einer neuen Betrachtung über, aus welcher sich eine weitere Abkürzung der Berechnung einer *Pell*'schen Tafel ergeben wird. Zunächst soll folgende Aufgabe gelöset werden:

Man weifs, dafs der Kettenbruch, welcher einer Zahl A entspricht, mit den Theilnennern

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m$$

beginnt; es ist aber nicht nothwendig, wie bisher vorausgesetzt, a_m der *letzte* periodische Theilnenner. Man kennt also auch den Nenner D des vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$, aus welchem sich der auf a_m folgende Theilnenner ergiebt: wie kann man dann sämmtliche Zahlen finden, bei deren entsprechenden Kettenbrüchen auf das Anfangsglied die Theilnenner $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m$ folgen, während zugleich der Nenner des vollständigen Quotienten, welcher zu dem nächstfolgenden Theilnenner gehört, $= D$ ist?

Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung hat man

$$(58.)\qquad p^2 - Aq^2 = \pm D,$$

wo dasselbe Zeichen zu nehmen ist, wie in der Gleichung

$$(59.)\qquad pq_0 - p_0 q = \pm 1.$$

Mithin ist, da $p = aq + q'$,

$$A = a^2 + \frac{2aqq' + q'^2 \mp D}{q^2}.$$

Es mufs also $\frac{2aqq' + q'^2 \mp D}{q^2}$ eine ganze positive Zahl sein. Nennt man diese Zahl g, so erhält man

$$gq^2 - 2aqq' = q'^2 \mp D,$$

mithin mufs auch $\frac{q'^2 \mp D}{q}$ eine ganze Zahl (oder Null) sein. Bezeichnet man diese Zahl durch e, so hat man

$$gq - 2aq' = e.$$

Bezeichnen x und y ganze positive Zahlen, so ist mithin a einer der Werthe von y, welche der Gleichung

$$(60.)\qquad qx - 2q'y = e$$

Genüge leisten. Da q und q' keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so läfst sich diese Gleichung unmittelbar lösen, sobald q *ungerade* ist. Ist q *gerade*, so mufs auch e gerade sein, und es ist dann die Gleichung

$$(61.)\qquad \tfrac{1}{2}qx - q'y = \tfrac{1}{2}e$$

zu lösen. Sobald also der, einer Zahl A_h entsprechende Kettenbruch nach dem Anfangsgliede, welches α heifsen mag, die Theilnenner $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m$ und

einen folgenden vollständigen Quotienten mit dem Nenner D haben soll, mufs nothwendig das Anfangsglied einer der Werthe von y sein, welche der Gleichung (60.) oder (61.) genügen, d. h. es mufs α die Form $a \pm qh$ oder $a \pm \frac{1}{2}qh$ haben, wo h irgend eine ganze Zahl bedeutet, und man hat

$$(62.) \qquad A_h = \alpha^2 + \frac{2\alpha qq' + q'^2 \mp D}{q^2}.$$

Obgleich nun dieser Ausdruck für jeden Werth von α, welcher den Gleichungen (60.) oder (61.) genügt, eine ganze Zahl ist; so wird doch keinesweges jede dieser Zahlen so beschaffen sein, dafs in dem ihr entsprechenden Kettenbruche auch wirklich auf das Anfangsglied die Theilnenner $a_1, a_2, \ldots a_m$ und darauf ein vollständiger Quotient mit dem Nenner D folgen. Vielmehr müssen, damit dies der Fall sei, noch andere Bedingungen erfüllt werden.

Setzt man nemlich $\alpha q + q' = \pi$, $\alpha q_0 + p' = \pi_0$, so hat man jedenfalls

$$\pi^2 - A_h q^2 = \pm D,$$

wo wieder dasselbe Zeichen wie in (59.) zu nehmen ist. Damit nun A_h eine der gesuchten Zahlen sei, ist es nothwendig und hinreichend, dafs $A_h qq_0 - \pi\pi_0$ dasselbe Zeichen habe, wie $\pi^2 - A_h q^2$, und dafs aufserdem $\alpha \pm (A_h qq_0 - \pi\pi_0) \gtrless \pm(\pi^2 - A_h q^2)$ sei, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $\pi^2 - A_h q^2$ positiv oder negativ ist. Setzt man nemlich $J_h = \pm(A_h qq_0 - \pi\pi_0)$, indem man wieder dasselbe Zeichen nimmt, wie in (59.) und bildet den Kettenbruch

$$\alpha + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 \cdots + \cfrac{1}{a_m + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{A_h} + J_h}{D}}}}},$$

so findet man als Werth desselben, durch unmittelbare Reduction, $\sqrt{A}$, wenn man erwägt, dafs $\pi q_0 - \pi_0 q$ denselben Werth hat, wie $pq_0 - p_0 q$. Sind nun die angegebenen Bedingungen erfüllt, so folgt aus der ersten, dafs J_h, wie D, positiv ist, und da $\sqrt{A_h} > \alpha$ ist, so folgt aus der zweiten, dafs $\sqrt{A_h} + J_h > D$ ist; mithin mufs dieser Kettenbruch wirklich der Zahl A_h entsprechen. Wäre dagegen die erste Bedingung nicht erfüllt, so wäre J_h negativ, also könnte $\frac{\sqrt{A_h} + J_h}{D}$ nicht der verlangte vollständige Quotient sein; dies könnte aber auch

dann nicht Statt finden, wenn J_h positiv wäre, sobald nicht $\sqrt{A_h}+J_h>D$ wäre, d. h. sobald nicht die zweite Bedingung erfüllt würde.

Der Ausdruck dieser Bedingungen läfst sich aber durch folgende Bemerkungen vereinfachen. Werden die Bedingungen für irgend eine Zahl erfüllt, welche in der Formel (62.) enthalten ist, so werden sie auch für alle folgenden Zahlen erfüllt werden. Denn es sei A_k die unmittelbar auf A_h folgende in dieser Formel enthaltene Zahl. Bezeichnet man durch Q den Werth q oder den Werth $\frac{1}{2}q$, je nachdem q ungerade oder gerade ist, so ist der Werth von y, welcher zu A_k gehört, $\alpha+Q$, und man hat demnach

$$A_k=(\alpha+Q)^2+\frac{2(\alpha+Q)qq'+q'^2\mp D}{q^2}=A_h+\frac{2\pi Q}{q}+Q^2.$$

Nun setze man $\varphi=(\alpha+Q)q+q'$; $\varphi_0=(\alpha+Q)q_0+p'$, folglich

$$\varphi\varphi_0=\pi\pi_0+Q(\pi q_0+\pi_0 q)+Q^2qq_0 \text{ und}$$

$$A_kqq_0-\varphi\varphi_0=A_hqq_0-\pi\pi_0+Q(\pi q_0-\pi_0 q).$$

Setzt man also

$$J_k=\pm(A_kqq_0-\varphi\varphi_0),$$

wo wieder das obere oder untere Zeichen, wie in (59.) zu nehmen ist, so hat man

$$J_k=J_h+Q.$$

J_k ist also positiv, wie J_h. Ferner ist, nach der Voraussetzung, $\alpha+J_h\lessgtr D$, also $\alpha+Q+J_k>D$, mithin ist wieder $\frac{\sqrt{A_k}+J_k}{D}$ der richtige vollständige Quotient.

Werden umgekehrt für eine in der Formel (62.) enthaltene Zahl die angegebenen Bedingungen nicht erfüllt, so können sie auch für keine der vorhergehenden Zahlen erfüllt werden. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung sei A_k eine solche Zahl, A_h die unmittelbar vorhergehende. Wird die erste Bedingung nicht erfüllt, d. h. hat $A_kqq_0-\varphi\varphi_0$ das entgegengesetzte Zeichen von $\varphi^2-A_kq^2=\pm D$, so ist J_k negativ und um so mehr J_h negativ, da $J_h=J_k-Q$. Wird die zweite Bedingung nicht erfüllt, d. h. ist $\alpha+Q+J_k<D$, so ist um so mehr $\alpha+J_h<D$.

Es kommt also nur darauf an, die kleinste Zahl zu finden, welche in der Formel (62.) enthalten ist, und die zugleich den angegebenen Bedingungen genügt. Nach der ersten Bedingung hat man, je nachdem $\pi^2-A_hq^2$ positiv oder negativ ist,

$$A_hqq_0>\pi\pi_0; \quad A_hqq_0<\pi\pi_0.$$

Erwägt man nun, dafs $pq_0 - p_0 q$ und mithin auch $q_0 q' - p' q$ positiv oder negativ ist, je nachdem die erste oder zweite Ungleichheit Statt hat, setzt wieder für π und π_0 ihre Werthe und auch statt A_h seinen Werth aus (62.), so findet man nach gehöriger Reduction in beiden Fällen:

$$\alpha > \frac{Dq_0 - q'}{q}.$$

Die zweite Bedingung giebt

$$\alpha \pm A_h q(q_0 + q) \gtrless \pm \pi(\pi + \pi_0).$$

Entwickelt man dies in ähnlicher Weise, so findet sich

$$\alpha \gtrless \frac{D(q+q_0) - q'}{2q}.$$

Nun ist $q > q_0$, mithin

$$\frac{D(q+q_0) - q'}{2q} > \frac{Dq_0 - q'}{q}.$$

Sobald also α der zweiten Bedingung genügt, genügt es auch der ersten. Man hat daher folgende Regel:

> Giebt es überhaupt Zahlen, bei deren entsprechenden Kettenbrüchen auf das Anfangsglied die Theilnenner $a_1, a_2, \ldots a_m$ folgen, während der Nenner des nächstfolgenden vollständigen Quotienten $= D$ ist, und will man die ganze Reihe dieser Zahlen wissen, so löse man die Gleichung (60.) auf und nehme den kleinsten Werth von y, welcher der Bedingung
>
> $$y \gtrless \frac{D(q+q_0) - q'}{2q}$$
>
> Genüge leistet. Man substituire diesen Werth, welcher a heifsen mag, statt α in (62.), so erhält man eine Zahl A, welche die *kleinste* unter den gesuchten ist. Bezeichnet man alsdann durch A_h die $h$te auf A folgende Zahl in dieser Zahlenreihe, durch a_h das Anfangsglied des derselben entsprechenden Kettenbruchs, so hat man $a_h = a + qh$, oder $a_h = a + \frac{1}{2}q.h$, je nachdem q eine ungerade, oder eine gerade Zahl ist, wo h jede ganze positive Zahl bedeutet, und mithin, je nachdem der erste oder der zweite Fall Statt findet:

(63.) $$A_h = (a + qh)^2 + \frac{2(a+qh)qq' + q'^2 \mp D}{q^2} = A + 2ph + q^2 h^2,$$

(64.) $$A_h = (a + \tfrac{1}{2}q.h)^2 + \frac{2(a+\frac{1}{2}q.h)qq' + q'^2 \mp D}{q^2} = A + ph + \tfrac{1}{4}q^2 h^2.$$

Man weifs z. B. dafs es Zahlen giebt, deren entsprechenden Kettenbrüche nach dem Anfangsgliede die Theilnenner 2, 1 haben, während der Nenner des darauf folgenden vollständigen Quotienten $=8$ ist, man verlangt die Reihe dieser Zahlen. Hier ist $D=8$, $q=3$, $q'=1$, $q_0=2$, $e=3$. Aus der Gleichung $3x-2y=3$ folgen die Werthe $y=3, 6, 9, 12$ u. s. w. Nun ist $\frac{D(q+q_0)-q'}{2q}=6\frac{1}{2}$, die Werthe $y=3$ und $y=6$ sind also nicht zu brauchen, der erste brauchbare Werth ist $y=9$, diesem entspricht $A=88$, welches also die kleinste unter den gesuchten Zahlen ist, und es findet sich allgemein:

$$A_h = 88+56h+9h^2,$$

also $A_1=153$, $A_2=236$, $A_3=337$, u. s. w.

17.

Die vorhergehenden Untersuchungen bleiben ungeändert, wenn man von der Voraussetzung ausgeht, dafs die Theilnenner $a_1, a_2, \ldots a_m$ die *sämmtlichen* periodischen Glieder des, der kleinsten Zahl A entsprechenden Kettenbruchs sind, und der folgende Theilnenner das *Mittelglied* ist. Es lassen sich noch immer die folgenden Zahlen nach dem so eben erörterten Verfahren finden, jedoch wird keinesweges auch bei allen diesen die *vollständige* Reihe der periodischen Glieder nur aus den Theilnennern $a_1, a_2, \ldots a_m$ bestehen; noch wird nothwendig ein Mittelglied in deren Periode vorkommen. So z. B. sind für die Zahl 88 die Theilnenner 2, 1, die einzigen periodischen Glieder und der folgende Theilnenner ist das Mittelglied. Für die folgende Zahl 153 dagegen findet man die periodischen Glieder 2, 1, 2; für 236 kommen fünf periodische Glieder vor und in der zur Zahl 337 gehörenden Periode kommt gar kein Mittelglied vor.

Es soll nun aber die Frage gelöset werden: wie kann man aus einer Zahl A, deren entsprechender Kettenbruch das Anfangsglied a und die periodischen Glieder $a_1, a_2, \ldots a_m$ hat, auf welche ein *Mittelglied* folgt, dessen zugehörender vollständiger Quotient den Nenner D hat, alle übrigen Zahlen, *und nur diese*, ableiten, deren entsprechende Kettenbrüche dieselben periodischen Glieder und ein darauf folgendes Mittelglied, dessen zugehörender vollständiger Quotient ebenfalls den Nenner D hat, enthalten?

18.

Zur Beantwortung dieser Frage wird es nöthig sein, Folgendes vorauszuschicken. Ich werde zur Abkürzung den Nenner eines zu einem Mittel-

gliede gehörenden vollständigen Quotienten, durch den Ausdruck *mittlerer* Nenner bezeichnen. Nun wurde früher gezeigt (§. 2.), dafs, wenn auf die Theilnenner a, a_1, ... a_m das Mittelglied k folgt, immer $2p$ durch den mittleren Nenner D theilbar ist. Diesen Satz kann man aber auch umkehren. Wenn nemlich die Entwickelung des, einer Zahl A entsprechenden Kettenbruchs mit den Theilnennern a, a_1, ... a_m beginnt und es ist $2p$ durch den Nenner D des vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$, welcher zu dem nächstfolgenden Theilnenner gehört, theilbar, so mufs D der mittlere Nenner sein. Es wird hierbei vorausgesetzt, dafs $D > 1$ ist.

Zunächst folgt nemlich aus den zwei Gleichungen

$$(65.) \qquad \pm J = Aqq_0 - pp_0,$$

$$(66.) \qquad \pm D = p^2 - Aq^2,$$

dafs auch $2J$ durch D theilbar ist, sobald $2p$, und mithin nach (66.) auch $2A$, durch D theilbar ist. Setzt man nun

$$\frac{p^2+Aq^2}{D} = x'; \qquad \frac{2pq}{D} = y',$$

so ergiebt sich von selbst, dafs y' eine *ganze* Zahl ist. Ferner findet man

$$(67.) \qquad x'^2 - Ay'^2 = 1,$$

also ist auch x' eine ganze Zahl. Bildet man nun den Kettenbruch, dessen Theilnenner

$$(68.) \qquad a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m,\ \frac{2J}{D},\ a_m,\ \ldots\ a_1$$

sind, so findet man, mit Berücksichtigung der Werthe von J und D, dafs x' der Zähler, y' der Nenner des reducirten Werths dieses Kettenbruchs ist. Demnach mufs, wie bekannt, die Reihe (68.) jedenfalls der Anfang der Entwickelung des Kettenbruchs sein, welcher der Zahl A entspricht. Hätte nun die Periode dieses Kettenbruchs kein Mittelglied, so müfste die Reihe (68.) zwei (oder allgemeiner eine *gerade* Anzahl) Perioden haben (vergl. §. 1.), es müfste also $\frac{2J}{D} = 2a$ sein, was unmöglich ist, da $D > 1$ und J höchstens $= a$ sein kann. Die Periode mufs also ein Mittelglied haben, und die Reihe (68.) mufs eine (oder allgemeiner eine *ungerade* Anzahl) Perioden enthalten, d. h. $\frac{2J}{D}$ wird das Mittelglied sein. Es ist mithin bewiesen, dafs der auf a_m folgende Theilnenner das Mittelglied, also D der mittlere Nenner ist.

Als besonderer Fall folgt hieraus, dafs der Nenner D immer der *mittlere* sein mufs, wenn er $= 2$ ist; auch kann kein Nenner eines vollständigen Quotienten $= 2$ sein, sobald die Periode kein Mittelglied hat.

19.

Da am Schlusse des (§. 17.) angenommen wurde, dafs das Anfangsglied des, der Zahl A entsprechenden Kettenbruchs $= a$ ist, so folgt jedenfalls aus (§. 16.), dafs bei *allen* Zahlen, deren entsprechende Kettenbrüche dieselben, auf das Anfangsglied folgende Theilnenner und denselben Nenner D im nächstfolgenden vollständigen Quotienten haben, das Anfangsglied die Form $a \pm qh$ oder $a \pm \frac{1}{2}qh$ haben mufs. Da nun die Zahl A so beschaffen sein soll, dafs auf a_m das Mittelglied folgt, so ist $2p = 2(aq + q')$ durch D theilbar. Bei allen übrigen Zahlen, bei welchen auf a_m das Mittelglied folgen soll, mufs mithin $2[(a \pm qh)q + q']$ oder $2[(a \pm \frac{1}{2}qh)q + q']$ durch D theilbar sein; es mufs folglich auch $2q^2h$ oder q^2h durch D theilbar sein, je nachdem q ungerade oder gerade ist. Ist nun D eine ungerade Zahl, so kann q^2 keinen gemeinschaftlichen Factor mit D haben, da p und q keinen solchen haben, also mufs h durch D theilbar sein. Setzt man daher Dh statt h, so folgt, dafs in diesem Falle die allgemeine Form des Anfangsgliedes $a \pm Dqh$ oder $a \pm \frac{1}{2}D.qh$ sein wird. Ist D eine gerade Zahl $= 2^n b$ und b ungerade, so ist p durch $2^{n-1}b$ theilbar, also kann q^2 keinen gemeinschaftlichen Factor mit $2^{n-1}b$ haben. In diesem Falle mufs aber p gerade und q ungerade sein, da im entgegengesetzten Falle die Gleichung $p^2 - Aq^2 = \pm D$ nicht bestehen könnte; also mufs $2h$ durch D theilbar sein. Setzt man daher $\frac{1}{2}D.h$ statt h, so wird die allgemeine Form des Anfangsgliedes $a \pm \frac{1}{2}D.qh$ sein.

Hat nun aber das Anfangsglied wirklich eine der so eben bestimmten Formen, so ist jeder der Ausdrücke $2[(a \pm Dqh)q + q']$ und $2[(a \pm \frac{1}{2}D.qh)q + q']$ durch D theilbar, also mufs auch das auf a_m folgende Glied das Mittelglied sein. Nimmt man nun an, dafs die Zahl A, für welche das Anfangsglied des entsprechenden Kettenbruchs $= a$ gesetzt wurde, die kleinste ist, bei welcher auf die periodischen Glieder $a_1, \ldots a_m$ das Mittelglied mit dem mittleren Nenner D folgt, so wird für die $h$te nachfolgende Zahl dieser Art, welche nun A_h heifsen soll, das Anfangsglied $= a + Dqh$ oder $= a + \frac{1}{2}D.qh$ sein, je nachdem von den Zahlen D und q keine oder eine gerade ist. Man hat daher, je nachdem der erste oder der zweite Fall Statt findet:

$$(69.)\quad A_h = (a+Dqh)^2 + \frac{2(a+Dqh)qq'+q'^2\mp D}{q^2} = A+2pDh+D^2q^2h^2,$$

$$(70.)\quad A_h = (a+\tfrac{1}{2}D.qh)^2 + \frac{2(a+\tfrac{1}{2}D.qh)qq'+q'^2\mp D}{q^2} = A+pDh+\tfrac{1}{4}D^2q^2h^2,$$

wo h jede ganze positive Zahl bedeutet.

In dem besonderen Falle $D=2$ geht die Formel (70.) in (63.) über; wie dies auch nach der Bemerkung am Schlusse des vorhergehenden Paragraphs nothwendig sein mufs.

20.

Ich werde mich von nun an, zur Abkürzung, folgender Bezeichnung bedienen.

Wenn der, einer Zahl entsprechende Kettenbruch die periodischen Glieder $a_1, a_2, \ldots a_m$ und den mittleren Nenner D hat, so soll Dies dadurch ausgedrückt werden, dafs ich sage es entspricht dieser Zahl das Schema

$$(71.)\quad a_1, a_2, \ldots a_m, (D).$$

Die kleinste Zahl in der Zahlenreihe, welcher ein gewisses Schema entspricht, soll die *Stammzahl* der Reihe heifsen.

Es ist nun leicht, sobald man weifs, dafs das Schema (71.) einer Zahlenreihe entspricht, die Stammzahl zu finden, da es nur darauf ankommt das Anfangsglied a des derselben entsprechenden Kettenbruchs zu bestimmen. Es mufs zunächst a einer der Werthe von y sein, welche der Gleichung (60.) genügen und zugleich gröfser als $\frac{D(q+q_0)-q'}{2q}$, oder diesem Ausdrucke gleich (§. 16.). Ist α der kleinste Werth von y, welcher dieser Bedingung entspricht, und ist zugleich $2(\alpha q+q')$ durch D theilbar, so hat man $a=\alpha$. Ist dagegen $2(\alpha q+q')$ nicht durch D theilbar, so mufs a in der Form $\alpha+qh$ oder $\alpha=\frac{1}{2}q.h$ enthalten sein. Aufserdem mufs aber a der Bedingung Genüge leisten, dafs $2(aq+q')$ durch D theilbar ist. Bezeichnet man daher durch z eine *ganze* Zahl, so mufs man noch die Gleichung $2(\alpha+qh)q+2q'=Dz$ oder $2(\alpha+\frac{1}{2}q.h)q+2q'=Dz$, d. h. die Gleichung $Dz-2q^2h=2(q'+\alpha q)$ oder $Dz-q^2h=2(q'+\alpha q)$ auflösen, wo h und z die Unbekannten sind. Nimmt man den kleinsten positiven Werth von h, welcher der einen oder der anderen dieser Gleichungen (die immer auflösbar sind, da D und q keinen gemeinschaftlichen Factor haben) entspricht und substituirt ihn bezüglich in den Werth $\alpha+qh$ oder $\alpha+\frac{1}{2}q.h$, so hat man den gesuchten Werth von a und findet dann A aus (69.) oder (70.), indem man h in diesen Formeln $=0$ setzt.

Man weifs z. B., dafs es eine Zahlenreihe giebt, welcher das Schema

1, 1, (3)

entspricht. Hier ist $q=2$, $q'=1$, $q^0=1$, $D=3$. Die Gleichung (60.) wird zu $x-y=1$, also ist $y=1+h$. Nun ist $\frac{D(q+q^0)-q'}{2q}=2$, also $\alpha=2$ und $a=2+h$. Die Gleichung $3z-4h=10$ giebt als kleinsten Werth von h die Zahl 2, mithin ist $a=4$ und die Stammzahl $=21$.

Sobald man das Anfangsglied a, die periodischen Glieder $a_1, a_2, \ldots a_m$ und den mittleren Nenner D für die Stammzahl kennt, ist auch das Mittelglied k bekannt. Denn nach (17.) hat man

$$k = \frac{2p}{qD} - \frac{2q_0}{q}, \quad \text{d. h.}$$

$$k = \frac{2(aq+q')}{qD} - \frac{2q_0}{q}.$$

Bezeichnet man daher durch l den Werth D oder den Werth $\frac{1}{2}D$, je nachdem keine oder eine der Zahlen D und q gerade ist, so gehört zu der Zahl A_h das Anfangsglied $a+lqh$. Nennt man das zu dieser Zahl gehörende Mittelglied k_h, so erhält man

$$k_h = \frac{2[(a+lqh)q+q']}{qD} - \frac{2q^0}{q},$$

oder $k_h = k + \frac{2lqh}{D}$, d. h. es ist $k_h = k+2qh$ oder $k_h = k+qh$, je nachdem keine oder eine der Zahlen D und q gerade ist. Die Mittelglieder, welche zu den aufeinander folgenden Zahlen A_h gehören, bilden also eine *arithmetische Reihe erster Ordnung*.

21.

Es ergiebt sich nun von selbst, wie die vorstehenden Betrachtungen zur Abkürzung der Berechnung einer *Pell*'schen Tafel benutzt werden können. Sobald man für die Stammzahl das Anfangsglied, die periodischen Glieder und den mittleren Nenner kennt, findet man aus (69. und 70.) die Zahlenreihe, welcher dieselben periodischen Glieder und derselbe Nenner D zukommen. Da diese Zahlenreihe eine arithmetische Reihe *zweiter* Ordnung ist, so braucht man nur die zwei ersten auf die Stammzahl folgenden Zahlen direct zu berechnen. Nun ist aufserdem für alle Zahlen dieser Reihe das Anfangsglied, und, wie im vorhergehenden Paragraph gezeigt, auch das Mittelglied bekannt, man kennt also den entsprechenden Kettenbruch vollständig.

Zwischen den Stammzahlen und den Grundzahlen (§. 7. etc.) finden verschiedene Analogieen Statt. Eine jede Stammzahl ist nicht blofs der Anfang einer *einzigen* Zahlenreihe, sondern ***unzählig vieler,*** mit der Eigenschaft, dafs die in jeder Reihe enthaltenen Zahlen dieselben periodischen Glieder und denselben mittleren Nenner haben; und es ist überhaupt jede ganze Zahl, deren entsprechender Kettenbruch ein Mittelglied hat, die Stammzahl für unzählig viele Zahlenreihen.

Ist z. B. die Zahl A die Stammzahl der Zahlenreihe, welcher das Schema (71.) entspricht, und ist a das Anfangsglied des der Zahl A entsprechenden Kettenbruchs, k das Mittelglied, so kann man die Zahl A auch als eine solche ansehen, welcher das Schema

(72.) $\quad a_1, a_2, \ldots a_m, k, a_m, \ldots a_2, a_1, 2a, a_1, \ldots a_m, \quad (D)$

zukommt. Zugleich mufs die Zahl A die Stammzahl der Zahlenreihe sein, welcher dieses Schema entspricht. Gäbe es nemlich eine kleinere Zahl in dieser Reihe und wäre b das Anfangsglied des ihr entsprechenden Kettenbruchs, so hätte man $b < a$, also könnte nicht $2a$ unter den Theilnennern vorkommen. Man kann mithin aus der Stammzahl A die ganze Zahlenreihe berechnen, welcher das Schema (72.) zukommt, und es soll auch hier wieder diese Zahlenreihe die ***zweiperiodische*** heifsen, im Gegensatze zu der Zahlenreihe, welcher das Schema (71.) entspricht. Man sieht, wie auf ähnliche Weise die Zahl A auch die Stammzahl einer *dreiperiodischen* Zahlenreihe, u. s. w. ist. Auch bedarf es keines weitern Beweises, dafs *jede* Zahl aus irgend einer dieser Zahlenreihen als Stammzahl unzählig vieler Reihen angesehen werden kann, da sich die auf die Grundzahlen beziehenden Betrachtungen in (§. 10.) hier ungeändert wiederholen.

Es wurde z. B. gefunden, dafs 21 die Stammzahl der Zahlen ist, zu welchen das Schema 1, 1, (3) gehört. Da das Anfangsglied für diese Zahl $= 4$ und das Mittelglied $= 2$ ist, so ist sie auch die Stammzahl der zweiperiodischen Zahlenreihe, zu welcher das Schema 1, 1, 2, 1, 1, 8, 1, 1, (3) gehört. Hier ist $q = 218$, $q' = 127$. Berechnet man nach (70.) die nächst folgende Zahl, so findet man 109947.

Es ergiebt sich aus diesen Betrachtungen zugleich, dafs die Anzahl der Stammzahlen unendlich grofs ist.

Unter der Voraussetzung, dafs sich das Schema (71.) nicht wieder auf ein einfacheres zurückführen läfst, wie (72.) auf (71.), soll die Stammzahl, welcher das Schema (71.) zukommt, die ***Urstammzahl*** heifsen.

22.

Wenn es eine Zahlenreihe giebt, in deren entsprechenden Kettenbrüchen die Theilnenner $a_1, a_2, \ldots a_m$ auf das Anfangsglied folgen, während zugleich der Nenner des nächstfolgenden Quotienten $= D$ ist, so giebt es auch eine Zahlenreihe, welcher das Schema $a_1, a_2, \ldots a_m, (D)$ zukommt. Aus der Voraussetzung folgt nemlich nach (§. 16.), dafs $\frac{q'^2 \mp D}{q}$ eine ganze Zahl (oder Null) ist. Nun haben q und q' keinen gemeinschaftlichen Factor, also können auch D und q keinen solchen Factor haben. Ist nun A die kleinste Zahl aus der ersten Zahlenreihe und a das Anfangsglied des ihr entsprechenden Kettenbruchs, so ist, wie dort bewiesen, für die Zahl A_h das Anfangsglied des ihr entsprechenden Kettenbruchs $a + Qh$, wo Q den Werth q oder $\frac{1}{2}q$ bedeutet, je nachdem q eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Soll nun A_h eine Zahl sein, für welche D der *mittlere* Nenner ist, so ist es nothwendig und hinreichend, dafs $2[(a+Qh)q+q']$, durch D dividirt, eine ganze Zahl giebt, die z heifsen mag. Man hat also, je nachdem q ungerade oder gerade ist, die Gleichung $Dz - 2q^2h = 2(aq+q')$, oder die Gleichung $Dz - q^2h = 2(aq+q')$ zu lösen, wo z und h die Unbekannten sind. Diese Gleichungen können immer aufgelöset werden, da D und q keinen gemeinschaftlichen Factor haben; und für jeden Werth von h, welcher ihnen genügt, ist das entsprechende A_h eine der gesuchten Zahlen. Der kleinste unter diesen Werthen von h giebt mithin die Stammzahl der Reihe, welcher das Schema $a_1, a_2, \ldots a_m, (D)$ zukommt.

Die Frage, ob ein gegebenes Schema $a_1, a_2, \ldots a_m, (D)$ einer Zahlenreihe entspricht oder nicht, kommt also auf die einfachere Frage zurück, ob es eine Zahlenreihe giebt, bei welcher auf das Anfangsglied des entsprechenden Kettenbruchs die Theilnenner $a_1, a_2, \ldots a_m$ folgen, während der Nenner des nächstfolgenden vollständigen Quotienten $= D$ ist. Soll dies der Fall sein, so mufs *erstens*, wie schon bemerkt $\frac{q'^2 \mp D}{q}$ eine ganze Zahl (oder Null) sein. Wird diese Bedingung erfüllt und bezeichnet man die ganze Zahl durch e, so mufs *zweitens*, die Gleichung $qx - 2q'y = e$ in ganzen Zahlen aufgelöset werden können; es mufs also q entweder eine ungerade Zahl sein, oder q und e müssen beide gerade Zahlen sein. Wird auch diese Bedingung erfüllt, so ist die verlangte Zahlenreihe vorhanden. Ist nemlich α ein Werth von y, welcher der erwähnten Gleichung genügt, so ist $A = \alpha^2 + \frac{2\alpha q q' + q'^2 \mp D}{q^2}$

eine ganze Zahl, und $(\alpha q+q')^2 - Aq^2 = \pm D$. Giebt man dann dem α einen Werth, welcher der Bedingung $\alpha \gtreqless \frac{D(q+q_0)-q'}{2q}$ genügt, so gehört die entsprechende Zahl A zu der gesuchten Zahlenreihe; wie es aus (§. 16.) erhellet.

Es ergiebt sich hieraus noch Folgendes. Bezeichnet $\frac{p}{q}$ den Werth des Kettenbruchs dessen Theilnenner $a, a_1, \ldots a_m$ sind, $\frac{p_0}{q_0}$ den vorhergehenden Näherungswerth, und man setzt $p = aq+q'$, so mufs $\frac{p}{q}$ ein Näherungswerth von $\sqrt{A}$ sein, sobald die Gleichung $p^2 - Aq^2 = \pm D$ Statt hat, und $D \lesseqgtr \frac{2aq+q'}{q+q_0}$ ist. Dagegen kann $\frac{p}{q}$ kein solcher Näherungswerth sein, wenn $D > \frac{2aq+q'}{q+q_0}$ ist. Aus der Gleichung $p^2 - Aq^2 = \pm D$ folgt nemlich, dafs $\frac{q'^2 \mp D}{q}$ eine ganze Zahl $= e$ ist, und dafs a ein Werth von y ist, welcher der Gleichung $qx - 2q'y = e$ genügt. Ist nun noch $D \lesseqgtr \frac{2aq+q'}{q+q_0}$, also $a \lesseqgtr \frac{D(q+q_0)-q'}{2q}$, so sind alle Bedingungen erfüllt, damit die Entwickelung von $\sqrt{A}$ mit den Theilnennern $a, a_1, \ldots a_m$ beginne. Es erhellet hieraus, dafs in der Entwickelung von $\sqrt{A}$ kein Nenner eines vollständigen Quotienten gröfser sein kann, als der ihm entsprechende Werth von $\frac{2aq+q'}{q+q_0}$, und dafs D sich unter den Nennern der vollständigen Quotienten finden mufs, wenn die Gleichung $p^2 - Aq^2 = \pm D$ Statt haben soll und $D \lesseqgtr \frac{2aq+q'}{q+q_0}$ ist.

Ein specieller Fall ist der bekannte Satz, dafs $\frac{p}{q}$ ein Näherungswerth von $\sqrt{A}$ ist, sobald $p^2 - Aq^2 = \pm D$ und $D < \sqrt{A}$, d. h. also $D \lesseqgtr a$ ist, denn in diesem Falle ist immer $D < \frac{2aq+q'}{q+q_0}$, da $q_0 < q$.

23.

Mit Hülfe der vorhergehenden Bemerkungen wird es nun auch leicht sein, folgenden Satz zu beweisen, aus welchem sich wieder eine Abkürzung der Berechnung einer *Pell*'schen Tafel ergiebt.

Wenn es eine Stammzahl giebt, welcher das Schema

$$(71.) \qquad a_1, a_2, \ldots a_m, (D)$$

zukommt, und es ist $a_1 > 1$, so giebt es, wenn $a_m > 1$, eine andere

Stammzahl, welcher das Schema

$$(73.) \quad 1,\ a_1-1,\ a_2,\ \ldots\ a_{m-1},\ a_m-1,\ 1,\ (D)$$

entspricht. Ist aber $a_m = 1$, so giebt es eine andere Stammzahl, welcher das Schema

$$(74.) \quad 1,\ a_1-1,\ a_2,\ \ldots\ a_{m-2},\ a_{m-1}+1,\ (D)$$

zukommt. In beiden Fällen folgt auch umgekehrt aus dem Vorhandensein einer Stammzahl, welcher das Schema (73.) oder (74.) zukommt, dafs es eine Stammzahl mit dem Schema (71.) giebt.

Man bezeichne durch Q den Zähler, durch Q' den Nenner des reducirten Werths des Kettenbruchs, dessen Theilnenner entweder

$$1,\ a_1-1,\ a_2,\ \ldots\ a_{m-1},\ a_m-1,\ 1$$

sein sollen, wenn nemlich $a_m > 1$, oder, wenn $a_m = 1$,

$$1,\ a_1-1,\ a_2,\ \ldots\ a_{m-2},\ a_{m-1}+1.$$

In beiden Fällen ist $Q = q$ und $Q' = q - q'$, mithin ist

$$\frac{Q'^2 \mp D}{Q} = q - 2q' + \frac{q'^2 \mp D}{q}.$$

Nun ist nach der Voraussetzung $\frac{q'^2 \mp D}{q}$ eine ganze Zahl, also auch $\frac{Q'^2 \mp D}{Q}$. Man setze daher diesen letzten Ausdruck $= E$. Ferner mufs (§. 22.) entweder q ungerade sein, also auch Q, oder q und e müssen beide gerade sein; im zweiten Falle mufs q' ungerade sein, also auch Q', dagegen ist Q gerade und eben so $E = q - 2q' + e$. Das Schema (73.) oder (74.) kommt also jedenfalls einer Zahlenreihe zu, wenn das Schema (71.) einer solchen zukommt, und umgekehrt. Eigentlich ist, wie man sieht, hierdurch folgender Satz bewiesen:

Wenn es eine Zahlenreihe giebt, in welcher auf das Anfangsglied des entsprechenden Kettenbruchs, die Theilnenner $a_1, a_2, \ldots a_m$ folgen und es ist zugleich der Nenner des nächstfolgenden vollständigen Quotienten $= D$, während $a_1 > 1$ ist, so giebt es, wenn $a_m > 1$ ist, eine zweite Zahlenreihe, in welcher auf das Anfangsglied des entsprechenden Kettenbruchs die Theilnenner $1, a_1-1, a_2, \ldots a_m-1, 1$ folgen, während zugleich der Nenner des nächstfolgenden vollständigen Quotienten $= D$ ist. Ist aber $a_m = 1$, so giebt es eine zweite Zahlenreihe, in welcher auf das Anfangsglied des entsprechen-

den Kettenbruchs die Theilnenner $1, a_1-1, a_2, \ldots a_{m-2}, a_{m-1}+1$ folgen, während der Nenner des nächstfolgenden vollständigen Quotienten $=D$ ist.

Man nehme nun an, dafs für die *Stammzahl* der Zahlenreihe, welcher das Schema (71.) zukommt, das Anfangsglied des entsprechenden Kettenbruchs a sei, bei der *Stammzahl* der Zahlenreihe, welcher das Schema (73.) oder (74.) entspricht, sei das Anfangsglied b. Mithin ist a ein Werth von y, welcher der Gleichung $qx-2q'y=e$ genügt, d. h. es giebt eine ganze Zahl g, welche durch die Gleichung

$$g = \frac{e+2aq'}{q}$$

bestimmt wird. Aus demselben Grunde mufs es aber auch eine ganze Zahl G geben, welche durch die Gleichung

$$G = \frac{E+2bQ'}{Q} = 1+2b+\frac{e-2(b+1)q'}{q}$$

bestimmt wird. Damit dieser Ausdruck wirklich eine ganze Zahl gebe, ist es demnach nothwendig und hinreichend, dafs, je nachdem q ungerade oder gerade ist, die Zahl b in der Form $qh-a-1$ oder in der Form $\frac{1}{2}q.h-a-1$ enthalten sei, wo h irgend eine ganze Zahl bedeutet. Da aber D der mittlere Nenner ist, so mufs $2(bQ+Q')=2(bq+q-q')$ durch D theilbar sein, d. h.: je nachdem q ungerade oder gerade ist, mufs $2[hq^2-aq-q']$ oder $2[\frac{1}{2}hq^2-aq-q']$ durch D theilbar sein. Da nun schon $2(aq+q')$ nach der Voraussetzung durch D theilbar ist, so mufs mithin auch $2hq^2$ oder hq^2 durch D theilbar sein. Es mufs daher, wie in (§. 19.) bewiesen, statt h entweder Dh oder $\frac{1}{2}D.h$ gesetzt werden, je nachdem keine oder eine der Zahlen D und q gerade ist. Im ersten Falle ist b in der Form $Dqh-a-1$, im zweiten in der Form $\frac{1}{2}D.qh-a-1$ enthalten. Es ist mithin nur noch der Werth von h genauer zu bestimmen. Da b zu der Stammzahl gehören soll, so ist offenbar für h der kleinste Werth zu nehmen, für welchen $Dqh-a-1$ oder $\frac{1}{2}D.qh-a-1$ eine ganze positive Zahl ist, und zugleich in dem einen oder dem anderen Falle entweder $Dqh-a-1$ oder $\frac{1}{2}D.qh-a-1$ gröfser als $\frac{D(Q+Q_0)-Q'}{2Q}$ oder diesem Ausdrucke gleich ist, wo Q_0 den Zähler des Kettenbruchs bedeutet, dessen Theilnenner $1, a_1-1, a_2, \ldots a_m-1$ oder $1, a_1-1, a_2, \ldots a_{m-2}$ sind, je nachdem $a_m>1$ oder $=1$ ist. In jedem Falle ist $Q_0=q-q_0$ und die letztere Bedingung heifst demnach, dafs $Dqh-a-1$ oder $\frac{1}{2}D.qh-a-1$ gröfser als oder gleich $\frac{D(2q-q_0)-(q-q')}{2q}$ sein mufs.

Es sei h' der Werth von h, welcher diesen Bedingungen entspricht, so dafs $b = Dqh' - a - 1$ oder $\frac{1}{2}D.qh' - a - 1$ ist. Die Stammzahl, welcher das Schema (73.) oder (74.) entspricht, sei B, während, wie früher, A die Stammzahl, A_h die $h$te darauf folgende Zahl bedeuten soll, welchen das Schema (71.) zukommt. Dann sollen A und B ***conjugirte*** Stammzahlen heifsen und zwar A die ***primäre***, B die ***secundäre***.

Man hat mithin, je nachdem keine oder eine der Zahlen D und q ***gerade*** ist:

$$B = (DQh' - a - 1)^2 + \frac{2(DQh' - a - 1)QQ' + Q'^2 \mp D}{Q^2} \text{ oder}$$

$$B = (\tfrac{1}{2}D.Qh' - a - 1)^2 + \frac{2(\tfrac{1}{2}D.Qh' - a - 1)QQ' + Q'^2 \mp D}{Q^2},$$

d. h. mit Rücksicht auf die Werthe $Q = q$ und $Q' = q - q'$:

$$(75.) \qquad B = (a - Dqh')^2 + \frac{2(a - Dqh')qq' + q'^2 \mp D}{q^2}$$

oder

$$(76.) \qquad B = (a - \tfrac{1}{2}D.qh')^2 + \frac{2(a - \tfrac{1}{2}D.qh')qq' + q'^2 \mp D}{q^2}..$$

Bestimmt man aber aus den Formeln (69.) und (70.) den Werth von A_h, so erhält man dieselben Ausdrücke, sobald h' statt $-h'$ gesetzt wird. Die Zahl $A_{h'}$ soll deshalb die ***Adjungirte*** der secundären Stammzahl heifsen. Von der Adjungirten an gerechnet werden also die Zahlen, welchen das Schema (71.) entspricht, durch dieselbe Formel gefunden, wie die Zahlen welchen das Schema (73.) oder (74.) entspricht; letztere von der Stammzahl an gerechnet. Während man nemlich um die $h$te auf $A_{h'}$ folgende Zahl zu finden in (69.) oder (70.) statt h den Werth $h + h'$ zu substituiren hat, findet man aus denselben Formeln die $h$te, auf B folgende Zahl, wenn man $-(h + h')$ statt h setzt.

Die secundäre Stammzahl und ihre Adjungirte sind gerade oder ungerade zugleich.

Aus dem Vergleich der Werthe von A und B ergiebt sich, je nachdem von den Zahlen q und D keine oder eine gerade ist:

$$(77.) \qquad B = A + D^2q^2h' - 2Dph' \text{ oder}$$

$$(78.) \qquad B = A + \tfrac{1}{4}(D^2q^2h'^2) - Dph'.$$

Sind daher D und q beide ungerade, so ist die Differenz der zwei conjugirten Stammzahlen gerade oder ungerade, je nachdem h' gerade oder ungerade ist. Ist dagegen eine der Zahlen D und q gerade, so ist die Differenz der

Stammzahlen gerade, wenn h' gerade ist. Ist h' ungerade und D gerade, so ist die Differenz der Stammzahlen gerade, wenn D durch 4 theilbar ist; im entgegengesetzten Falle ist sie ungerade. Ist h' ungerade und q gerade, so ist p ungerade; die Differenz der Stammzahlen wird also gerade sein, wenn q nicht durch 4 theilbar ist; im entgegengesetzten Falle ist diese Differenz ungerade.

Der im Anfange dieses Paragraphs bewiesene Satz bezieht sich zunächst auf die Voraussetzung, dafs die Zahl der periodischen Glieder, je nachdem das letzte Glied grōfser als die Einheit, oder ihr gleich ist, *mindestens* $=2$ oder $=3$ sein mufs. Sind nur zwei periodische Glieder vorhanden und ist das zweite $=1$, so gilt er mit einer kleinen Modification. Giebt es nemlich eine Stammzahl, welcher das Schema a_1, 1, (D) zukommt und ist $a_1>1$, so giebt es auch eine Stammzahl mit dem Schema 1, a_1, (D). Behält man nemlich die frühere Bezeichnung bei, so ist auch hier $Q=q$; $Q'=q-q'$; $Q_0=q-q_0$. Hat eine Stammzahl das Schema a_1, (D) und ist $a_1>2$, so giebt es eine Stammzahl mit dem Schema 1, a_1-2, 1, (D), denn auch hier ist wieder $Q=q$; $Q_1=q-q'$; $Q_0=q-q_0$. In den noch übrigen Fällen gilt der Satz insofern, als man statt *einer* Periode deren *zwei* nimmt. Der Satz ist z. B. nicht unmittelbar auf die Zahl 6 anwendbar, weil die Periode nur aus dem Mittelgliede 2 besteht. Betrachtet man aber die Zahl 6 als Stammzahl mit dem Schema 2, 4, (2), so ist die Zahl 43 mit dem Schema 1, 1, 3, 1, (2) ihre secundäre Stammzahl. Es sind demnach *mindestens* die *zwei* periodischen Glieder 2, 1, oder das *einzige* $=3$ vorhanden, d. h. es ist mindestens $q=3$.

24.

Die letztere Bemerkung führt zu einer genaueren Bestimmung des Werths von h'.

Man nehme zuerst an, e sei nicht Null, was immer der Fall ist, sobald D keine Quadratzahl ist. Dann sind drei Fälle zu unterscheiden.

Erstens seien q und D beide ungerade. Der kleinste Werth von y, welcher der Gleichung $qx-2q'y=e$ Genüge thut, sei β: Dann sind die Werthe von y überhaupt in der Form $\beta+qh$ enthalten. Aus diesen Werthen mufs der kleinste α genommen werden, welcher der Bedingung $\beta+qh \geqq \frac{D(q+q_0)-q'}{2q}$ genügt; jedenfalls braucht also $\beta+qh$ nicht grōfser als D zu sein. Aber β ist mindestens der Einheit gleich. Setzt man $h=\frac{1}{2}(D-1)$,

so ist $\beta+qh = D+\beta+(q-1)\frac{1}{2}(D-1)-\frac{1}{2}(D+1)$. Nun ist $q-1$ eine gerade Zahl und im ungünstigsten Falle $=2$, aber in diesem Falle wäre, selbst wenn nur $\beta=1$, doch $\beta+D-1-\frac{1}{2}(D+1)$ eine positive Gröfse; um so mehr in allen übrigen Fällen, mithin ist $\beta+qh>D$ und daher keinesfalls α gröfser als $\beta+q\frac{1}{2}(D-1)$. Nun ist $a=\alpha+qh$, wo für h der kleinste (positive) Werth zu nehmen ist, welcher der Gleichung $Dz-2q^2h=2(\alpha q+q')$ genügt; mithin ist h höchstens $=D-1$ und a höchstens $\beta+\frac{3}{2}q(D-1)$. Da nun β höchstens $q-1$ ist, so ist a höchstens $q-1+\frac{3}{2}q(D-1)$. Um b zu haben mufs man $a+1$ von Dqh' abziehen, man hat also höchstens $\frac{3}{2}qD-\frac{1}{2}q$ abzuziehen. Der Werth von h' ist so anzunehmen, dafs b positiv und aufserdem $\geqq \frac{D(2q-q_0)-(q-q')}{2q}$ wird. Der zweiten Bedingung wird genügt, sobald b nicht kleiner als D ist. Man hat also höchstens $h'=2$ zu setzen, denn dann ist $Dqh'-\frac{3}{2}Dq+\frac{1}{2}q=\frac{1}{2}q(D+1)$, also positiv und gröfser als D.

Ist *zweitens* q ungerade und D gerade, so sieht man, mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung, dafs α keinesfalls gröfser als $\beta+q.\frac{1}{2}D$ ist. Nun ist hier $a=\alpha+qh$, wo h den kleinsten Werth bedeutet, welcher der Gleichung $\frac{1}{2}D.z-q^2h=\alpha q+q'$ genügt, also ist h höchstens $\frac{1}{2}D-1$ und a höchstens $q-1+\frac{1}{2}Dq+q(\frac{1}{2}D-1)$. Um b zu finden hat man also höchstens Dq von $\frac{1}{2}Dqh'$ abzuziehen, d. h. es ist höchstens $h'=3$ zu setzen.

Ist *drittens* D ungerade und q gerade, so ist zunächst der kleinste Werth β von y zu suchen, welcher der Gleichung $\frac{1}{2}qx-q'y=\frac{1}{2}e$ Genüge leistet. Die Werthe von y sind nun in der Form $\beta+\frac{1}{2}qh$ enthalten; setzt man $h=\frac{1}{2}(D-1)$, so ist $\beta+\frac{1}{2}q.\frac{1}{2}(D-1)=D+\frac{1}{4}((q-4)D+4\beta-q)$. Nun ist $D\geqq\frac{q-4\beta}{q-4}$, also jedenfalls $\beta+\frac{1}{2}q.\frac{1}{2}(D-1)>D$ und α keinesfalls gröfser als $\beta+\frac{1}{2}q.\frac{1}{2}(D-1)$. Ferner ist $a=\alpha+\frac{1}{2}q.h$, wo h der kleinste Werth ist, welcher der Gleichung $Dz-2q^2h=2(\alpha q+q')$ genügt, also h höchstens $D-1$ und a höchstens $\frac{3}{4}qD+\frac{1}{4}q-1$, also ist mindestens $b=\frac{1}{2}Dqh'-\frac{3}{2}qD-\frac{1}{4}q$ und h' höchstens $=3$.

Ist $e=0$ und D und q ungerade, so ist die Gleichung $qx-2q'y=0$ aufzulösen, also die allgemeine Form des Werths von y in diesem Falle $y=qh$. Setzt man $h=\frac{1}{2}(D-1)$, so ist α nicht gröfser als $q.\frac{1}{2}(D-1)$. Ferner $a=\alpha+qh$, wo h höchstens $=D-1$ ist, also a höchstens $\frac{3}{2}qD-\frac{3}{2}q$ und b mindestens $Dqh'-\frac{3}{2}qD+\frac{3}{2}q-1$, also höchstens $h'=2$. Ist D gerade und q ungerade, so findet man, dafs mindestens $b=\frac{1}{2}qDh'-qD+q-1$ ist,

also höchstens $h' = 3$. Ist D ungerade und q gerade, so ist $\frac{1}{2}q \cdot \frac{1}{2}(D+1)$ gröfser als D, mithin α nicht gröfser als $\frac{1}{2}q \cdot \frac{1}{2}(D+1)$, woraus folgt, dafs b mindestens $= \frac{1}{2}Dqh' - \frac{3}{4}qD + \frac{1}{4}q - 1$, also höchstens $h' = 2$ ist.

Es ergiebt sich hieraus als allgemeines Resultat, dafs *spätestens* die *dritte* auf die primäre Stammzahl folgende Zahl die *Adjungirte* der secundären Stammzahl ist.

25.

Eine besondere Beachtung verdient der Fall für $D = 2$. Der im Anfang von (§. 23.) bewiesene Satz nimmt dann noch eine andere Form an. In (§. 3.) wurde nemlich angemerkt, dafs in diesem Falle der mittlere Theilnenner k entweder $= a$ oder $= a-1$ ist, je nachdem $A - a$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Ferner wurde dort bewiesen, dafs überhaupt, wenn $k = \frac{2a}{D}$ ist, der letzte periodische Theilnenner nicht kleiner als D sein kann, dafs dagegen, wenn $k = \frac{2a}{D} - 1$ ist, dieser periodische Theilnenner der Einheit gleich sein mufs. Ist also $D = 2$, so heifst dies: der letzte periodische Theilnenner wird gröfser als die Einheit oder ihr gleich sein, je nachdem $k = a$ oder $k = a-1$, d. h. je nachdem $A - a$ gerade oder ungerade ist. Auf diesen Fall angewandt heifst mithin der erwähnte Satz wie folgt:

Wenn es eine Stammzahl A giebt, welcher das Schema

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m,\ (2)$$

zukommt, während das Anfangsglied $= a$ ist, und es ist $a_1 > 1$, so giebt es eine andere Stammzahl, welcher das Schema

$$1,\ a_1 - 1,\ a_2,\ \ldots\ a_m - 1,\ 1,\ (2)$$

oder das Schema

$$1,\ a_1 - 1,\ a_2,\ \ldots\ a_{m-2},\ a_{m-1} + 1,\ (2)$$

zukommt, je nachdem $A - a$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

In Beziehung auf den Werth von h' ist in diesem Falle Folgendes zu bemerken.

Ist $k = a$, also $k = \frac{2a}{D}$, so ist, wie in (§. 3.) bewiesen, $2q^0 = q'$ und mithin $\frac{2(q+q^0)-q'}{2q} = 1$; der kleinste Werth von y, welcher der Gleichung $qx - 2q'y = e$ genügt, ist also hier der Werth von a und daher a höchstens $q-1$ und b mindestens $qh' - (q-1)$. Ferner ist $\frac{2(2q-q_0)-(q-q')}{2q} = \frac{3}{2}$.

Ist aber γ der kleinste Werth von y, welcher der Gleichung $qx-2(q-q')y=E$ genügt, so ist b der kleinste in der Form $\gamma+qh$ enthaltene Werth, welcher gröfser als $\frac{3}{2}$ ist, b braucht daher, um dieser letzten Bedingung zu genügen, nicht gröfser als 2 zu sein. Auch kann b kein Vielfaches von q sein, mithin kann a nicht $=q-1$ sein, oder der höchste Werth, den a haben kann, ist $q-2$. Ist nun A und mithin auch a gerade, so ist a höchstens $q-3$, mithin b mindestens $qh'-(q-2)$. Man braucht daher nur $h'=1$ zu setzen, was $b=2$ giebt. Ist A und mithin auch a ungerade, so mufs q' gerade sein, da p und q, wie in (§. 3.) bemerkt, ungerade sind, also mufs auch $E=\frac{(q-q')^2\mp 2}{q}$ ungerade sein. Wäre nun $a=q-2$, so wäre $b=(h'-1)q+1$, also müfste $\gamma=1$ sein. Der zu $y=1$ gehörende Werth von x, welcher der Gleichung $qx-2(q-q')y=E$ genügen sollte, müfste ebenfalls ungerade sein. Wäre nun $x=1$, so hätte man $2q'-q=E$; was nicht sein kann, da E positiv, während $q>a_1q'$, d. h. $q>2q'$, also $2q'-q$ negativ ist; wäre $x=3$, so hätte man $q+2q'=\frac{(q-q')^2\mp 2}{q}$, d. h. $4qq'=q'^2\mp 2$, was ebenfalls nicht sein kann. Da es nun noch weniger statthaft ist, gröfsere Werthe für x anzunehmen, so folgt, dafs γ nicht kleiner als 2, mithin a höchstens $q-3$ sein kann; demnach ist b mindestens $qh'-q+2$ und man mufs daher wieder $h'=1$ setzen.

Ist $k=a-1$, so ist nach (§. 3.) $q=2q^0-q'$, mithin $\frac{2(2q-q_0)-(q-q')}{2q}=1$; der kleinste Werth von y, welcher der Gleichung $qx-2(q-q')y=E$ genügt, ist also der Werth von b, mithin kann b höchstens $q-1$ sein, dann wäre aber $a=qh'-(b+1)$, d. h. a ein Vielfaches von q; was nicht sein kann, also ist b höchstens $q-2$. Nun ist $\frac{2(q+q_0)-q'}{2q}=\frac{3}{2}$, die Bedingung $a\gtreqless\frac{2(q+q_0)-q'}{2q}$ ist also erfüllt, sobald $a=2$.

Ist mithin A ***ungerade***, also a gerade, so kann allerdings $b=q-2$ und daher $q-(b+1)=1$ sein. Da nun a mindestens $=2$ sein mufs, so mufs man $h'=2$ setzen und hat daher in diesem Falle $a=q+1$. Dieser Fall tritt also dann ein, wenn der kleinste Werth von y, welcher der Gleichung $qx-2q'y=e$ genügt, der Einheit gleich ist. Nun mufs aber der entsprechende Werth von x ungerade sein, da p und q und mithin auch q' und e ungerade sind. Auch kann x nur der Einheit gleich sein. Wäre $x=3$, so hätte man $3q-2q'=\frac{q'^2\mp 2}{q}$, d. h. $3q^2-2qq'=q'^2\mp 2$. Es ist aber

$3q^2 - 2qq' > q^2$ und $q > 2q'$; diese Gleichung kann daher nicht Statt finden, und noch weniger können gröfsere Werthe für x gesetzt werden. Der Fall $h' = 2$ kann also nur dann eintreten, wenn $q - 2q' = \frac{q'^2 \mp 2}{q}$ ist, d. h. $(q - q')^2 = 2(q'^2 \mp 1)$; mit andern Worten: $Q'^2 = 2(q'^2 \mp 1)$. Nun ist $q > a_1 q'$. Diese Bedingungsgleichung kann also nur Statt finden, wenn $a_1 = 2$ ist. Setzt man daher $q = 2q' + q''$, so ist $(q' + q'')^2 = 2(q'^2 \mp 1)$ oder $(q' - q'')^2 = 2(q''^2 \pm 1)$; hieraus folgt wieder $q' = 2q'' + q'''$ und $(q'' - q''')^2 = 2(q'''^2 \mp 1)$. Man sieht also, indem man diese Betrachtung fortsetzt, dafs man auf eine Zahlenreihe $q, q', q'', \ldots$ kommt, in welcher allgemein $q_s = 2q_{s+1} + q_{s+2}$ ist; zuletzt mufs demnach $q_{s+1} = 1$, $q_{s+2} = 1$ sein, und $(q_s - q_{s+1})^2 = 2(q_{s+1}^2 + 1)$. Soll also $h' = 2$ sein, so mufs der Kettenbruch, welcher der Zahl A entspricht, so beschaffen sein, dafs das letzte periodische Glied $= 1$, alle vorhergehenden aber $= 2$ sind. Umgekehrt läfst sich nachweisen, dafs jeder Kettenbruch dieser Art einer Stammzahl entspricht, und dafs dann $h' = 2$ zu setzen ist. Dafs dies bei dem Schema 2, 2, 1, (2) wirklich der Fall ist, läfst sich unmittelbar nachweisen, die Stammzahl ist > 1. Ist es aber bei einem Schema dieser Art, welches n periodische Theilnenner, die $= 2$ sind, enthält, der Fall, so mufs es auch so sein, wenn das Schema $n + 1$ solcher Theilnenner enthält. Behalten nemlich für das letztere Schema die Buchstaben q, q', q'' ihre frühere Bedeutung, so ist, nach der Voraussetzung, $(q' - q'')^2 = 2(q''^2 \pm 1)$ und zugleich $q = 2q' + q''$, mithin auch $(q - q')^2 = 2(q'^2 \mp 1)$ und $q - 2q' = \frac{q'^2 \mp 2}{q}$; aufserdem ist q ungerade. Es sind also die nöthigen Bedingungen erfüllt, damit dem Schema eine Stammzahl entspricht (§. 22.) und da $q - 2q' = e$, so folgt, dafs $a = q + 1$, also $h' = 2$ ist. Diesen besondern Fall abgerechnet, wird also auch, wenn $k = a - 1$ und A ungerade ist, $h' = 1$, mithin $b = q - (a + 1)$ sein.

Ist *A gerade,* also a ungerade, so kann b höchstens $q - 3$ sein, mithin jedenfalls $h' = 1$.

Aus dieser Discussion ergiebt sich also, dafs immer, wenn $D = 2$, $b = q - (a + 1)$ ist, den Fall ausgenommen, wenn das Schema 2, 2, 2, ... 1 (2) zur Stammzahl gehört, wo $b = 2q - (a + 1)$ ist.

Aus der Formel (78.) folgt, je nachdem $h' = 1$ oder $h' = 2$

$$A - B = 2p - q^2,$$
$$A - B = 4(p - q^2).$$

Abgesehen von dem Ausnahmefall ist also A gröfser oder kleiner als B, je

nachdem $2p$ gröfser oder kleiner als q^2, d. h. je nachdem $2q'$ gröfser oder kleiner als $q(q-2a)$ ist. Da nun $q > 2q'$, also $\frac{2q'}{q}$ ein echter Bruch ist, so heifst dies: die primäre Stammzahl ist gröfser oder kleiner als die secundäre, je nachdem q kleiner oder gröfser als $2a$ ist. Auch folgt aus der Gleichung $A-B=2p-q^2$, dafs von den zwei conjugirten Stammzahlen immer die eine gerade, die andere ungerade ist.

Aus der Gleichung $A-B=4(p-q^2)$ folgt, dafs A gröfser oder kleiner als B ist, je nachdem q kleiner oder gröfser ist als a. In diesem Falle ist aber, wie oben gezeigt, immer $a=q+1$, also $q<a$, mithin ist im Ausnahmefall die primäre Stammzahl immer gröfser als die secundäre, und zwar $b=q-2$. Ferner ist $A-B$ durch 4 theilbar. Nun folgt, wie bekannt, aus der Gleichung $p^2-Aq^2=\pm 2$, dafs A nur in der Form $4n+2$ oder $4n+3$ enthalten sein kann, die conjugirten Stammzahlen werden also beide entweder in der Form $4n+2$ oder in der Form $4n+3$ enthalten sein. Es ist aber überhaupt $A=a^2+\frac{2aqq'+q'^2\mp 2}{q^2}$, und in dem Ausnahmefall ist q' ungerade, $a=q+1$ gerade, folglich A ungerade, mithin sind in diesem Falle die conjugirten Stammzahlen immer in der Form $4n+3$ enthalten.

26.

Kennt man den Nenner d des vollständigen Quotienten, aus welchem sich der periodische Theilnenner a_{i+1} in der Periode der Stammzahl A ergiebt, so kann man, mittels des in (§. 8.) angewandten Verfahrens, den Nenner d_h des vollständigen Quotienten finden, aus welchem sich derselbe Theilnenner in der Periode der Zahl A_h ergiebt.

Bezeichnet man durch f den Werth D oder $\frac{1}{2}D$, je nachdem A_h aus der Formel (69.) oder aus der Formel (70.) zu berechnen ist, so findet man:

$$d_h - d = [2fqh.a, a_i + f^2q^2h^2.a_1, a_i - (A_h - A)a_1, a_i]a_1, a_i,$$

also, wenn man die Werthe von A_h und A berücksichtigt,

$$d_h - d = 2fqh\left(a_2, a_i - \frac{q'}{q}a_1, a_i\right)a_1, a_i = 2fh.a_1, a_i.a_{i+2}, a_m.$$

Auch hier bilden also die Nenner der vollständigen Quotienten, welche denselben Theilnenner geben, eine ***einfache arithmetische Reihe.***

27.

An die vorhergehenden Untersuchungen über die Kettenbrüche, deren ***mittlerer Nenner $D=2$ ist,*** schliefsen sich ganz ähnliche Betrachtungen an,

wie sie in (§§. 12—15.) in Beziehung auf die Kettenbrüche entwickelt worden sind, welche ***kein Mittelglied*** haben. Ich beziehe mich hierbei auf die Abhandlung *Göpel's,* welche auch in diesem Journale (Bd. 45.) abgedruckt ist.

Es war längst bekannt, dafs jede Zahl, deren entsprechender Kettenbruch das Mittelglied 2 hat, wenn zugleich die Anzahl der periodischen Theilnenner *gerade,* in der Form x^2+2y^2 dargestellt werden kann, wo x und y ganze Zahlen sind. Aber *Göpel* hat zuerst gezeigt, wie man die Werthe von x und y unmittelbar durch den der Zahl entsprechenden Kettenbruch finden könne. Zwar hat er sich nur auf den Fall beschränkt, wenn die Zahl eine ***Primzahl*** oder das ***Doppelte einer solchen*** ist, in welchem Falle, nach einem bekannten Satze, der später auch mit Hülfe der Kettenbrüche bewiesen werden soll, es nur eine einzige Darstellung der Zahl in der Form x^2+2y^2 giebt. Allein diese Beschränkung ist nicht blofs überflüssig, sondern es werden durch dieselbe auch einige interessante Eigenschaften verdeckt. In der That gilt *Göpel's* Beweisführung ungeändert auch in dem ***allgemeinen*** Falle, und wenn alsdann die Zahl auf mehr als eine Weise in der Form x^2+2y^2 darstellbar ist, so findet man immer eine und ***nur*** eine dieser Darstellungen aus dem der Zahl entsprechenden Kettenbruch.

Mit Beibehaltung der frühern Bezeichnung sei

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m, \quad (2)$$

das Schema, welches irgend einer Zahl A zukommt; das Anfangsglied sei a und a_z einer der periodischen Theilnenner. Man setze $a_1, a_z = m'$; $a_2, a_z = n$; $a_1, a_{z-1} = m_0$; $a_2, a_{z-1} = n_0$; $a, a_z = M$; $a, a_{z-1} = M_0$; $a_{z+1}, a_m = \mu$; $a_{z+2}, a_m = \nu$; so wird, wie *Göpel* bewiesen hat, einer der drei folgenden Fälle Statt finden. Es wird nemlich, wenn das Mittelglied der Periode $= a$ ist, immer ein Theilnenner a_z vorhanden sein, so beschaffen, dafs

im ***ersten*** Falle: $q = m_0^2+2m'^2$; $p' = n^2+\frac{1}{2}n_0^2$ und zugleich $\mu = 2m'$; $\nu = m_0$;

im ***zweiten*** Falle: $q = m'^2+2m_0^2$; $p' = n_0^2+\frac{1}{2}n^2$; $\mu = m'$; $\nu = 2m_0$;

im ***dritten*** Falle: $q = (m'+m_0)^2+2m'^2$; $p' = n^2+\frac{1}{2}(n+n_0)^2$ und zugleich $a_{z+1} = 2$.

Im ***ersten*** Falle ist n_0 gerade, also n ungerade, im ***zweiten*** ist n gerade, also n_0 ungerade, im ***dritten*** ist $n+n_0$ gerade, also sind n und n_0 beide ungerade. Je nachdem der erste, zweite oder dritte Fall Statt findet, werde ich sagen, dafs q zur ***ersten, zweiten*** oder ***dritten Classe*** gehört.

Die Zahlen, für welche q in dieselbe Classe gehört, sollen zu derselben Classe gerechnet werden, so dafs also eine Zahl zu der ersten, zweiten oder

dritten Classe gehört, je nachdem dies bei dem entsprechenden q der Fall ist. Alle Zahlen, welche zu derselben Stammzahl gehören, gehören also auch zu derselben Classe. Eben so gehören conjugirte Stammzahlen zu derselben Classe, wenn sie ***Urstammzahlen*** sind (§. 21.). Dagegen gehört z. B. 43 in die erste Classe, nicht aber 6 (vgl. §. 23. am Ende und §. 32.).

Bezeichnen $\frac{\sqrt{A}+J_0}{D_0}$, $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$, $\frac{\sqrt{A}+J'}{D'}$ die drei aufeinanderfolgenden vollständigen Quotienten, aus welchen sich die Theilnenner a_z, a_{z+1}, a_{z+2} ergeben, so beweiset ***Göpel,*** dafs im ersten Falle $D_0 = 2D$ ist, und da $A = J^2 + D_0 D$ ist, so folgt $A = J^2 + 2D^2$. Im zweiten Falle ist $D = 2D_0$, also $A = J^2 + 2D_0^2$. Im dritten Falle ist $2D = D_0 + D'$ und zugleich $J = \frac{1}{2}(D_0 + D') - \frac{1}{4}(D_0 - D')$. Hieraus folgt $A = J^2 + D_0 D = \frac{1}{16}(D_0 - D')^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}(D_0 + D_1)^2$. Nun sind $\frac{1}{4}(D_0 - D_1)$ und $\frac{1}{2}(D_0 + D_1)$ ***ganze*** Zahlen, also ist wieder A in der Form $x^2 + 2y^2$ ausgedrückt. Statt, wie es hier geschieht, die Werthe von x und y durch die vollständigen Quotienten auszudrücken, kann man sie auch unmittelbar durch die Theilnenner des entsprechenden Kettenbruchs ausdrücken, ähnlich wie in (§. 12.).

28.

Ich schicke zunächst folgende Bemerkungen voraus.

Gehört q in die ***erste*** Classe, so ist $\frac{\mu}{\nu} = \frac{2m'}{m_0}$, d. h.

$$\tfrac{1}{2}\left[a_{z+1} + \cfrac{1}{a_{z+2} + \cdots + \cfrac{1}{a_m}}\right] = a_z + \cfrac{1}{a_{z-1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1}}.$$

Ist a_{z+1} gerade, so mufs daher $a_z = \frac{1}{2} a_{z+1}$ sein; ist a_{z+1} ungerade und zwar $= 2l + 1$, so ist $\frac{2m'}{m_0}$ gröfser als $2l + 1$ und kleiner als $2l + 2$, mithin $a_z = l = \frac{1}{2}(a_{z+1} - 1)$. Jedenfalls kann also a_{z+1} nicht kleiner als 2 sein.

Gehört q in die ***zweite*** Classe, so ist $\frac{\mu}{\nu} = \frac{m'}{2m_0}$, d. h.

$$a_{z+1} + \cfrac{1}{a_{z+2} + \cdots + \cfrac{1}{a_m}} = \tfrac{1}{2}\left[a_z + \cfrac{1}{a_{z-1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1}}\right],$$

also mufs $a_{z+1} = \frac{1}{2} a_z$ oder $\frac{1}{2}(a_z - 1)$ sein, je nachdem a_z gerade oder ungerade ist; mithin kann a_z nicht kleiner sein als 2 und es ist $m' > 2m_0$.

Hieraus folgt ferner, dafs, obgleich die Zahl q im Allgemeinen auf mehr als eine Art in der Form $x^2 + 2y^2$ darstellbar ist, unter diesen verschie-

denen Darstellungen doch immer nur eine einzige ist, vermöge deren q in eine der drei Classen gehört. Es versteht sich von selbst, dafs nicht $q = a_1, a_{z-1}^2 + 2a_1, a_z^2 = a_1, a_{p-1}^2 + 2a_1, a_p^2$ oder $q = a_1, a_z^2 + 2a_1, a_{z-1}^2 = a_1, a_p^2 + 2a_1, a_{p-1}^2$ oder $q = (a_1, a_z + a_1, a_{z-1})^2 + 2a_1, a_z^2 = (a_1, a_p + a_1, a_{p-1})^2 + 2a_1, a_p^2$ sein kann, sobald nicht $z = p$ ist, d. h. es kann nicht q auf mehr als eine Art zu einer und derselben Classe gehören. Eben so wenig kann $a_1, a_z^2 + 2a_1, a_{z-1}^2 = a_1, a_{p-1}^2 + 2a_1, a_p^2$ sein, d. h. es kann nicht q ***zugleich*** zur ersten und zweiten Classe gehören. Gehört q in die ***erste*** Classe, so dafs $q = a_1, a_{z-1}^2 + 2a_1, a_z^2$ ist, so kann nicht zugleich $q = (a_1, a_p + a_1, a_{p-1})^2 + 2a_1, a_p^2$ sein. Denn jedenfalls müfste $p < z$ sein; wäre $p = z-1$ und $a_z = 1$, so wäre $a_1, a_z = a_1, a_p + a_1, a_{p-1}$, also $a_1, a_{z-1}^2 + 2a_1, a_z^2 = a_1, a_p^2 + 2(a_1, a_p + a_1, a_{p-1})^2 > (a_1, a_p + a_1, a_{p-1})^2 + 2a_1, a_p^2$; und um so mehr wenn $a_z > 1$ oder $p < z-1$ ist. Auch kann nicht q in die ***zweite*** Classe gehören, so dafs $q = a_1, a_z^2 + 2a_1, a_{z-1}^2$ und zugleich $q = (a_1, a_p + a_1, a_{p-1})^2 + 2a_1, a_p^2$ sind. Dies wäre nemlich nur unter der Voraussetzung möglich, dafs $p = z-1$ und $a_z = 1$, während oben bewiesen wurde, dafs a_z nicht kleiner als 2 sein kann. Eben so folgt, dafs nicht q zur ***dritten*** Classe gehören kann, so dafs $q = (a_1, a_z + a_1, a_{z-1})^2 + 2a_1, a_z^2$ und zugleich $q = a_1, a_p^2 + 2a_1, a_{p-1}^2$ ist. Dies wäre nur möglich, wenn $p = z+1$ und $a_p = a_{z+1} = 1$ wäre, während $a_{z+1} = 2$ sein mufs.

29.

Nach (§. 3.) kann das Mittelglied der Periode nur $= a$ oder $= a-1$ sein. Es sei zuerst das Mittelglied $= a$; dann ist (nach §. 3.) $q' = 2q^0$; nun ist zugleich $p'q - q_0 q' = 1$, also $p'q = 2q_0^2 + 1$ und $2p'q = q'^2 + 2$. Gehört q zur ***ersten*** Classe, ist also $q = m_0^2 + 2m'^2$ und $2p' = n_0^2 + 2n^2$, so ist

$$q'^2 + 2 = (m_0 n_0 + 2m'n)^2 + 2(m_0 n - m'n_0)^2,$$

also, da $m_0 n - m'n_0 = \pm 1$ ist,

$$q' = m_0 n_0 + 2m'n.$$

Nun sei A eine ***Stammzahl,*** so hat man nach (§. 16.)

$$A = \frac{a^2 q + 2aq' + \frac{q'^2+2}{q}}{q} = \frac{a^2 q + 2aq' + 2p'}{q}, \text{ mithin}$$

$$A = \frac{(am_0 + n_0)^2 + 2(am' + n)^2}{q} = \frac{M_0^2 + 2M^2}{q}.$$

Setzt man nun

$$x = \frac{2Mm' - M_0 m_0}{q} \quad \text{und}$$

$$y = \frac{Mm_0 + m'M_0}{q},$$

so sind x und y *positive* Zahlen, und es ist $A = x^2 + 2y^2$. Ferner ist

$$m_0^2(M_0^2 + 2M^2) + 2(m'^2 M_0^2 - m_0^2 M^2) = M_0^2 q.$$

Nun ist $M_0^2 + 2M^2$ durch q theilbar, also auch $m'^2 M_0^2 - m_0^2 M^2$, und da $m'M_0 - m_0 M = \pm 1$ ist, so mufs auch $Mm_0 + M_0 m'$ durch q theilbar sein; d. h. es ist y, und mithin auch x, eine *ganze* Zahl, und es somit nachgewiesen, dafs die Stammzahl A in der Form $x^2 + 2y^2$ enthalten ist.

Aus der Stammzahl findet man jede Zahl A_h, indem man $a + qh$ statt a setzt. Setzt man daher

$$x_h = \frac{2[(a+qh)m' + n]m' - [(a+qh)m_0 + n_0]m_0}{q} = x + h(2m'^2 - m_0^2),$$

$$y_h = \frac{[(a+qh)m' + n]m_0 + [(a+qh)m_0 + n_0]m'}{q} = y + 2hm'm_0 \quad \text{und}$$

$$2m'^2 - m_0^2 = \alpha; \qquad 2m'm_0 = \beta, \text{ so ist}$$

$$A_h = (x + \alpha h)^2 + 2(y + \beta h)^2,$$

also auch jede zur Stammzahl A gehörende Zahl in der Form $x^2 + 2y^2$ enthalten.

In dem hier betrachteten Falle ist m_0 ungerade, also auch α, und da m' und m_0 keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so ist dies auch bei α und β der Fall. Die unbestimmte Gleichung

$$(79.) \qquad \alpha u - \beta v = \pm 1$$

ist mithin immer auflösbar. Nun ist

$$\alpha y_h - \beta x_h = \alpha y - \beta x = M_0 m' - M m_0 = \pm 1.$$

Es sind also $v = x_h$ und $u = y_h$ zusammengehörende Werthe, welche der Gleichung (79.) genügen. Unter diesen Werthen sind x und y, welche zu der Stammzahl gehören, die kleinsten. Gäbe es nemlich noch zwei kleinere zusammengehörende Werthe x' und y', so wäre, wenn h' irgend eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$x = x' + \alpha h'; \qquad y = y' + \beta h' \quad \text{und}$$

$$x^2 + 2y^2 = x_1^2 + 2y_1^2 + 2(\alpha x' + 2\beta y')h' + (\alpha^2 + 2\beta^2)h'^2.$$

Nun ist $\alpha^2+2\beta^2=q^2$, also $\alpha+2\beta>q$, mithin wäre jedenfalls $\sqrt{(x^2+2y^2)}>q+1$, d. h. die gröfste in $\sqrt{A}$ enthaltene Zahl a wäre $\geqq q+1$. Allein es wurde früher bewiesen (§. 25.), dafs *a in der Regel* kleiner als q ist; nur in dem Ausnahmefall ist $a=q+1$, und allein in diesem letzteren Falle mufs q zur *dritten* Classe gehören, da alle periodischen Theilnenner, den letzten ausgenommen, $=2$ sind, mithin $a_z=a_{z+1}$ ist, was nach (28.) weder bei der ersten, noch bei der zweiten Classe der Fall ist.

Man könnte vielleicht einwenden, dafs möglicherweise der letzte periodische Theilnenner $a_m=1=a_{z+1}$ wäre und q zur zweiten Classe gehörte. Allein dann würde $q=m'+m_0$ sein, während $q=m'^2+2m_0^2$ sein müfste. Man bemerke gelegentlich, dafs überhaupt der letzte periodische Theilnenner, wenn er der Einheit gleich ist, nicht a_{z+1} sein kann, da q, zu welcher der drei Classen es gehören mag, nicht $=m'+m_0$ sein kann.

Gehört q zur *zweiten* Classe, und ist also $q=m'^2+2m_0^2$; $2p'=n^2+2n_0^2$, so ist

$$q'^2+2=(m'n+2m_0n_0)^2+2(m'n_0-m_0n)^2,$$

mithin $q'=m'n+2m_0n_0$. Hieraus folgt wieder

$$A=\frac{(am'+n)^2+2(am_0+n_0)^2}{q}=\frac{M^2+2M_0^2}{q}.$$

Setzt man nun

$$x=\frac{Mm'-2M_0m_0}{q} \text{ und}$$

$$y=\frac{Mm_0+M_0m'}{q},$$

so ist nicht blofs y, sondern auch x eine *positive* Zahl, da, wie (§. 28.) bewiesen, $m'>2m_0$ ist, und es ist $A=x^2+2y^2$. Nun ist

$$2(M^2m_0^2-M_0^2m'^2)+m_1^2(M^2+2M_0^2)=M^2q,$$

und da $M^2+2M_0^2$ durch q theilbar ist, so ist auch Mm_0+M_0m' durch q theilbar. Folglich ist y, und mithin auch x eine *ganze* Zahl, also ist auch in diesem Falle die Stammzahl A in der Form x^2+2y^2 darstellbar.

Setzt man hier $m'^2-2m_0^2=\alpha$; $2m'm_0=\beta$, so findet man wieder, wie im vorhergehenden Falle, dafs

$$A_h=(x+\alpha h)^2+2(y+\beta h)^2=x_h^2+2y_h^2.$$

Auch folgt wieder, dafs die Gleichung (79.) immer auflösbar ist, so wie, dafs

$$\alpha y_h-\beta x_h=\alpha y-\beta x=M_0m'-Mm_0=\pm 1$$

ist und dafs x und y die kleinsten zusammengehörenden Werthe sind, welche der Gleichung (79.) Genüge leisten.

Gehört q zur *dritten* Classe, und ist also $q = (m'+m_0)^2+2m'^2$; $2p' = (n+n_0)^2+2n^2$, so ist

$$2p'q = [(m'+m_0)(n+n_0)+2m'n]^2+2[(m'+m_0)n-(n+n_0)m']^2,$$

mithin

$$q' = (m'+m_0)(n+n_0)+2m'n$$

und

$$A = \frac{(M+M_0)^2+2M^2}{q}.$$

Man setze nun

$$x = \frac{2Mm'-(M+M_0)(m'+m_0)}{q},$$

$$y = \frac{M(m'+m_0)+m'(M+M_0)}{q},$$

so ist $A = x^2+2y^2$. Nun ist

$$(m'+m_0)^2[(M+M_0)^2+2M^2]+2[m'^2(M+M_0)^2-M^2(m'+m_0)^2] = (M+M_0)^2q,$$

also da $(M+M_0)^2+2M^2$ durch q theilbar und $m'(M_0+M)-(m'+m_0)M = \pm 1$ ist, so ist auch $m'(M+M_0)+(m'+m_0)M$ durch q theilbar, d. h. y, und mithin auch x, sind *ganze* Zahlen, und es ist demnach auch in diesem Falle nachgewiesen, dafs A in der Form x^2+2y^2 darstellbar ist.

Während aber in den zwei früheren Fällen der Werth von x immer positiv war, so kann er hier sowohl positiv als negativ sein. Setzt man

$$2m'^2-(m'+m_0)^2 = \alpha; \qquad 2(m'+m_0)m' = \beta,$$

so kann auch α positiv oder negativ sein, es werden aber x und α immer dasselbe Zeichen haben. (Aus $2m'^2-(m'+m_0)^2 \gtrless 0$ folgt, dafs α positiv oder negativ ist, je nachdem $\frac{m'}{m_0} \gtrless 1+\sqrt{2}$.) Man findet nemlich

$$\alpha y-\beta x = m'M_0-Mm_0 = \pm 1.$$

Diese Gleichung kann aber nur bestehen, wenn α und x gleiche Zeichen haben.

Bezeichnet man wieder durch x_h und y_h die Werthe, welche man bezüglich aus x und y erhält, wenn man $a+qh$ statt a setzt, so findet sich

$$x_h = x+\alpha h; \qquad y_h = y+\beta h$$

und

$$A_h = (x+\alpha h)^2+2(y+\beta h)^2.$$

Es ist also auch hier nachgewiesen, dafs jede solche Zahl in der Form x^2+2y^2 enthalten ist. Auch beweist man hier wieder wie früher, dafs die Gleichung (79.) immer auflösbar ist, und dafs x und y die kleinsten zusammengehörenden Werthe sind, welche dieser Gleichung genügen (wobei man sich x positiv genommen vorstellt). Im Allgemeinen ist nemlich auch hier wieder das Anfangsglied $a<q$. Im Ausnahmefall aber, welcher, wie oben gezeigt wurde, immer zur dritten Classe gehört, kann es noch *ein* Paar zusammengehörender Werthe geben, welche bezüglich kleiner als x und y sind. Denn setzt man $x=x'+\alpha h'$; $y=y'+\beta h'$, so ist, wenn $h'=1$:

$$x^2+2y^2 = x'^2+2y'^2+2(\alpha x'+2\beta y')+\alpha^2+2\beta^2.$$

Nun ist $\alpha^2+2\beta^2=q^2$ und $\alpha+2\beta>q$; es kann also die gröfste in $\sqrt{(x^2+2y^2)}$ enthaltene ganze Zahl $=q+1$ sein. Allein in diesem Falle wird α immer $=\pm 1$ sein; denn setzt man $a_1, a_{z-2}=l$, so ist $m'=2m_0+l$, also $\alpha=2(2m_0+l)^2-(3m_0+l)^2=(2m_0+l)l-m_0^2=m'l-m_0^2=\pm 1$, wo das obere oder untere Zeichen, unter denselben Umständen, wie in der Gleichung $\alpha y-\beta x=\pm 1$ zu nehmen ist. (Man hat nemlich in diesem Falle $m_0=n$, $l=n_0$, also $m'l-m_0^2=m'n_0-m_0n$. Man sieht zugleich, dafs überhaupt α immer und nur dann $=\pm 1$ ist, wenn sämmtliche Theilnenner $a_1, a_2, \ldots a_z$ den Werth 2 haben, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem z gerade oder ungerade.) Dieser Gleichung wird also Genüge geleistet, wenn man $y'=1$, $x'=0$ setzt. Man hat mithin $x=\alpha$, $y=\beta+1$ und in so fern man den Werth Null ausschliefst, sind auch diese Werthe wieder die kleinsten zusammengehörenden, welche der Gleichung (79.) genügen.

Bisher wurde immer vorausgesetzt, dafs das Mittelglied der Periode $=a$ sei. Ist es aber $a-1$, so hat man $q=2q_0-q'$ und in Folge der Gleichung $p'q-q_0q'=1$ ist $q'^2+2=q(2p'-q')$. Es bleibt daher Alles wie früher, nur dafs $2p'-q'$ an die Stelle von $2p'$ tritt. Entwickelt man nemlich den Werth von $2p'-q'$, so findet sich, dafs dieser Ausdruck, je nachdem A zu einer der drei Classen gehört, genau denselben Werth hat, welcher früher für $2p'$ gefunden wurde. Da mithin die Werthe von q und $\frac{q'^2+2}{q}$ genau dieselben bleiben, wie im früheren Falle, so bleiben auch alle daraus abgeleiteten Formeln unverändert.

30.

Es wurden oben die vollständigen Quotienten, aus welchen sich bezüglich die drei Theilnenner a_z, a_{z+1}, a_{z+2} ergeben, durch $\frac{\sqrt{A}+J_0}{D_0}$, $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$, $\frac{\sqrt{A}+J'}{D'}$ bezeichnet. Nun ist

$$\pm J = Am'm_0 - MM_0; \quad \pm D = M^2 - Am'^2.$$

Gehört A zur *ersten* Classe, so findet man hieraus, wenn man statt A seinen Werth $\frac{M_0^2+2M^2}{m_0^2+2m'^2}$ setzt, $J=x$, $D=y$. Nun ist $A = J^2+D_0D = x^2+2y^2$, also ist $D_0 = 2y = 2D$. Gehört A zur *zweiten* Classe, so findet man, durch Substitution seines Werthes, $J=x$, $D=2y$ also $D_0 = y = \frac{1}{2}D$, und wenn A zur *dritten* Classe gehört, $J = y \pm x$, $D=y$. Nun ist in diesem Falle $a_{z+1}=2$, also, wie bekannt, $J' = 2D - J = y \mp x$ und $A = J'^2 + DD' = (y \mp x)^2 + yD' = x^2 + 2y^2$, also $D' = y \pm 2x$, und da auch $A = J^2 + D_0D = (y \pm x)^2 + D_0y$ ist, so folgt $D_0 = y \mp 2x$, mithin $D = \frac{1}{2}(D_0 + D')$. Dieses sind die oben erwähnten *Göpel*'schen Formeln.

31.

Wenn $\frac{r_0}{s_0}$, $\frac{r'}{s}$ zwei aufeinanderfolgende Näherungswerthe von $\sqrt{A}$ bezeichnen und es ist $s<q$, so mufs, wenn $A = \frac{r_0^2+2r'^2}{s_0^2+2s^2}$ ist, auch $q = s_0^2+2s^2$ sein. Denn es ist $sr_0 - s_0r' = \pm 1$. Setzt man nun $P = 2r's + s_0r_0$; $Q = s_0^2+2s^2$, so findet sich $P^2 - AQ^2 = -2$, wenn man statt A seinen Werth setzt. Es sind also P und Q zusammengehörende Werthe von x und y, welche der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -2$ genügen. Nun erhält man, wie bekannt, alle Werthe von x und y, wenn man Zähler und Nenner der Näherungswerthe von $\sqrt{A}$ nimmt, welche aus allen Theilnennern gebildet sind, die dem mittleren Theilnenner in der ersten, zweiten u. s. w. Periode vorausgehen, so dafs die kleinsten zusammengehörenden Werthe $x=p$ und $y=q$ sind. Wäre nun nicht $P=p$ und $Q=q$, so müfsten P und Q Zähler und Nenner des Kettenbruchs sein, welcher aus allen Theilnennern gebildet wird, die dem mittleren Theilnenner in der zweiten oder einer folgenden Periode vorausgehen. Nimmt man also an, dafs der Bruch $\frac{r'}{s}$ aus den Theilnennern $a, a_1, \ldots a_t$ gebildet ist, so müfsten *mindestens* die Theilnenner

$$(80.) \quad a_{t+1} \ldots a_m, a_m, \ldots a_1, 2a, a_1, \ldots a_m$$

dazu verwendet werden, um den Bruch $\frac{2s}{s_0}$ zu bilden. Allein, da a mindestens $=2$ (abgesehen von $A=3$), so ist schon der Zähler des aus den Theilnennern $a_m, \ldots a_1, 2a$ gebildeten Kettenbruchs gröfser als $4q$ und um so mehr gröfser als $4s$.

Ist unter denselben Voraussetzungen $A=\frac{r'^2+2r_0^2}{s^2+2s_0^2}$, so mufs $q=s^2+2s_0^2$ sein. Setzt man nemlich $P=sr'+2s_0r_0$; $Q=s^2+2s_0^2$, so müfste $\frac{s}{2s_0}$ der Werth des Bruchs sein, welcher aus der Reihe (80.) entspringt, da wieder $P^2-AQ^2=-2$, während, wie eben bewiesen wurde, der Zähler dieses Bruchs gröfser als $4s$ ist.

Ebenso folgt, dafs, wenn unter denselben Voraussetzungen $A=\frac{(r'+r_0)^2+2r_1^2}{(s+s_0)^2+2s^2}$ ist, auch $q=(s+s_0)^2+2s^2$ sein mufs. Denn es sei $P=(3s+s_0)r'+(s+s_0)r_0$; $Q=(s+s_0)^2+2s^2$, so ist $P^2-AQ^2=-2$, also müfste der aus der Reihe (80.) folgende Kettenbruch den Werth $\frac{3s+s_0}{s+s_0}$ haben, was wieder nicht sein kann, da $3s+s_0<4s$ ist.

Hieraus ergiebt sich weiter, dafs, obgleich die Zahl A im Allgemeinen auf mehr als eine Art in der Form x^2+2y^2 dargestellt werden kann, doch nur eine einzige dieser Darstellungen auf die angegebene Weise aus den vollständigen Quotienten gefunden werden kann. Mit anderen Worten: wenn D_0, D, D' die Nenner dreier aufeinanderfolgender vollständiger Quotienten sind, so kann bei demselben Kettenbruche von den drei Relationen $D_0=2D$, $D=2D_0$, $2D=D_0+D'$, wenn bei der letzteren zugleich der zu dem Nenner D gehörende Theilnenner $=2$ ist, weder eine mehrmals, noch mehr als eine vorkommen. Bezeichnen nemlich d_0, d, d' ebenfalls drei aufeinanderfolgende Nenner vollständiger Quotienten, so kann nicht zugleich $D_0=2D$ und $d_0=2d$ sein. Wäre es der Fall, so müfste man, wenn $\frac{M_0}{m_0}$, $\frac{M}{m'}$ und ebenso $\frac{r_0}{s_0}$, $\frac{r'}{s}$ zwei aufeinanderfolgende Näherungswerthe von $\sqrt{A}$ bezeichnen, Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned}
\pm D &= M^2 - Am'^2,\\
\mp D_0 &= \mp 2D = M_0^2 - Am_0^2,\\
\pm d &= r'^2 - As^2,\\
\mp d_0 &= \mp 2d = r_0^2 - As_0^2
\end{aligned}$$

haben. Hieraus würde

$$A = \frac{M_0^2+2M^2}{m_0^2+2m'^2} = \frac{r_0^2+2r_1^2}{s_0^2+2s^2}$$

folgen, mithin wäre $q = m_0^2+2m'^2 = s_0^2+2s^2$, was, wie in (§. 28.) gezeigt, nicht möglich ist, wenn nicht $m_0 = s_0$, $m' = s$ ist. In der *Degen*'schen Tafel findet man bei der Zahl 998 die vier auf einander folgenden Nenner 14, 7, 26, 13, aber statt 26 ist 46 zu setzen.

Ebenso läfst sich beweisen, dafs nicht zugleich $D = 2D_0$ und $d = 2d_0$ oder $D = 2D_0$ und $d_0 = 2d$ sein kann, so wie, dafs nicht zugleich $D_0+D' = 2D$ und $d_0+d' = 2d$ sein kann, wenn zu D und d der Theilnenner 2 gehört, auch nicht zugleich $d_0+d' = 2d$ und $D = 2D_0$ oder $D_0 = 2D$, sobald zu d der Theilnenner 2 gehört. Läfst man diese letztere Bedingung weg, so hört die Richtigkeit des Satzes auf. Bei der Zahl 118 z. B. findet man für die drei aufeinanderfolgenden Nenner 3, 6, 9 also zugleich $D = 2D_0$ und $D_0+D' = 2D$; aber hier gehört zu $D = 6$ der Theilnenner 3. Bei der Zahl 811 findet man die vier aufeinanderfolgenden Theilnenner 30, 15, 9, 3, also $D_0 = 2D$ und $d_0+d' = 2d$, aber zu $d = 9$ gehört der Theilnenner 6.

Aus diesen Erörterungen ergiebt sich also, dafs sich die Frage, zu welcher Classe eine Zahl gehöre, nicht blofs nach der Beschaffenheit von q (§. 27.), sondern auch aus den Nennern der vollständigen Quotienten bestimmen läfst. Je nachdem sich unter diesen Nennern die Relation $D_0 = 2D$ oder $D = 2D_0$ oder $D_0+D' = 2D$ findet, wo im letzteren Falle der zu D gehörende Theilnenner zugleich $= 2$ sein mufs, gehört die Zahl zur ersten, zweiten oder dritten Classe.

Die sämmtlichen vorhergehenden Betrachtungen beziehen sich zunächst auf den Fall, wenn die Entwicklung von $\sqrt{A}$ periodische Glieder enthält. Es giebt aber eine Stammzahl, bei welcher das Mittelglied sogleich auf das Anfangsglied folgt; dies ist die Zahl 3. Will man auch diese, nach der Relation, die bei den Nennern der vollständigen Quotienten Statt findet, beurtheilen, so bleibt es zweifelhaft, ob sie zur ersten, oder zur zweiten Classe zu zählen sei, da hier die vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt{3}+0}{1}$, $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}+1}{1}$, $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, u. s. w. heifsen. Will man sich einer auch sonst bei Entwicklung der Kettenbrüche gebräuchlichen Fiktion bedienen und setzt $\frac{m_0}{n_0} = \frac{0}{1}$; $\frac{m'}{n} = \frac{1}{0} = \frac{q}{q'}$, so hätte man $q = m'^2+2m_0^2 = 1$ und demnach wäre 3 zur ***zweiten*** Classe zu zählen. Dasselbe gilt natürlich von der ganzen Zahlenreihe, die sich aus der Stamm-

zahl 3 ergiebt. Diese Fiktion mufs man ohnehin bei diesen Betrachtungen zulassen, wenn die Allgemeinheit nicht gestört werden soll. (Bei der Zahl 22 z. B., welche zur ersten Classe gehört, ist $q=3$. Soll dies in der Form $m_0^2+2m'^2$ dargestellt werden, so mufs man sich vor dem ersten periodischen Theilnenner 1, welcher $=m'$ ist, noch die Einheit $=m_0$ denken.)

Man beachte auch noch Folgendes. Zur *ersten* und *zweiten* Classe kann keine Zahl gehören, für welche das *erste* periodische Glied a_{z+1} ist. Zur *ersten* nicht, weil sonst $D_0=1$ nicht $=2D$ sein könnte, zur *zweiten* nicht, weil sonst $D_0=1$ also $D=2D_0$, d. h. $D=2$ wäre, während nur der mittlere Nenner $=2$ sein kann (§. 18.). Bei der *dritten* Classe kann allerdings der Fall vorkommen, dafs schon das erste periodische Glied $=a_{z+1}$ ist, wie z. B. bei der Zahl 54.

32.

Im 35ten Bande dieses Journals S. 315 hat *Jacobi*, an die Untersuchung *Göpels* anknüpfend, eine Tabelle mitgetheilt, welche für die Zahlen unter 1000 angiebt, welche *Primzahlen* oder deren *Doppeltes* in die erste, zweite oder dritte Classe gehören. Er findet, dafs unter den 69 Zahlen, welche diese Tafel enthält, 36 zur ersten, 18 zur zweiten, 15 zur dritten Classe gehören, und schliefst hieran die Bemerkung, dafs demnach wenigstens bei den Zahlen unter 1000 der erste Fall bedeutend überwiegt.

Ich bemerke zunächst, dafs das Wesen der *dritten* Classe dort nicht genau definirt ist. *Jacobi* giebt nämlich als Kennzeichen an, dafs die Nenner dreier aufeinander folgender vollständiger Quotienten $\frac{\sqrt{A}+J_0}{D_0}$, $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$, $\frac{\sqrt{A}+J'}{D'}$ durch die Gleichung $D=\frac{1}{2}(D_0+D)$ verbunden sind, und wenn auch noch nachher hinzugesetzt wird, dafs $J-J'$ immer durch 2, D_0-D' immer durch 4 theilbar ist, so reicht dies Alles nicht hin, um die betreffende Zahl zur dritten Classe zu rechnen. Bei der Zahl 811 z. B. findet man für die aufeinander folgenden vollständigen Quotienten

$$\frac{\sqrt{811}+19}{15},\quad \frac{\sqrt{811}+26}{9},\quad \frac{\sqrt{811}+28}{3}.$$

Hier ist $q=\frac{1}{2}(15+3)$, ferner ist $D_0-D'=15-3$ durch vier theilbar und $J-J'=26-28$ ist durch 2 theilbar; gleichwohl gehört 811, wie schon in (§. 31.) bemerkt wurde, zur *ersten* Classe. Die dritte Classe wird, wie schon früher angemerkt wurde, nur dadurch characterisirt, dafs zugleich der zum Nenner D gehörende Theilnenner $=2$ ist. Wirklich ist in dieser Beziehung

auch ein Fehler in der *Jacobi*schen Tabelle, indem die Zahl 134, welche dort zur *dritten* Classe gerechnet ist, in Wahrheit zur *zweiten* gehört. Allerdings folgen bei dieser Zahl drei vollständige Quotienten aufeinander, welche die Nenner 13, 10, 7 haben, aber der zu 10 gehörende Theilnenner ist $= 1$, und es sind die aufeinander folgenden Nenner 7, 14, welche die Classe bestimmen. Demnach gehören 36 Zahlen zur ersten, 19 zur zweiten, 14 zur dritten Classe.

Ferner ist es mir nicht klar, weshalb *Jacobi,* ohne weitere Bemerkung, die Zahlen 3, 6, 11, 38, 83, 227, 326, 443 zur *ersten* Classe rechnet. Unter diesen Zahlen ist 3 die Stammzahl, aus welcher sich die übrigen ergeben. Ich habe aber schon angemerkt, dafs diese Zahl ebensowohl zur *ersten* als zur *zweiten* Classe gerechnet werden kann, und sogar aus gewissem Gesichtspunkte betrachtet, zur *zweiten* Classe gehört. Zieht man daher die erwähnten acht Zahlen von der ersten Classe ab, so bleiben noch 28 in der ersten, 19 in der zweiten, 14 in der dritten Classe. Zählt man sie zu der zweiten Classe, so hätte man 28 in der ersten, 27 in der zweiten, 14 in der dritten, wodurch das Überwiegen der ersten Classe über die zweite ganz aufgehoben wäre.

Es scheint mir aber, dafs wenn überhaupt durch *Abzählen* eine Vorstellung über die Art, wie sich die Zahlen unter den drei Classen vertheilen, gewonnen werden soll, *einerseits* nicht blofs die Zahlen, welche Primzahlen oder das Doppelte von solchen sind, sondern überhaupt alle hierher gehörenden Zahlen berücksichtigt werden müssen, *andererseits* aber auch nur die *Stammzahlen* aufzunehmen sind, da sich aus einer solchen mit Nothwendigkeit ergiebt, zu welcher Classe die aus ihr abgeleiteten Zahlen gehören. Liegen die Zahlen, die aus einer und derselben Stammzahl folgen, sehr nahe bei einander und man zählt sie einzeln, so mufs sich schon dadurch, innerhalb gewisser Grenzen, ein Überwiegen der Classe, zu welcher sie gehören, ergeben.

Entwirft man unter diesem Gesichtspunkte eine ähnliche Tabelle, wie die *Jacobi*sche, so erhält man, wenn man die Zahl 3 zur zweiten Classe zählt, folgendes Resultat. Von den unter 1000 liegenden Stammzahlen gehören

zur *ersten* Classe: 22, 43, 131, 139, 179, 211, 214, 246, 262, 283, 379, 419, 467, 491, 498, 502, 547, 562, 619, 683, 694, 722, 739, 771, 787, 811, 827, 834, 838, 971, 998;

zur *zweiten* Classe: 3, 67, 86, 118, 134, 162, 307, 331, 354, 358, 422, 451, 459, 523, 534, 566, 571, 643, 662, 691, 699, 779, 859, 918, 934, 946, 947;

zur *dritten* Classe: 19, 163, 166, 243, 251, 339, 347, 454, 466, 587, 594, 614, 758, 883, 886, 907.

Es gehören also zur ersten Classe 31 Zahlen, zur zweiten 27, zur dritten 16. Während mithin das Überwiegen der zwei ersten Classen über die dritte auch hier sich herausstellt, ist dagegen das Überwiegen der ersten Classe über die zweite so unbedeutend, dafs sich durchaus Nichts daraus schliefsen läfst.

Je nachdem eine Zahl zur ersten, zweiten oder dritten Classe gehört, sind n_0 gerade, n ungerade; n gerade, n_0 ungerade; n und n_0 ungerade (§. 27.). Diese drei Fälle sind gleich wahrscheinlich, allein wenn die Zahl zur dritten Classe gehören soll, so tritt noch die Bedingung hinzu, dafs der zu D gehörende Theilnenner $= 2$ ist. Daraus ist zu vermuthen, dafs in den *zwei ersten* Classen gleich viel Zahlen enthalten sind, in der *dritten* aber weniger.

33.

Wenn man den Zahlen α und β die Werthe giebt, welche ihnen nach früherer Bestimmung zukommen, je nachdem die Zahl A zu einer der drei Classen gehört, so hat man, wie gezeigt wurde, in jedem Falle

$$\alpha y - \beta x = m' M_0 - m_0 M.$$

Setzt man statt dessen

$$(81.) \qquad \alpha y - \beta x = \pm 1,$$

so ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem die Anzahl der Theilnenner $a_1, a_2, \ldots a_z$ gerade oder ungerade ist.

Es sei A die *primäre* Stammzahl, also

$$A = x^2 + 2y^2,$$
$$A_1 = (x+\alpha)^2 + 2(y+\beta)^2,$$
$$A_2 = (x+2\alpha)^2 + 2(y+2\beta)^2.$$

Bezeichnet B die *secundäre* Stammzahl, so ist, wenn der Ausnahmefall nicht Statt findet, A' die Adjungirte von B (§. 25.), mithin

$$B = (x-\alpha)^2 + 2(y-\beta)^2.$$

Es mufs $y<\beta$, $x<\alpha$ sein, und zwar letzteres, wenn x und α negativ sind (§. 29.), ohne Rücksicht auf das Zeichen. Wäre $y>\beta$, $x>\alpha$, so wäre $x^2+2y^2>\alpha^2+2\beta^2$, d. h. $A>q^2$ während $a<q$ sein mufs. Wäre $x<\alpha$, $y>\beta$ oder $x>\alpha$, $y<\beta$, so könnte die Gleichung (81.) nicht Statt finden. Setzt man daher $\beta-y=y'$ und $\alpha-x=x'$, so ist y' positiv und x' positiv oder negativ, je nachdem α positiv oder negativ ist, und man hat $B=x'^2+2y'^2$, auch ist

$$(82.)\quad \alpha y'-\beta x' = \mp 1,$$

wo das obere oder untere Zeichen unter denselben Bedingungen wie in (81.) zu nehmen ist. Der Zusammenhang der Zeichen in diesen zwei Gleichungen erklärt sich auf dieselbe Weise, wie in (§. 13.), da die Reihe $1, a_1-1, a_2, \ldots a_z$ einen Theilnenner mehr enthält, als die Reihe $a_1, a_2, \ldots a_z$. Auch sieht man, dafs hier wieder x' und y' die kleinsten zusammengehörenden Werthe sind, welche der Gleichung (82.) genügen.

Findet der Ausnahmefall Statt, so ist A_2 die Adjungirte von B, also

$$B = (x-2\alpha)^2+2(y-2\beta)^2.$$

In diesem Falle läfst sich beweisen, dafs $y<2\beta$ und $x<2\alpha$ sein mufs. Setzt man daher $2\beta-y=y'$, $2\alpha-x=x'$, so hat man wieder

$$\alpha y'-\beta x' = \mp 1;$$

wo dieselbe Bestimmung der Zeichen wie in (82.) Statt findet.

Setzt man, wie früher, $A_h=x_h^2+2y_h^2$ und bezeichnet durch $\frac{\sqrt{A_h}+J_{h-1}}{D_{h-1}}$, $\frac{\sqrt{A_h}+J_h}{D_h}$, $\frac{\sqrt{A_h}+J_{h+1}}{D_{h+1}}$ die drei aufeinanderfolgenden vollständigen Quotienten, aus welchen sich die Theilnenner a_z, a_{z+1}, a_{z+2} ergeben, so ist, bei der *ersten* und *dritten* Classe, $y_h=D_h$, bei der *zweiten* $y_h=D_{h-1}$. Nun ist

$$(83.)\quad \alpha y_h-\beta x_h = \pm 1$$

und β eine gerade Zahl, also mufs y_h immer ungerade sein; und da x_h und y_h keinen gemeinschaftlichen Factor haben können, so ist A_h in der Form $8n+3$ oder $8n\pm 2$ enthalten, je nachdem x_h und y_h beide ungerade, oder x_h gerade und y_h ungerade ist. Wie bekannt, gehören namentlich alle Primzahlen von der Form $8n+3$ hierher (§. 2.).

Aus den früher bestimmten Werthen von α ergiebt sich, dafs α in der *ersten* und *dritten* Classe $= 4n+1$ oder $= 4n+3$ ist, je nachdem m' ungerade oder gerade, in der *zweiten* Classe je nachdem m_0 gerade oder ungerade ist. Da nämlich q immer ungerade ist (§. 3.), so ist bei der ersten Classe m_0 ungerade, bei der zweiten ist es m', bei der dritten $m'+m_0$. Aus demselben Grunde wird β bei der ersten und dritten Classe $= 4n+2$ oder $= 4n$ sein, je nachdem m' ungerade oder gerade ist, bei der zweiten Classe, je nachdem m_0 ungerade oder gerade. Mithin ist $\alpha = 4n+1$ oder $= 4n+3$, bei der ersten und dritten Classe, je nachdem $\beta = 4n+2$ oder $= 4n$, bei der zweiten Classe, je nachdem $\beta = 4n$ oder $= 4n+2$; oder kürzer: bei der *ersten* und *dritten* Classe ist $\alpha - \beta$ in der Form $4n+3$, bei der *zweiten* in der Form $4n+1$ enthalten.

Ist nun A_h, und mithin auch x_h, ungerade, so mufs nach (83.), wenn das obere Zeichen gilt, $\alpha y_h = 4n+3$ oder $= 4n+1$ sein, je nachdem $\beta = 4n+2$ oder $= 4n$ und, wenn das untere Zeichen gilt, je nachdem $\beta = 4n$ oder $= 4n+2$ ist. Dem Vorhergehenden gemäfs mufs also $y_h = 4n+3$ oder $= 4n+1$ sein, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt, wenn A_h zur *ersten* oder *dritten* Classe gehört; gehört dagegen die Zahl zur *zweiten* Classe, so mufs, unter denselben Voraussetzungen, $y_h = 4n+1$ oder $= 4n+3$ sein. Namentlich gilt also *für alle Primzahlen von der Form* $8n+3$ der Satz, dafs, wenn eine solche Zahl zur *ersten* oder *dritten* Classe gehört, $y_h = D_h$ in der Form $4n+3$ oder $4n+1$ enthalten ist, je nachdem z eine gerade oder eine ungerade Zahl ist; dafs dagegen, wenn diese Zahl zur *zweiten* Classe gehört, $y_h = D_{h-1}$ in der Form $4n+3$ oder $4n+1$ enthalten ist, je nachdem z ungerade oder gerade ist. Da in letzterem Falle $D_h = 2D_{h-1}$ ist, so kann man auch sagen, wenn die Zahl zur ersten oder dritten Classe gehört, ist $D_h = 4n \mp 1$, und wenn sie zur zweiten gehört, $D_h = 8n \pm 2$, je nachdem z gerade oder ungerade ist.

Ist A_h eine gerade Zahl, so findet man dieselben Bestimmungen für y_h, wenn $\beta = 4n$; ist dagegen $\beta = 4n+2$, so ist umgekehrt bei der ersten und dritten Classe $y_h = 4n+1$ oder $= 4n+3$ und bei der zweiten $y_h = 4n+3$ oder $4n+1$, je nachdem z gerade oder ungerade ist. Da nun $\beta = 4n$ oder $= 4n+2$ ist, je nachdem bei der ersten und dritten Classe m' und bei der zweiten m_0 gerade oder ungerade ist, so kann man auch sagen: wenn A_h eine gerade Zahl ist, so wird, wenn diese Zahl zur ersten oder dritten Classe gehört, $y_h = 4n+3$ oder $= 4n+1$ sein, je nachdem $m'-z$ gerade oder

ungerade ist; gehört sie zur zweiten Classe, je nachdem $m_0 - z$ ungerade oder gerade ist. Da, wenn der Ausnahmefall nicht Statt findet, $y' = \beta - y$ ist, so folgt, dafs $y' = 4n \pm 1$ ist, wenn $y = 4n \mp 1$, sobald $\beta = 4n$, dagegen ist y' in derselben Form wie y enthalten sobald $\beta = 4n + 2$ ist. D. h. y' wird $= 4n \pm 1$ sein, je nachdem $y = 4n \mp 1$ ist, wenn bei der ersten und dritten Classe m' und bei der zweiten m_0 eine gerade Zahl ist; im entgegengesetzten Falle ist y' in derselben Form wie y enthalten. In dem Ausnahmefall ist $y' = 2\beta - y$, also $y' = 4n \pm 1$, wenn $y = 4n \mp 1$.

Man sieht, dafs sich diese Sätze noch etwas einfacher aussprechen lassen, wenn man die hier als ***erste*** Classe bezeichnete, die ***zweite*** nennt, und umgekehrt. Ich habe die von ***Jacobi*** angenommene Bestimmung der Classen beibehalten, um Verwirrung zu vermeiden, da ich mich früher auf dessen Erörterungen beziehen mufste.

34.

Bezeichnet man, wie in (§. 15.), durch $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\gamma'}{\delta'}$ bezüglich die reducirten Werthe der Kettenbrüche, deren Theilnenner

$$l, l_1, l_2, \ldots l_r,$$
$$l, l_1, l_2, \ldots l_{r-1},$$
$$l, l_1, l_2, \ldots l_r - 1$$

sind, indem man nur für α und β die ihnen gegenwärtig zukommenden Werthe annimmt, so findet sich, wenn man die dortigen Betrachtungen wiederholt, dafs $y = \delta$, $x = \gamma$, $y' = \delta'$, $x' = \gamma'$, wenn $r - z$ eine ***ungerade*** Zahl ist. Ist dagegen $r - z$ eine ***gerade*** Zahl, so ist $y' = \delta$, $x' = \gamma$, $y = \delta'$, $x = \gamma'$. Da nun $\delta' > \delta$ und $\gamma' > \gamma$ ist, so folgt, ***dafs die primäre oder die secundäre Stammzahl die kleinere ist, je nachdem $r - z$ ungerade oder gerade ist.*** Dieser Satz gilt jedoch nur unter der Beschränkung, dafs α weder ***negativ*** noch der ***Einheit*** gleich sei. Er beruht nemlich darauf, dafs $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ oder -1 ist, je nachdem r ungerade oder gerade, was nur dann richtig ist, wenn α positiv ist. Ferner setzt er voraus, dafs einerseits x, y andererseits γ, δ oder γ', δ' die kleinsten zusammengehörenden Werthe sind, welche der Gleichung $\alpha u - \beta v = \pm 1$ genügen, und keiner dieser Werthe Null ist. So lange α nicht $= \pm 1$ ist, ist dies richtig; im entgegengesetzten Falle aber ist $\delta = 1$, $\gamma = 0$. Gehört die primäre Stammzahl zur ***ersten*** oder ***zweiten*** Classe, so gilt demnach der Satz ohne Einschränkung. Unter dieser Voraussetzuug ist nemlich, wie früher nachgewiesen, α immer positiv. Auch

ist dann $\alpha > 1$. Hat nemlich der Kettenbruch, welcher der primären Stammzahl entspricht, periodische Glieder, so kann das erste periodische Glied, welches gröfser als die Einheit ist, nicht a_{z+1} sein (§. 31.), mithin ist $m' > 1$. Gehört nun die Zahl zur *ersten* Classe, so ist $\alpha = 2m_1^2 - m_0^2 > 1$, gehört sie zur *zweiten*, so ist $m' > 2m_0$, mithin $\alpha = m'^2 - 2m_0^2 > 1$. Hat der Kettenbruch keine periodischen Glieder, so kann er nur dann eine primäre Stammzahl sein, wenn man zwei oder mehr Perioden nimmt (§. 23.); dann gilt dasselbe.

Für die *dritte* Classe ist sowohl $\beta + \alpha$ als $\beta - \alpha$ positiv, also β immer gröfser als der absolute Werth von α. Entwickelt man $\frac{\alpha}{\beta}$ in einen Kettenbruch, so ist immer, mag α positiv oder negativ sein, $l = 0$. Ist α negativ und > 1, so ist auch γ negativ und $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ oder $= -1$, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Aber auch immer $\alpha y - \beta x = +1$ oder $= -1$, je nachdem z gerade oder ungerade ist. Mithin ist $\delta = y$, $\gamma = x$, wenn $r - z$ gerade und $\delta' = y$, $\gamma' = x$, wenn $r - z$ ungerade ist und folglich ist *in diesem Falle die primäre oder die secundäre Stammzahl die kleinere*, je nachdem $r - z$ *gerade* oder *ungerade*. Ist $\alpha = 1$, so ist $\gamma = 0$, $\delta = 1$, $\gamma' = 1$, $\delta' = \beta - 1$. Setzt man nun $\delta'' = \beta + 1$, $\gamma'' = \alpha$, so ist $y = \delta''$, $x = \gamma''$, $y' = \delta'$, $x' = \gamma'$, weil z gerade ist, wie früher (§. 29.) bemerkt wurde, d. h. es ist die secundäre Stammzahl die kleinere. Ist $\alpha = -1$, so ist $\gamma = 0$, $\delta = 1$, $\gamma' = -1$, $\delta' = \beta - 1$ und $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, $\alpha\delta' - \beta\gamma' = 1$. Setzt man $\delta'' = \beta + 1$, $\gamma'' = -1$, so ist $y = \delta''$, $y' = \delta'$, weil z ungerade ist, folglich ist wieder die secundäre Stammzahl die kleinere.

Die Zahl 594 z. B. ist eine primäre Stammzahl, welche zur *dritten* Classe gehört, die secundäre Stammzahl ist 347. Hier ist $\alpha = -7$, $\beta = 30$, also $\frac{\alpha}{\beta} = -\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}}$, mithin $r = 3$; auch ist $z = 2$, da hier $r - z$ ungerade ist, so mufs die secundäre Stammzahl die kleinere sein.

Auch 339 ist eine primäre Stammzahl, welche zur *dritten* Classe gehört, die secundäre ist 243. Hier ist $\alpha = -1$, $z = 1$, also die secundäre Stammzahl die kleinere.

Nennt man die Theilnenner $a_1, a_2, \ldots a_z$ die *bestimmenden* Glieder der *primären* Stammzahl, so sind $1, a_1 - 1, a_2, \ldots a_z$ die bestimmenden Glieder der *secundären*. Ist α positiv und gröfser als die Einheit, so ist, dem

Vorhergehenden zufolge, die Anzahl der bestimmenden Glieder, welche zu der kleineren der zwei conjugirten Stammzahlen gehört, gerade oder ungerade, je nachdem r ungerade oder gerade ist; das Umgekehrte findet Statt, wenn α negativ und gröfser als die Einheit ist.

In (§. 25.) wurde gefunden, dafs die primäre oder die secundäre Grundzahl, abgesehen vom Ausnahmefall, die kleinere ist, je nachdem q gröfser oder kleiner ist als $2a$. Aus dem Vergleich mit dem Vorhergehenden ergiebt sich, dafs q gröfser oder kleiner als $2a$ ist, je nachdem $r-z$ ungerade oder gerade, wenn α positiv und >1. Das Umgekehrte findet Statt, wenn α negativ und >1 ist. Nun sind a und b, welches $=q-(a+1)$ ist, bezüglich die gröfsten in der Quadratwurzel der primären und secundären Stammzahl enthaltenen Zahlen; es ist also b kleiner oder nicht kleiner als a, je nachdem $r-z$ gerade oder ungerade ist, wenn α positiv und >1. Umgekehrt verhält es sich, wenn α negativ und >1 ist.

Im Ausnahmefall ist immer $\alpha=\pm 1$ (§. 29.) und zugleich die primäre Stammzahl immer gröfser als die secundäre.

Schliefslich bemerke man noch Folgendes. Ist $A_h=x_h^2+2y_h^2$ eine Zahl, welche zur ***dritten*** Classe gehört, so mufs immer $y_h>x_h$ sein, da $\alpha y_h-\beta x_h=\pm 1$ und $\alpha<\beta$. Zu der dritten Classe kann also keine Zahl gehören, für welche $x_h\leqq\sqrt{\frac{A_h}{3}}$ ist.

Ferner kann man zu ***jeder*** ungeraden Zahl, die Einheit ausgenommen, welche man für y_h setzt, ein entsprechendes x_h finden, so dafs $A_h=x_h^2+2y_h^2$ entweder zur ***ersten*** oder zur ***dritten*** Classe gehört. Die kleinste Stammzahl aus der ***ersten*** Classe ist $22=2^2+2.3^2$, hier ist $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, bei der $h$ten daraus abgeleiteten Zahl $A_h=x_h^2+2y_h^2$ ist mithin $y_h=3+2h$. Die kleinste Stammzahl aus der ***dritten*** Classe ist $19=1+2.3^2$ und ebenfalls $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, also auch $y_h=3+2h$. Der Werth von y_h durchläuft also in beiden Fällen allmälich alle ganzen ungeraden Zahlen, die Einheit ausgenommen.

35.

Dafs die ***Primzahlen*** von der Form $8n+3$ ***nur auf eine Art*** in der Form x^2+2y^2 darstellbar sind (§. 27.), läfst sich mit Hülfe der Kettenbrüche, wie folgt, beweisen. Es sind dazu zwei Sätze nöthig, welche auch bei ähnlichen Betrachtungen mit gleichem Erfolge Anwendung finden.

Der eine Satz ist eine Verallgemeinerung eines schon früher (§. 12.) benutzten Satzes und lautet wie folgt:

Wenn alle Theilnenner eines Kettenbruchs in umgekehrter Ordnung wiederkehren, so dafs die Reihe dieser Theilnenner

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \alpha_m, \ldots \alpha_2, \alpha_1$$

ist und es sind alle Theilzähler $= 1$, mit Ausnahme des zu dem zweiten α_m gehörenden, welcher $= k$ ist, so wird, wenn M den Zähler, N den Nenner des reducirten Werths dieses Kettenbruchs bezeichnet, $N^2 + k$ durch M theilbar sein.

Denn es ist $M = (\alpha_1, \alpha_m)^2 + k(\alpha_1, \alpha_{m-1})^2$,

$$N = (\alpha_1, \alpha_m)(\alpha_2, \alpha_m) + k(\alpha_1, \alpha_{m-1})(\alpha_2, \alpha_{m-1}),$$

$$1 = [(\alpha_1, \alpha_m)(\alpha_2, \alpha_{m-1}) - (\alpha_1, \alpha_{m-1})(\alpha_2, \alpha_m)]^2$$

mithin $N^2 + k = [(\alpha_1, \alpha_m)^2 + k(\alpha_1, \alpha_{m-1})^2][(\alpha_2, \alpha_m)^2 + k(\alpha_2, \alpha_{m-1})^2]$.

Der andere Satz heifst:

Wenn M den Zähler, N den Nenner des Kettenbruchs

$$(84.) \quad \frac{M}{N} = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \ddots + \dfrac{1}{\alpha_m + \dfrac{1}{k.\alpha_m + \dfrac{k}{\alpha_{m-1} + \dfrac{1}{\alpha_{m-2} + \ddots + \dfrac{1}{\alpha_1}}}}}}$$

bezeichnet, so ist $N^2 + k$ durch M theilbar;

Denn es ist $M = k(\alpha_1, \alpha_m)^2 + (\alpha_1, \alpha_{m-1})^2$,

$$N = k(\alpha_1, \alpha_m)(\alpha_2, \alpha_m) + (\alpha_1, \alpha_{m-1})(\alpha_2, \alpha_{m-1}),$$

und $N^2 + k = [k(\alpha_1, \alpha_m)^2 + (\alpha_1, \alpha_{m-1})^2][k(\alpha_2, \alpha_m)^2 + (\alpha_2, \alpha_{m-1})^2]$.

In beiden Fällen ist also $N^2 \equiv -k \pmod{M}$.

Es sei nun A_h eine Primzahl $= x_h^2 + 2y_h^2$. Die Congruenz $u^2 \equiv -2 \pmod{A_h}$ hat also zwei Auflösungen. Ist die eine $u = u'$, so ist die andere $u = A_h - u'$. Von den Zahlen x_h und y_h, die keinen gemeinschaftlichen Factor haben, nehme man die gröfsere zum Zähler, die kleinere zum Nenner eines Bruchs und verwandele denselben in einen Kettenbruch, dessen Theilnenner $b_1, b_2, \ldots b_n$ sein sollen (während die Theilzähler alle $= 1$ sind). Je nachdem x_h oder y_h die gröfsere Zahl ist, hat man demnach $A_h = (b_1, b_n)^2 + 2(b_2, b_n)^2$ oder $A_h = (b_2, b_n)^2 + 2(b_1, b_n)^2$.

Es sei zuerst $x_h > y_h$. Man bezeichne durch $\frac{s}{s'}$ den Werth des Kettenbruchs dessen Theilnenner $b_n, b_{n-1}, \ldots b_1, b_1, b_2, \ldots b_n$ und dessen Theilzähler alle $= 1$ sind, denjenigen, welcher zu dem zweiten b_1 gehört, ausgenommen, welcher $= 2$ sein soll. Dann ist $s = (b_1, b_n)^2 + 2(b_2, b_n)^2 = A_h$, mithin $s' < A_h$; aber nach dem ersten, oben bewiesenen Satze ist $s^2 + 2$ durch s dividirbar, d. h. es ist $s'^2 \equiv -2 \pmod{A_h}$, also s' einer der zwei Werthe von u. Wäre nun noch $A_h = v^2 + 2z^2$, so müfsten v und z relative Primzahlen sein. Es sei zuerst $v > z$. Man verwandele $\frac{v}{z}$ in einen Kettenbruch, dessen Theilnenner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ sein sollen, während die Theilzähler sämmtlich $= 1$ sind. Mithin ist $A_h = (\alpha_1, \alpha_m)^2 + 2(\alpha_2, \alpha_m)^2$. Nun bilde man den Kettenbruch, dessen Theilnenner $\alpha_m, \ldots \alpha_1, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ und dessen Theilzähler alle $= 1$ sind, mit Ausnahme des zum zweiten α_1 gehörenden, welcher $= 2$ sein soll. Der Zähler des reducirten Werths dieses Kettenbruchs ist A_h, der Nenner heifse B. Mithin wäre $B < A_h$ und zugleich $B^2 \equiv -2 \pmod{A_h}$, folglich entweder $B = s'$ oder $B = A_h - s'$. Im ersten Falle wäre also $\frac{s}{s'} = \frac{A_h}{B}$, d. h. $(b_1, b_n) = (\alpha_1, \alpha_m)$; $(b_2, b_n) = (\alpha_2, \alpha_m)$, also auch $v = x_h$ und $z = y_h$. Im zweiten Falle wäre $\frac{A_h}{B} = 1 + \frac{1}{-1 + \frac{A_h}{s'}}$, d. h. wieder $(b_1, b_n) = (\alpha_1, \alpha_m)$; $(b_2, b_n) = (\alpha_2, \alpha_m)$ (Vergl. §. 12.).

Wäre aber $v < z$, so verwandele man $\frac{z}{v}$ in einen Kettenbruch, welcher wieder die Theilnenner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ haben soll, so dafs $A_h = (\alpha_2, \alpha_m)^2 + 2(\alpha_1, \alpha_m)^2$ ist. Nun bilde man den Kettenbruch

$$\alpha_m + \frac{1}{\alpha_{m-1} + \ddots + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{2\alpha_1 + \frac{2}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \ddots + \frac{1}{\alpha_m}}}}}},$$

so ist der Zähler des reducirten Werths $= A_h$; der Nenner heifse B. Nach dem zweiten oben bewiesenen Satze ist $B^2 \equiv -2 \pmod{A_h}$. Also ist entweder $B = s'$ oder $B = A_h - s'$. Im ersten Fall hätte man demnach

$$b_n + \frac{1}{b_{n-1} + \ddots + \frac{1}{b_1 + \frac{2}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \ddots + \frac{1}{b_n}}}}} = \alpha_m + \frac{1}{\alpha_{m-1} + \ddots + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{2\alpha_1 + \frac{2}{\alpha_2 + \ddots + \frac{1}{\alpha_m}}}}}.$$

Wäre nun $n=m$, so hätte man $b_n=\alpha_m$; $b_{n-1}=\alpha_{m-1}$, ... $b_1=\alpha_1$, also auch

$$\frac{2}{\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2+}\cdots+\frac{1}{\alpha_m}}=2\left[\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2+}\cdots+\frac{1}{\alpha_m}\right],$$

was nicht sein kann. Und eben so wenig können die beiden Kettenbrüche *gleich* sein, wenn nicht $n=m$ ist. Ebenso läfst sich zeigen, dafs auch nicht $B=A_h-s'$ sein kann. Es ist demnach bewiesen, dafs es keine zweite Darstellung der Zahl A_h in der Form x^2+2y^2 geben kann. Hierbei wurde vorausgesetzt, dafs $x_h>y_h$. Der Beweis bleibt aber im Wesentlichen derselbe, wenn $x_h<y_h$, sobald man nur durch $\frac{s}{s'}$ den Werth des Kettenbruchs

$$b_n+\frac{1}{b_{n-1}+}\cdots+\frac{1}{b_1+\dfrac{1}{2b_1+\dfrac{2}{b_2+\dfrac{1}{b_3+}\cdots+\dfrac{1}{b_n}}}}$$

bezeichnet.

Man sieht, dafs dieselben Betrachtungen auch den Beweis geben, dafs die Primzahlen von der *Form* $8n+1$ sich *nur auf eine Weise* in der Form x^2+2y^2 darstellen lassen, sobald nur nachgewiesen ist, dafs sie überhaupt in dieser Form darstellbar sind. Dasselbe gilt von dem Satze, dafs jede Primzahl von der Form $3n+1$ *nur auf eine Weise* durch x^2+3y^2 darstellbar ist, und überhaupt von dem allgemeinen und bekannten Satze, dafs jede Primzahl, die in der Form x^2+ky^2 darstellbar ist, wo k eine positive Zahl bedeutet, nur *eine* solche Darstellung zuläfst.

36.

Verbindet man die vorhergehenden Betrachtungen mit dem Schlusse von (§. 12.), so findet sich, dafs der Werth von $\frac{A_h}{\pi}$, welcher sich aus der Gleichung

$$\pi^2-A_hq^2=-2 \qquad (85.)$$

ergiebt (wo π dieselbe Bedeutung wie in (§. 16.) hat), in einen Kettenbruch von solcher Gestalt verwandelt werden kann, dafs sich daraus unmittelbar die Werthe von x_h und y_h ergeben, welche in der Gleichung $A_h=x_h^2+2y_h^2$ vorkommen. Ich will dies nur in der Kürze an Beispielen erläutern. Es sind hier nämlich vier Fälle zu unterscheiden.

Ist $A_h > \pi$, mithin $\pi > q^2$ und zugleich $x_h > y_h$, so betrachte man $\frac{\pi}{q^2}$ als den unmittelbar vorhergehenden Näherungswerth eines Kettenbruchs, dessen Werth $\frac{A_h}{\pi}$ ist. Daraus folgt vermöge der Gleichung (85.), dafs in diesem Kettenbruche die Theilnenner sich in umgekehrter Ordnung wiederholen, während die Theilzähler sämmtlich $=1$ sind, den mittleren ausgenommen, welcher $=2$ ist. Nennt man die sich wiederholenden Theilnenner $a, a_1, \ldots a_m$, so ergiebt sich $A_h = (a, a_m)^2 + 2(a, a_{m-1})^2$, also $x_h = (a, a_m)$ und $y_h = (a, a_{m-1})$. Dies ist z. B. bei der Zahl 411 der Fall, wo $x_h = 13$, $y_h = 11$ und $\pi = 223$, $q = 11$ ist. Man findet

$$\frac{411}{223} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2.1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}}}.$$

Ist $A_h > \pi$ und zugleich $x < y$, so betrachte man wieder $\frac{\pi}{q^2}$ als den $\frac{A_h}{\pi}$ vorausgehenden Näherungswerth. Hier aber läfst sich $\frac{A_h}{\pi}$ in einen Kettenbruch verwandeln, welcher in der Formel (84.) enthalten ist und man hat $x_h = (\alpha_1, \alpha_{m-1})$ und $y_h = (\alpha_1, \alpha_m)$. Ist z. B. $A_h = 187$, so ist $x_h = 5$, $y_h = 9$, $\pi = 41$, $q = 3$ und

$$\frac{187}{41} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2.1 + \cfrac{2.1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}.$$

Ist drittens $A_h < \pi$, also auch $\pi < q^2$ und zugleich $x > y$, so betrachte man $\frac{\pi}{A_h}$ als den $\frac{q^2}{\pi}$ unmittelbar vorausgehenden Näherungswerth. Dann läfst sich $\frac{q^2}{\pi}$ in einen Kettenbruch verwandeln, dessen Theilzähler sämmtlich $=1$ sind, mit Ausnahme des mittleren, welcher $=2$ ist, während eine in umgekehrter Ordnung sich wiederholende Reihe $a, a_1, \ldots a_m$ die Theilnenner bildet. Demnach ist $x_h = (a_1, a_m)$ und $y_h = (a_1, a_{m-1})$. Ist z. B. $A_h = 67 = 7^2 + 2.3^2$,

so ist $\pi = 221$, $q = 27$ und

$$\frac{27^2}{221} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}}}}.$$

Ist aber $A_h < \pi$ und zugleich $x < y$, so ist $\frac{\pi}{A_h}$ als der unmittelbar vorhergehende Näherungswerth von $\frac{q^2}{\pi}$ anzusehen, welcher letztere Ausdruck in einen Kettenbruch von der Form (84.) verwandelt werden kann. Dann ist $x = (\alpha_2, \alpha_{m-1})$ und $y = (\alpha_2, \alpha_m)$. Z. B. wenn $A_h = 459 = 11^2 + 2.13^2$ ist, so ist $\pi = 707$, $q = 33$ und

$$\frac{33^2}{707} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2.1 + \cfrac{2.1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}}}}}.$$

37.

Die Entwicklungen in den Paragraphen (27 bis 36) beziehen sich ausschliefslich auf die Zahlen, für welche der mittlere *Nenner* $= 2$ und die Anzahl der periodischen Theilnenner *gerade* ist. Für die Zahlen, bei welchen ebenfalls der mittlere Nenner $= 2$, jedoch die Anzahl der periodischen Theilnenner *ungerade* ist, finden ganz ähnliche Beziehungen Statt. Ich kann mich daher, indem ich mich auf die erwähnte Abhandlung von *Göpel* und auf das Vorhergehende beziehe, mit kürzeren Andeutungen begnügen. Einiges jedoch, was gänzlich unbemerkt geblieben ist, mufs ich ausführlicher besprechen.

Behält man die früheren Bezeichnungen bei und setzt zunächst wieder voraus, dafs das Mittelglied der Periode $= a$ ist, so hat man, wie *Göpel* beweist,

$$q = (m_1 + m_0)^2 - 2m_0^2; \qquad 2p' = (n + n_0)^2 - 2n_0^2$$

und zugleich

$$\mu = m' + m_0; \qquad \nu = m' - m_0.$$

Von den zwei Zahlen m' und m_0 mufs immer eine gerade, die andere ungerade sein, dagegen müssen n und n_0 beide ungerade sein.

Da $q'=2q$ ist, so folgt $2p'q=q_1^2-2$ und $q'=(m'+m_0)(n+n_0)-2m_0n_0$ und hieraus

$$A=\frac{(M+M_0)^2-2M_0^2}{q}.$$

Setzt man

$$x=\frac{2M_0m_0+(M+M_0)(m'+m_0)}{q},$$

$$y=\frac{m_0(M+M_0)+M_0(m'+m_0)}{q},$$

so läfst sich wieder zeigen, dafs x und y *ganze* Zahlen sind und es findet sich

$$A=x^2-2y^2.$$

Da $M=am'+n$; $M_0=am_0+n_0$ ist, so folgt, dafs M und M_0 beide ungerade sind, wenn a gerade ist; ist aber a ungerade, so wird M ungerade oder gerade und M_0 gerade oder ungerade sein, je nachdem m' gerade oder ungerade ist. Der Werth von y wird also immer ungerade oder A in einer der Formen $8k\mp2$, $8k+7$ enthalten sein; wie bekannt.

Alle diese Verhältnisse bleiben ungeändert, wenn man voraussetzt, dafs das Mittelglied $=a-1$ ist, sobald man nur auch hier wieder $2p'-q'$ statt $2p'$ setzt.

38.

Bezeichnen

$$\frac{\sqrt{A}+J_{-1}}{D_{-1}},\quad \frac{\sqrt{A}+J_0}{D_0},\quad \frac{\sqrt{A}+J}{D},\quad \frac{\sqrt{A}+J'}{D'}$$

die vier auf einander folgenden vollständigen Quotienten, aus welchen sich die Theilnenner a_{z-1}, a_z, a_{z+1}, a_{z+2} ergeben, so folgt zunächst aus den Gleichungen

$$\pm J=Am'm_0-MM_0 \text{ und}$$
$$\pm D_0=M_0^2-Am_0^2,$$

wenn man statt A seinen Werth $\frac{(M+M_0)^2-2M_0^2}{q}$ setzt:

$$D_0=y;\quad J=x-y,$$

und mithin, da $A=DD_0+J^2$ ist,

$$D=2x-3y;\quad D+D_0=2J.$$

Aus den letzten Gleichungen folgt, dafs D ungerade sein mufs. Da $x = J + y = J + D_0 = \frac{1}{2}(D + 3D_0)$ ist, so hat man

$$(86.) \quad A = \tfrac{1}{4}(D + 3D_0)^2 - 2D_0^2,$$

wodurch die Zerlegung der Zahl A in die Form $x^2 - 2y^2$ mittels der Nenner der vollständigen Quotienten nachgewiesen ist. Auch ergiebt sich hieraus eine zweite Zerlegung

$$(87.) \quad A = \tfrac{1}{4}(D_0 + 3D)^2 - 2D^2;$$

wie es schon *Göpel* bemerkt hat.

39.

Bei den Zahlen, welche in der Form $x^2 + 2y^2$ darstellbar sind, ergab sich eine Eintheilung derselben in drei verschiedene Classen von selbst, indem nicht blofs die entsprechenden Werthe von q nur in dreierlei Weisen in dieser Form dargestellt werden konnten, sondern auch diese Zahlen selbst konnten, sei es durch die vollständigen Quotienten, oder durch die Theilnenner, ebenfalls nur auf drei verschiedene Arten in der Form $x^2 + 2y^2$ dargestellt werden. Hier dagegen, bei den in der Form $x^2 - 2y^2$ darstellbaren Zahlen, findet man, sowohl für die Zahlen selbst, als für die entsprechenden q, ***nur eine,*** allen Zahlen gemeinsame Bildungsweise. Aus diesem Grunde scheint es *Göpel* wie *Jacobi* entgangen zu sein, dafs gleichwohl auch diese Zahlen in drei deutlich geschiedene Classen zerfallen, welche den früheren drei Classen völlig analog sind. Sowie nemlich die Zahlen von der Form $x^2 + 2y^2$ zu der *ersten, zweiten* oder *dritten* Classe gehören, je nachdem $D_0 = 2D$; $D = 2D_0$; oder $2D = D_0 + D_1$ und zugleich $a_{z+1} = 2$ ist, so sind auch bei den Zahlen von der Form $x^2 - 2y^2$ drei Classen zu unterscheiden, welche dadurch characterisirt werden, dafs eine Zahl zur *ersten, zweiten* oder *dritten* Classe gehört, je nachdem $D_{-1} = 2D$ und zugleich $a_{z+1} > 2$ oder $D_1 = 2D_0$ und zugleich $a_{z+1} < 2$ oder $D_{-1} + D_1 = D_0 + D$ und zugleich $a_{z+1} = 2$ ist.

Es läfst sich nemlich zunächst folgender Satz beweisen:

Von den zwei Theilnennern a_z und a_{z+1} ist entweder der eine kleiner, der andere gröfser als 2, oder beide sind $= 2$.

Denn aus den oben gegebenen Werthen von μ und ν folgt

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\frac{m'}{m_0} + 1}{\frac{m'}{m_0} - 1},$$

d. h.

$$a_{z+1}+\frac{1}{a_{z+2}+}\cdot\cdot+\frac{1}{a_m}=\frac{\frac{a_z,a_1}{a_{z-1},a_1}+1}{\frac{a_z,a_1}{a_{z-1},a_1}-1}.$$

Setzt man nun $\frac{\mu}{\nu}=a_{z+1}+f$, $\frac{a_z,a_1}{a_{z-1},a_1}=a_z+f'$, so sind f, f' echte Brüche und es ist

$$a_{z+1}+f=\frac{a_z+1+f'}{a_z-1+f'}.$$

Hier sind nun drei Fälle zu unterscheiden,

1) Ist $a_z=1$, so ist $a_{z+1}+f=\frac{2+f'}{f'}$, also $a_{z+1}\gtreqless 3$;

2) Ist $a_z\gtreqless 3$, so ist $a_z-1+f'>2$, mithin $a_{z+1}+f=1+\frac{2}{a_z-1+f'}<2$, also $a_{z+1}=1$;

3) Ist $a_z=2$, so ist $a_{z+1}+f=2+\frac{1-f'}{1+f'}$, mithin $a_{z+1}=2$.

Der erste periodische Theilnenner kann also bei den *primären* Stammzahlen, wenn sie zur ersten Classe gehören, nicht $=a_z$ und, wenn sie zur zweiten Classe gehören, nicht $=a_{z+1}$ sein.

40.

Setzt man nun in der bekannten Formel $J_0+J=a_zD_0$ für J und D_0 ihre in x und y ausgedrückten Werthe, so folgt

$$J_0=a_z.y-(x-y).$$

Substituirt man diesen Werth in $A=D_{-1}D_0+J_0^2$, indem man zugleich statt A seinen Werth x^2-2y^2 setzt, so ergiebt sich

$$D_{-1}=D+a_z(2J-a_zD_0).$$

Ist $a_z=1$, so folgt mithin $D_{-1}=2D$.

Auf dieselbe Weise findet sich aus den Gleichungen $J+J'=a_{z+1}D$ und $A=DD'+J'^2$

$$D'=D_0+a_{z+1}(2J-a_{z+1}D),$$

also, wenn $a_z\gtreqless 3$ ist,

$$D'=2D_0.$$

Ist aber $a_z=a_{z+1}=2$, so folgt aus den vorhergehenden Gleichungen:

$$D_{-1}=D+4(J-D_0),$$
$$D_1=D_0+4(J-D),$$

also, da $D+D_0=2J$ ist,

$$D_{-1}+D_1 = D_0+D.$$

Da in diesem Falle $J_0+J=2D_0$; $J+J'=2D$ ist, so folgt $J_0+J'=2J$.

Ist $a_z=1$, so hat man $A=2DD_0+J_0^2$. Nun ist zugleich $2A=2DD_0+2J^2$, also ist $A=2J^2-J_0^2$ oder

$$A = (2J+J_0)^2-2(J+J_0)^2,$$
$$A = (2J-J_0)^2-2(J-J_0)^2.$$

Der erste Ausdruck entspricht der Formel (86.), der zweite der Formel (87.).

Ist $a_{z+1}=1$, so findet man ebenso $A=2J^2-J'^2$ oder

$$A = (2J-J')^2-2(J-J')^2,$$
$$A = (2J+J')^2-2(J+J')^2,$$

den Formeln (86. und 87.) entsprechend.

Ist $a_z=2$, so erhält man

$$A = \left(\frac{J_0+3J}{2}\right)^2-2\left(\frac{J_0+J}{2}\right)^2,$$

$$A = \left(\frac{3J+J_1}{2}\right)^2-2\left(\frac{J+J_1}{2}\right)^2.$$

Wie also die Zahlen von der Form x^2+2y^2 auf drei verschiedene Arten durch die *Nenner* der vollständigen Quotienten dargestellt worden, so werden die Zahlen von der Form x^2-2y^2 auf drei verschiedene Arten durch die *Zähler* der vollständigen Quotienten, dargestellt. Also zerfallen diese letzteren Zahlen in drei Classen, und es läfst sich auch hier wieder durch ähnliche Betrachtungen, wie früher bei den Zahlen von der Form x^2+2y^2 nachweisen, dafs eine und dieselbe Zahl nicht zu verschiedenen Classen gehören kann, noch auf mehr als eine Art zu *derselben* Classe (sobald man die Formeln (86 und 87.) nur für eine einzige zählt).

Der *Ausnahmefall* gehört auch hier wieder zur *dritten* Classe (Vgl. §. 29.).

Berücksichtigt man auch hier nur die *Stammzahlen*, so findet sich, dafs diese, wie folgt, unter den drei Classen sich vertheilen. Es gehören zur

I. Classe: 31, 191, 206, 302, 311, 386, 487, 511, 526, 542, 599, 607, 622, 679, 686, 719, 743, 823, 862, 911, 991;

II. Classe: 7, 46, 94, 103, 151, 239, 263, 271, 343, 367, 382, 431, 463, 478, 479, 631, 734, 751, 766, 802, 863, 919, 926, 958, 974;

III. Classe: 71, 127, 199, 334, 391, 446, 647, 718, 878, 967.

Von diesen 56 Zahlen gehören mithin 21 zur ersten, 25 zur zweiten und 10 zur dritten Classe, so dafs auch hier die zwei ersten Classen die dritte stark überwiegen.

Wollte man nicht blofs die Stammzahlen berücksichtigen, so wären noch die Zahlen 158, 383, 706, 983 zur ersten, die Zahl 887 zur zweiten und die Zahlen 238, 503, 866 zur dritten Classe zu rechnen. Dann gehörten also 25 Zahlen zur ersten Classe, 26 zur zweiten und 13 zur dritten.

41.

Setzt man $\alpha = (m'+m_0)^2+2m_0^2$; $\beta = 2m_0(m'+m_0)$, so findet man auch hier

$$x_h = x+\alpha h, \quad y_h = y+\beta h, \quad A_h = (x+\alpha h)^2-2(y+\beta h)^2 \text{ und}$$
$$\alpha y_h-\beta x_h = \alpha y-\beta x = M_0 m'-m_0 M = \pm 1,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Anzahl der Theilnenner $a_1, a_2, \ldots a_z$ gerade oder ungerade ist. Bezeichnet man daher wieder durch D_h den Nenner des vollständigen Quotienten, aus welchem sich bei der Entwicklung von A_h in einen Kettenbruch, der Theilzähler a_z ergiebt, so findet sich, dafs, wenn A_h ungerade ist, D_h in der Form $4n+1$ oder $4n+3$ enthalten ist, je nachdem z gerade oder ungerade ist; ist A_h gerade, so ist D_h in der ersten oder in der zweiten Form enthalten, je nachdem m_0-z gerade oder ungerade ist.

Im ***Allgemeinen*** sind auch hier wieder die Werthe x und y, welche zur Stammzahl gehören, die kleinsten zusammengehörenden Werthe, die der Gleichung

$$(79.) \qquad \alpha z-\beta v = \pm 1$$

genügen. Gäbe es noch zwei kleinere Werthe x' und y' und setzte man $x = x'+\alpha h'$; $y = y'+\beta h'$, so hätte man

$$x^2-2y^2 = x'^2-2y'^2+2(\alpha x'-2\beta y')h'+(\alpha^2-2\beta^2)h'^2.$$

Nun ist $\alpha^2-2\beta^2 = q^2$ also $\alpha > \beta\sqrt{2}$, und da $\alpha y'-\beta x' = \pm 1$ ist, so mufs auch $x' > y'\sqrt{2}$ sein.

(Ist nemlich $\beta\sqrt{2}$ zwischen den ganzen Zahlen t und $t+1$ enthalten, so mufs α ***mindestens*** $= t+1$ sein. Wäre nun $x' < y'\sqrt{2}$, also $\beta x' < \beta\sqrt{2}.y'$, also auch $\beta x' < (t+1)y'$, so könnte die Gleichung $\alpha y'-\beta x' = -1$ gar nicht Statt finden, die Gleichung $\alpha y'-\beta x' = 1$ aber nur dann, wenn $y' = 1$, $\alpha = t+1$ und $\beta x' = t$ ist, dann wäre aber $x' = 1$, mithin $\alpha-\beta = 1$, was nicht sein kann, da $\alpha-\beta = m'^2+m_0^2$ ist).

Es wären mithin $x'^2 - 2y'^2$ und $\alpha x' - 2\beta y'$ positive Zahlen und $x^2 - 2y^2 > q$, was nicht sein kann, wenn nicht der Ausnahmefall Statt findet. Findet dieser Statt, so giebt es allerdings noch ***ein*** Paar zusammengehörende Werthe, welche beziehlich kleiner als x und y sind und der Gleichung (79.) genügen. Denn es ist $\alpha - 2\beta = m'^2 - m_0^2 - 2m_0 m'$. Setzt man nun wieder, wie in (§. 29.) a_1, $a_{z-2} = l$, so findet sich für den Ausnahmefall $\alpha - 2\beta = m'l - m_0^2 = \pm 1$. Die einfachsten Werthe, welche in diesem Falle der Gleichung (79.) entsprechen, sind also $u = 1$, $v = 2$. Diese Werthe können aber nicht zur Stammzahl gehören, da $2 = 2^2 - 2.1$ nicht zu den Zahlen gehört, deren mittlerer Nenner $= 2$ ist, vielmehr wird das nächste Paar Werthe $u = \beta + 1$, $v = \alpha + 2$ der Stammzahl entsprechen, da $(\alpha+2)^2 - 2(\beta+1)^2 > q^2$ ist.

Bezeichnet man wieder die secundäre Stammzahl durch B, so ist hier, abgesehen vom Ausnahmefall, $B = (x-\alpha)^2 - 2(y-\beta)^2$, wenn die primäre Stammzahl $= x^2 - 2y^2$ ist. Da nun x und y die ***kleinsten*** zusammengehörenden Werthe sind, welche der Gleichung (79.) entsprechen, so folgt $x < \alpha$, $y < \beta$. Setzt man daher $\alpha - x = x'$ und $\beta - y = y'$, so ist $B = x'^2 - 2y'^2$ und $\alpha y' - \beta x' = \mp 1$, je nachdem $\alpha y - \beta x = \pm 1$ ist; zugleich sind x' und y' die kleinsten Werthe, welche der Gleichung $\alpha z - \beta v = \mp 1$ genügen.

Im Ausnahmefall ist $B = (x-2\alpha)^2 - 2(y-2\beta)^2$. Nun ist $x = \alpha + 2 < 2\alpha$ und $y = \beta + 1 < 2\beta$, also, wenn man $2\alpha - x = x'$ und $2\beta - y = y'$ setzt, $B = x_1^2 - 2y_1^2$ und $\alpha y' - \beta x' = \mp 1$.

Behält man daher auch hier wieder die Bezeichnungen (§. 15.) bei, indem man nur für α und β die ihnen gegenwärtig zukommenden Werthe nimmt, so ergiebt sich, dafs, abgesehen vom Ausnahmefall, die primäre oder die secundäre Stammzahl die kleinere ist, je nachdem $r - z$ ungerade oder gerade ist. Im Ausnahmefall ist $x' = \alpha - 2$, $y' = \beta - 1$, während $x = \alpha + 2$, $y = \beta + 1$ ist; mithin ist die primäre Stammzahl gröfser als die secundäre, übereinstimmend mit (§. 25.).

Den Erörterungen in (§. 36.) analog kann auch die Gleichung $\pi^2 - A_h q^2 = 2$ benutzt werden um A_h in der Form $x_h^2 - 2y_h^2$ darzustellen; und zwar sind hier nur ***zwei*** Fälle zu unterscheiden, da $x_h > y_h$ ist. Ist $A_h > \pi$, so betrachte man $\frac{\pi}{q^2}$ als den unmittelbar vorhergehenden Näherungswerth von $\frac{A_h}{\pi}$; welcher letztere Ausdruck in einen Kettenbruch verwandelt ist, dessen Theilzähler sämmtlich $= 1$ sind, den mittleren ausgenommen, welcher $= -2$ ist,

indem zugleich die Theilnenner sich in umgekehrter Ordnung wiederholen. Bezeichnet man wieder durch a, a_1, a_2, ... a_m die sich wiederholenden Theilnenner, so ergiebt sich $x_h = a, a_m$, $y_h = a, a_{m-1}$. Ist dagegen $A_h < \pi$, also $\pi < q^2$, so betrachte man $\frac{\pi}{A_h}$ als den unmittelbar vorhergehenden Näherungswerth von $\frac{q^2}{\pi}$, dann läfst sich $\frac{q^2}{\pi}$ in einen Kettenbruch von der beschriebenen Art verwandeln und man erhält $x_h = a_1, a_m$; $y_h = a_1, a_{m-1}$.

Ist z. B. $A_h = 31$, so ist $\pi = 39$, $q = 7$, also

$$A < \pi \quad \text{und} \quad \frac{q^2}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{2}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}}},$$

mithin $x_h = 7$, $y_h = 3$. Ist $A_h = 158$, so ist $\pi = 88$, $q = 49$ und

$$\frac{A_h}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{2}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}}},$$

also $x_h = 16$, $y_h = 7$.

42.

Dafs es gelingt, die Zahlen A, welche der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ oder der Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 2$ entsprechen, mit Hülfe der Kettenbrüche direct in die ihnen beziehlich zukommende Form $t^2 + u^2$ oder $t^2 \pm 2u^2$ zu zerlegen, beruht, wie leicht zu sehen, auf dem Umstande, dafs die Divisoren dieser Formen, wie bekannt, immer von derselben Gestalt sind. Nun sind aber alle Divisoren der Zahlen von der Form $t^2 + 3u^2$ ebenfalls in dieser Form enthalten, mit Ausnahme der Divisoren, welche das Doppelte einer ungeraden Zahl sind. Genügt aber eine Zahl A der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -3$, so kann sie ebendeshalb nicht das Doppelte einer ungeraden Zahl sein; sie mufs mithin als Divisor von $x^2 + 3$ in der Form $t^2 + 3u^2$ enthalten sein, und es läfst sich demnach vermuthen, dafs auch diese Zerlegung direct durch Hülfe der Kettenbrüche geschehen könne. Dafs es wirklich der Fall ist, werden die folgenden Entwickelungen zeigen.

Ist a die gröfste in $\sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl, so kann A weder $= a^2+1$ noch $= a^2+2$ sein, wenn der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -3$ genügt werden soll, da unter diesen beiden Voraussetzungen in dem Kettenbruche, welcher $\sqrt{A}$ entspricht, kein Nenner eines vollständigen Quotienten $= 3$ ist. Es mufs also, wenn der Gleichung genügt werden soll, $A \geqq a^2+3$ sein. Alsdann mufs unter den vollständigen Quotienten, welche bei der Entwickelung von $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch vorkommen, einer enthalten sein, dessen Nenner $= 3$ ist. Bezeichnet man diesen vollständigen Quotienten durch $\frac{1}{3}(\sqrt{A}+i')$ und den daraus abgeleiteten Theilnenner durch k, so mufs k in der Reihe der Theilnenner eine *gerade* Stelle einnehmen. Man erhält $k = E\left[\frac{\sqrt{A}+i'}{3}\right]$, wenn man durch $E\left[\frac{m}{n}\right]$ die gröfste in $\frac{m}{n}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Ist $A = a^2+3$, so ergiebt sich unmittelbar, dafs der zweite vollständige Quotient den Nenner 3 hat, und es ist $k = E(\frac{2}{3}a)$. Je nachdem also $a = 3s,\ 3s+1,\ 3s+2$ ist, ist $k = 2s,\ 2s,\ 2s+1$. Zugleich ist k immer, und nur dann, das Mittelglied der Periode, wenn $a = 3s$ ist.

Ist $A = a^2+h$ und $h > 3$, so sei $\frac{\sqrt{A}+i}{d}$ der vollständige Quotient, der vor $\frac{1}{3}(\sqrt{A}+i')$ unmittelbar vorhergeht. Dann ist $i'^2 = A - 3d$. Nun kann d nicht gröfser als $2a-2$ sein. Wäre $d = 2a$, so müfste $i = a$ sein, man hätte also $\frac{\sqrt{A}+i}{d} = \frac{\sqrt{(a^2+h)}+a}{d}$, und der nächste vollständige Quotient wäre $\frac{\sqrt{A}+a}{\frac{h}{2a}}$ also $\frac{h}{2a} = 3$; was nicht sein kann, da sonst $a^2+h > (a+1)^2$ wäre. Ebenso zeigt sich, dafs nicht $d = 2a-1$ sein kann. Es ist demnach i'^2 *mindestens* $= A - 3(2a-2)$, d. h. mindestens $= a^2+4-3(2a-2)$, also jedenfalls $i'^2 > (a-3)^2$, oder mindestens $i' = a-2$. Folglich ist $k \geqq E\left[\frac{2a-2}{3}\right]$ und zugleich höchstens $= E[\frac{2}{3}a]$. Ist also $a = 3s$, so ist $k = 2s-1$ oder $= 2s$; ist $a = 3s+1$, so ist $k = 2s$; ist $a = 3s+2$, so ist $k = 2s$ oder $= 2s+1$. Ist $a = 3s$, so wird $k = 2s$ oder $= 2s-1$ sein, je nachdem k der mittlere Theilnenner ist, oder nicht. Denn im ersten Falle ist $i' = a$. Bezeichnet man den auf $\frac{1}{3}(\sqrt{A}+i')$ folgenden vollständigen Quotienten durch $\frac{\sqrt{A}+i''}{d''}$, so folgt daraus $i'' = a$, also $i'' = i'$; was wie bekannt immer und nur dann Statt findet, wenn k das Mittelglied ist. Aus demselben Grunde kann k nicht der mittlere Theilnenner sein, wenn $k = 2s-1$ ist.

Ist $A = 3s+2$, so beweist man ebenso, dafs $k = 2s$ oder $= 2s+1$ ist, je nachdem k der mittlere Theilnenner ist, oder nicht.

Das Vorhergehende zusammengefafst, giebt folgende allgemeine Regel. Ist k der mittlere Theilnenner, so ist $k = 2s = 2E[\frac{1}{3}a]$; im entgegengesetzten Falle ist $k = a-(s+1) = a-1-E[\frac{1}{3}a]$.

43.

Bezeichnet man durch $a, a_1, a_2, \ldots a_m$ die Reihe der Theilnenner, welche k vorausgehen, so erhält man, mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung,

$$p^2 - Aq^2 = -3,$$
$$Aqq_0 - pp_0 = -i';$$

woraus durch Elimination

$$i'q + 3q^0 = p$$

oder

$$\tfrac{2}{3}i'q + 2q^0 = \tfrac{2}{3}p$$

folgt.

Ist k kein Mittelglied, so ergeben sich hieraus folgende Fälle:

1) Ist $a = 3s$, also $k = 2s-1$, so hat man entweder $i' = 3s-1$ oder $i' = 3s-2$, d. h. entweder $2i' = 3k+1$ oder $2i' = 3k-1$ und demnach entweder

$$kq + 2q^0 = \tfrac{1}{3}(2p-q) \text{ oder}$$
$$kq + 2q^0 = \tfrac{1}{3}(2p+q).$$

2) Ist $a = 3s+1$, also $k = 2s$, so ist $i' = 3s-1$ oder $= 3s+1$, also $2i' = 3k \mp 2$, mithin

$$kq + 2q_0 = \tfrac{2}{3}(p \pm q).$$

3) Ist $a = 3s+2$, also $k = 2s+1$, so ist $i' = 3s+1$ oder $3s+2$, mithin ist $2i' = 3k-1$ oder $= 3k+1$ und entweder

$$kq + 2q^0 = \tfrac{1}{3}(2p+q) \text{ oder}$$
$$kq + 2q^0 = \tfrac{1}{3}(2p-q).$$

Demnach findet immer, sobald k nicht das Mittelglied ist, eine der vier Gleichungen

$$kq + 2q^0 = \tfrac{1}{3}(2p-q),$$
$$kq + 2q^0 = \tfrac{1}{3}(2p+q),$$
$$kq + 2q^0 = \tfrac{2}{3}(p+q),$$
$$kq + 2q_0 = \tfrac{2}{3}(p-q)$$

Statt. Setzt man für p seinen Werth $aq+q'$, so erhält man, je nachdem die erste, zweite, dritte oder vierte Gleichung gilt:

$$(88.)\quad (2a-1-3k)q = 2(3q^0-q'),$$
$$(89.)\quad (2a+1-3k)q = 2(3q^0-q'),$$
$$(90.)\quad (2a+2-3k)q = 2(3q^0-q'),$$
$$(91.)\quad (2a-2-3k)q = 2(3q^0-q').$$

Ist dagegen k das Mittelglied, so folgt schon aus der Gleichung (17.), dafs man in allen Fällen

$$kq+2q^0 = \tfrac{2}{3}p,$$

mithin auch

$$(2a-3k)q = 2(3q^0-q')$$

hat.

Hieraus ergiebt sich weiter, dafs immer eine der drei Gleichungen

$$q' = 3q^0,$$
$$q = 3q^0-q',$$
$$2q = 3q^0-q'$$

Statt finden wird. Ist k ***nicht*** das Mittelglied, so findet die ***erste*** Gleichung Statt, wenn $a=3s+2$ und zugleich die Gleichung (88.) zu nehmen ist, oder wenn $a=3s+1$ und die Gleichung (91.) zu nehmen ist. Dagegen gilt die ***zweite*** Gleichung, wenn $a=3s+2$ und die Gleichung (89.) Statt hat, oder $a=3s$ neben der Gleichung (88.). Die dritte Gleichung findet Statt, wenn $a=3s$ neben der Gleichung (89.) oder $a=3s+2$ neben der Gleichung (90.). Ist k das Mittelglied, so ist die erste, zweite oder dritte Gleichung zu nehmen, je nachdem $a=3s$, $3s+1$ oder $3s+2$ ist.

44.

Ist a_z irgend ein Theilnenner, welcher a_m vorausgeht, giebt man den Buchstaben m', n, m_0, n_0, M, M_0, μ, ν, dieselbe Bedeutung wie in (§. 27.), und setzt noch aufserdem a_{z+1}, $a_{m-1}=\mu_0$ und a_{z+2}, $a_{m-1}=\nu_0$, so erhält man

$$\frac{q}{q'} = \frac{\mu m'+\nu m_0}{\mu n+\nu n_0}; \qquad \frac{q_0}{p'} = \frac{\mu_0 m'+\nu_0 m_0}{\mu_0 n+\nu_0 n_0}.$$

Es sei nun zuerst $q'=3q^0$, mithin $\mu n+\nu n_0 = 3\mu_0 m'+3\nu_0 m_0$. Setzt man $\delta = \pm(\mu n-3\mu_0 m') = \pm(3\nu_0 m_0-\nu n_0)$, wo dasselbe Zeichen wie in der Gleichung $nm_0-m'n_0=\pm 1$ zu nehmen ist, so findet man, sobald man die Betrachtung wiederholt, welche ***Göpel*** in (§. 3.) seiner oben erwähnten Abhandlung angestellt hat, und $\delta^2+3=\varepsilon\varepsilon'$ setzt:

$$\mu = \delta m_0+\varepsilon m'; \qquad \nu = \delta m'+\varepsilon' m_0,$$
$$3\mu_0 = \delta n_0+\varepsilon n; \qquad 3\nu_0 = \delta n+\varepsilon' n_0.$$

Hieraus folgt

$$q = \frac{(\varepsilon m_1 + \delta m_0)^2 + 3m_0^2}{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon_1 m_0 + \delta m')^2 + 3m_1^2}{\varepsilon'}.$$

Nun ist $q' = 3q^0$ und $p'q - q_0 q' = 1$, also $p'q = 3q_0^2 + 1$ und $3p'q = q'^2 + 3$. Zugleich hat man

$$3p' = \frac{(\varepsilon n + \delta n_0)^2 + 3n_0^2}{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon' n_0 + \delta n)^2 + 3n^2}{\varepsilon'}.$$

Wenn man nun genau denselben Gang wie *Göpel* befolgt, so findet sich, dafs hier

$$3m' > \delta(\varepsilon' a_{z+1} - \delta) m' + \varepsilon_1(\varepsilon_1 a_{z+1} - \delta) m_0$$

sein mufs, während $\varepsilon' a_{z+1} - \delta$ positiv ist. Es sind also folgende sechs Fälle möglich, da δ nicht gröfser als 2 sein kann.

Ist $\delta = 0$, mithin $\varepsilon\varepsilon' = 3$, so ist entweder $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = 3$ oder $\varepsilon = 3$, $\varepsilon' = 1$.

Ist $\delta = 1$, mithin $\varepsilon\varepsilon' = 4$, und hat man zugleich $\varepsilon_1 a_{z+1} - \delta = 1$, also $\varepsilon' a_{z+1} = 2$, so ist entweder $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon = 4$, $a_{z+1} = 2$, oder $\varepsilon' = 2$, $a_{z+1} = 1$, $\varepsilon = 2$.

Ist aber $\delta = 1$, $\varepsilon\varepsilon' = 4$ und zugleich $\varepsilon' a_{z+1} - \delta = 2$, so ist $\varepsilon' = 1$, $a_{z+1} = 3$, $\varepsilon = 4$.

Ist $\delta = 2$, mithin $\varepsilon\varepsilon' = 7$ und $\varepsilon' a_{z+1} - \delta = 1$, so ist $\varepsilon' a_{z+1} = 3$, also $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon = 7$, $a_{z+1} = 3$.

Es giebt also immer einen Theilzähler a_z, für welchen einer der sechs folgenden Fälle Statt hat:

1) $q = m'^2 + 3m_0^2$; $3p' = n^2 + 3n_0^2$ und zugleich $\mu = m'$; $\nu = 3m_0$, also $a_z \gtreqless 3$,
2) $q = m_0^2 + 3m'^2$; $3p' = n_0^2 + 3n^2$ und zugleich $\mu = 3m'$; $\nu = m_0$, also $a_{z+1} \gtreqless 3$,
3) $q = (m_0 + m_1)^2 + 3m_1^2$; $3p' = (n_0 + n)^2 + 3n^2$ und zugleich $a_{z+1} = 2$,
4) $2q = (2m' + m_0)^2 + 3m_0^2$; $6p' = (2n + n_0)^2 + 3n_0^2$ und zugleich $a_{z+1} = 1$,
5) $q = (m_0 + m_1)^2 + 3m'^2$; $3p' = (n_0 + n)^2 + 3n^2$ und zugleich $a_{z+1} = 3$,
6) $q = (m_0 + 2m')^2 + 3m'^2$; $3p' = (n_0 + 2n)^2 + 3n^2$ und zugleich $a_{z+1} = 3$.

Je nachdem der *erste*, *zweite* u. s. w. Fall Statt findet, soll q zur *ersten*, *zweiten* u. s. w. *Classe* gerechnet werden. Man sieht, dafs q immer zur vierten Classe gehört, wenn es das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, während es zu einer anderen Classe gehören mufs, wenn es eine ungerade oder durch 4 theilbare Zahl ist.

45.

Ich werde hier, wie in (§. 16.), durch A die kleinste, durch A_h die $h$te darauf folgende Zahl bezeichnen, bei welchen nach dem Anfangsgliede die Theilnenner $a_1, a_2, \ldots a_m$ folgen, während der Nenner des nächstfolgenden vollständigen Quotienten $= 3$ ist. Man hat also, je nachdem q eine ungerade oder eine gerade Zahl ist,

$$A_h = (a+qh)^2 + \frac{2(a+qh)qq'+q'^2+3}{q^2},$$

$$A_h = (a+\tfrac{1}{2}qh)^2 + \frac{2(a+\tfrac{1}{2}qh)qq'+q'^2+3}{q^2}$$

und

$$A = \frac{a^2q+2aq'+\frac{q'^2+3}{q}}{q} = \frac{a^2q+2aq'+3p'}{q}.$$

Gehört q zur *ersten* Classe, so ist

$$3p'q = q'^2+3 = (m'n+3m_0n_0)^2+3(m'n_0-m_0n)^2,$$

also $q' = m'n+3m_0n_0$ und

$$A = \frac{(am'+n)^2+3(am_0+n_0)^2}{q} = \frac{M^2+3M_0^2}{q}.$$

Setzt man

$$x = \frac{Mm'-3M_0m_0}{q}; \quad y = \frac{Mm_0+M_0m'}{q},$$

so folgt $A = x^2+3y^2$. Nun sind x und y positiv, da $\mu > \nu$, d. h. $m' > 3m_0$ ist; sie sind aber auch *ganze* Zahlen, denn es ist

$$m'^2(M^2+3M_0^2)+3(m_0^2M^2-m'^2M_0^2) = M^2q,$$

folglich Mm_0+M_0m' durch q theilbar, d. h. y und mithin x ist eine ganze Zahl. Versteht man unter l den Werth q oder $\frac{1}{2}q$, je nachdem q eine ungerade oder gerade Zahl ist, und bezeichnet durch x_h und y_h das, was aus x und y wird, wenn man darin statt a den Werth $a+lh$ substituirt, so ergiebt sich

$$x_h = x+\frac{lh}{q}(m'^2-3m_0^2); \quad y_h = y+\frac{2lh}{q}m'm_0.$$

Ist q ungerade, also $l = q$, so versteht es sich von selbst, dafs x_h und y_h *ganze* Zahlen sind. Ist q gerade, also $\frac{l}{q} = \frac{1}{2}$, so müssen vermöge $q = m'^2+3m_0^2$, zugleich m_0 und m' ungerade sein, also ist $m'^2-3m_0^2$ gerade, mithin sind wieder x_h und y_h ganze Zahlen. Setzt man

$$m'^2-3m_0^2 = \alpha; \quad 2m'm_0 = \beta,$$

so ist demnach

$$(92.) \quad A_h = \left(x + \frac{lh}{q}\alpha\right)^2 + 3\left(y + \frac{lh}{q}\beta\right)^2.$$

Gehört q zur *zweiten* Classe, so findet sich

$$q' = m_0 n_0 + 3m'n \quad \text{und}$$

$$A = \frac{M_0^2 + 3M^2}{q}.$$

Setzt man

$$x = \frac{3Mm' - M_0 m_0}{q}; \quad y = \frac{Mm_0 + m'M_0}{q},$$

so ist $A = x^2 + 3y^2$ und es sind x und y nicht blofs *positive* sondern auch *ganze* Zahlen, wie aus

$$m_0^2(M_0^2 + 3M^2) + 3(m'^2 M_0^2 - m_0^2 M^2) = M_0^2 q$$

folgt. Setzt man hier

$$3m_1^2 - m_0^2 = \alpha; \quad 2m'm_0 = \beta,$$

so wird wieder A_h durch die Formel (92.) ausgedrückt.

Gehört q zur *dritten* Classe oder zur *fünften*, so erhält man

$$q' = (m_0 + m')(n_0 + n) + 3m'n \quad \text{und}$$

$$A = \frac{(M + M_0)^2 + 3M^2}{q}.$$

Setzt man

$$x = \frac{3Mm' - (M + M_0)(m' + m_0)}{q}; \quad y = \frac{M(m' + m_0) + m'(M + M_0)}{q},$$

so ist $A = x^2 + 3y^2$. Hier kann x negativ sein; dafs aber x und y *ganze* Zahlen sind, folgt aus der Gleichung

$$(m' + m_0)^2[(M + M_0)^2 + 3M^2] + 3[m'^2(M + M_0)^2 - M^2(m' + m_0)^2] = (M + M_0)^2 q;$$

auch wird wieder A_h durch (92.) ausgedrückt, wenn

$$\alpha = 3m'^2 - (m' + m_0)^2, \qquad \beta = 2m'(m' + m_0)$$

gesetzt wird.

Gehört q zur *vierten* Classe, so ist

$$q'^2 + 3 = 3p'q = [\tfrac{1}{2}((2m' + m_0)(2n + n_0) + 3m_0 n_0)]^2$$
$$+ 3[\tfrac{1}{2}((2m' + m_0)n_0 - m_0(2n + n_0))]^2,$$

mithin

$$q' = \tfrac{1}{2}((2m' + m_0)(2n + n_0) + 3m_0 n_0) \quad \text{und}$$

$$A = \frac{(2M + M_0)^2 + 3M_0^2}{2q}.$$

Setzt man

$$x = \frac{(2M+M_0)(2m'+m_0)-3M_0m_0}{2q}; \quad y = \frac{M_0(2m'+m_0)+m_0(2M+M_0)}{2q},$$

so erhält man $A = x^2+3y^2$. Hier sind nun x und y zwar *positive* Zahlen, aber nicht immer *ganze*. Man hat nemlich

$$(2m'+m_0)^2[(2M+M_0)^2+3M_0^2]+3[m_0^2(2M+M_0)^2-M_0^2(2m'+m_0)^2] = 2q(2M+M_0)^2;$$

es ist also $[m_0(2M+M_0)+M_0(2m'+m_0)][m_0(2M+M_0)-M_0(2m'+m_0)]$ durch $2q$ theilbar, d. h. der Ausdruck $m_0(2M+M_0)+M_0(2m'+m_0)$ ist durch q theilbar. Sind M_0 und m_0 nicht zugleich ungerade, so kann dieser Ausdruck nicht durch 4 theilbar sein, also auch nicht durch $2q$, weil q, wie oben bemerkt, wenn es zur vierten Classe gehört, immer das Doppelte einer ungeraden Zahl ist; sind dagegen M_0 oder m_0 beide ungerade, so wird der Ausdruck durch $2q$ theilbar sein, oder nicht, je nachdem einer der zwei Ausdrücke $m_0(2M+M_0)$ und $M_0(2m'+m_0)$ in der Form $4h+1$, der andere in der Form $4h+3$, oder beide in derselben Form enthalten sind. Setzt man daher $x=\frac{X}{2}$ und $y=\frac{Y}{2}$, so ist immer $A=\left(\frac{X}{2}\right)^2+3\left(\frac{Y}{2}\right)^2$, wo X und Y ganze Zahlen sind. Es sind aber nun drei Fälle zu unterscheiden. Sind X und Y beide gerade Zahlen, so setze man $A=x^2+3y^2$, wodurch A in *ganzen* Zahlen in die Form t^2+3u^2 zerlegt ist. Ist eine der Zahlen X und Y von der Form $4h+1$, die andere von der Form $4h+3$, so sind $X+Y$ und $X-3Y$ durch 4 theilbar und man erhält

$$A = \left(\frac{X-3Y}{4}\right)^2+3\left(\frac{X+Y}{4}\right)^2.$$

Setzt man also $\pm\frac{X-3Y}{4}=t$; $\frac{X+Y}{4}=u$, indem man t immer positiv annimmt, so ist

$$t = \pm\frac{Mm'-M_0m'-Mm_0-2M_0m_0}{q}; \quad u = \frac{Mm'+M_0m'+Mm_0}{q}.$$

Sind X und Y beide von der Form $4h+1$ oder beide von der Form $4h+3$, so sind $\frac{X+3Y}{4}$ und $\frac{X-Y}{4}$ ganze Zahlen, und man erhält

$$A = \left(\frac{X+3Y}{4}\right)^2+3\left(\frac{X-Y}{4}\right)^2.$$

Setzt man $\frac{X+3Y}{4}=t;\ \frac{X-Y}{4}=u$, so ist

$$t=\frac{Mm'+2Mm_0+2M_0m'+M_0m_0}{q};\quad u=\frac{Mm'-M_0m_0}{q}.$$

Sind X und Y beide gerade Zahlen und man setzt

$$\alpha=(2m'+m_0)^2-3m_0^2;\quad \beta=2m_0(2m'+m_0),$$

so hat man

$$x_h=x+\frac{h\alpha}{4};\quad y_h=y+\frac{h\beta}{4}\quad\text{und}$$

$$A_h=x_h^2+3y_h^2.$$

Ist m_0 eine ungerade Zahl, so sind α und β nur durch 2 und nicht durch 4 theilbar; man leite dann aus x_h und y_h, wie oben, andere Zahlen ab, so dafs A_h in *ganzen* Zahlen in die Form t^2+3u^2 zerlegt erscheint. Aehnliches gilt von den folgenden zwei Fällen.

Sind nemlich X und Y nicht beide von der Form $4n+1$, oder beide von der Form $4n+3$, so ist

$$\alpha=m'^2-2m'm_0-2m_0^2;\quad \beta=m'^2+2m_0m'$$

zu setzen, und wenn

$$t_h=t+\frac{h\alpha}{2};\quad u_h=u+\frac{h\beta}{2}$$

ist, so ist

$$A_h=t_h^2+3u_h^2.$$

Sind dagegen X und Y von derselben Form, so ist

$$\alpha=m'^2+4m'm_0+m_0^2;\quad \beta=m_1^2-m_0^2$$

zu setzen.

Es ist nun noch der Fall übrig, wenn q zur *sechsten* Classe gehört; alsdann ist

$$q'=(m_0+2m')(n_0+2n)+3m'n$$

und

$$A=\frac{(M_0+2M)^2+3M^2}{q}.$$

Setzt man

$$x=\frac{(M_0+2M)(m_0+2m')-3Mm'}{q};\quad y=\frac{(M_0+2M)m'+M(m_0+2m')}{q},$$

so ist $A = x^2+3y^2$. Hier sind x und y positive und zugleich ***ganze*** Zahlen, da

$$(m_0+2m')^2[(M_0+2M)^2+3M^2]+3[(M_0+2M)^2m_1^2-M^2(m_0+2m')^2] = q(M_0+2M)^2$$

ist. Ist $\alpha = (m_0+2m')^2-3m_1^2$; $\beta = 2m'(m_0+2m')$, so findet man wieder A_h durch die Formel (92.).

Alle diese Betrachtungen beziehen sich auf die Voraussetzung in (§. 44.), dafs $q' = 3q_0$. Ist $q = 3q_0 - q'$, so ist $q'^2+3 = q(3p'-q')$, und wenn $2q = 3q^0 - q'$ ist, so ist $q'^2+3 = q(3p'-2q')$. Es findet sich aber, dafs im ersten Falle $3p'-q'$ und im zweiten $3p'-2q'$ genau durch dieselbe Formel bestimmt wird, welche den Werth von $3p'$ unter der Voraussetzung $q' = 3q^0$ giebt. Da also q und q' dieselbe Form behalten, so gilt dies auch von der daraus abgeleiteten Zerlegung der Zahl A.

46.

Mit Hülfe des Vorhergehenden ist nun leicht nachzuweisen, dafs die Zerlegung der Zahl A auch mittels der vollständigen Quotienten geschehen kann. Man bezeichne wieder durch $\frac{\sqrt{A}+J_0}{D_0}$, $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$, $\frac{\sqrt{A}+J'}{D'}$ die drei auf einander folgenden vollständigen Quotienten, aus welchen sich beziehlich die Theilnenner a_z, a_{z+1}, a_{z+2} ergeben. Nun ist

$$\pm J = Am'm_0 - MM_0; \qquad \pm D = M^2 - Am_1^2.$$

Gehört q zur ***ersten*** Classe und substituirt man in J und D statt A seinen Werth $\frac{M^2+3M_0^2}{m'^2+3m_0^2}$, so findet sich $J = \frac{Mm-3M_0m_0}{q}$; $D = \frac{3(Mm_0+M_0m)}{q}$, also $J = x$; $D = 3y$. Nun ist $A = x^2+3y^2 = J^2+D_0D$ also $D_0 = y$ und mithin $A = J^2+3D_0^2$ und $D = 3D_0$.

Gehört q zur ***zweiten*** Classe, so findet man $J = x$; $D = y$, also $A = J^2+3D^2$ und zugleich $D_0 = 3D$.

Gehört q zur ***dritten*** Classe, so ergiebt sich $J = x+y$; $D = y$. Hieraus folgt $D_0 = 2(y-x)$. Nun ist $a_{z+1} = 2$, also $J+J' = 2D$, mithin $J' = y-x$, $D' = 2(x+y)$, also $D_0+D' = 4D$ und $A = \left(\frac{D'-D_0}{4}\right)^2+3D^2$.

Gehört q zur ***fünften*** Classe, so hat man ebenfalls $J = x+y$; $D = y$, $D_0 = 2(y-x)$, hier ist aber $a_{z+1} = 3$, also $J' = 2y-x$, $D' = 4x-y$, mithin $D'+2D_0 = 3D$ und $A = \left(\frac{2D'+D_0}{6}\right)^2+3D^2$.

Gehört q zur ***vierten*** Classe, so sind wieder die drei oben betrachteten Fälle zu unterscheiden. Man findet nemlich

$$J = \frac{2(Mm' - M_0 m_0)}{q}; \quad D = \frac{2(Mm' + M_0 m' + Mm_0)}{q}.$$

Sind also X und Y gerade, so hat man $J = x - y$; $D = x + y$, $D_0 = 2y = J'$ und $D' = x - y$, mithin $D_0 + D' = D$ und $A = \left(\frac{D+D'}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{D_0}{2}\right)^2$. Sind X und Y nicht zugleich von der Form $4h+1$ oder $4h+3$, so ist $J = u \pm t$; $D = 2u$, $D_0 = u \mp t = J'$; $D' = u \pm t$, also wieder $D_0 + D' = D$ und $A = \left(\frac{D'-D_0}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{D}{2}\right)^2$. Sind X und Y von derselben Form, so findet man $J = 2u$; $D = t + u$, $D_0 = t - u = J'$; $D' = 2u$, also auch in diesem Falle $D_0 + D' = D$; $A = \left(\frac{D+D_0}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{D'}{2}\right)^2$.

Gehört q zur *sechsten* Classe, so findet man $D = y$; $J = 2y - x$; $J' = x + y$; $D' = 2(y - x)$; $D_0 = 4x - y$, also $A = \left(\frac{2D_0+D'}{6}\right)^2 + 3D^2$ und $D_0 + 2D' = 3D$.

Das Resultat dieser Untersuchung läfst sich also wie folgt aussprechen.

Sobald eine Zahl A der Gleichnng $p^2 - Aq^2 = -3$ genügt, so finden sich unter den vollständigen Quotienten immer drei aufeinanderfolgende, die so beschaffen sind, dafs wenn man ihre Nenner D_0, D, D' und die entsprechenden Theilnenner a_z, a_{z+1}, a_{z+2} nennt, entweder $D = 3D_0$ und $a_z \gtreqless 3$, oder $D_0 = 3D$ und $a_{z+1} \gtreqless 3$, oder $D_0 + D' = D$ und $a_{z+1} = 1$, oder $D_0 + D' = 4D$ und $a_{z+1} = 2$, oder $D' + 2D_0 = 3D$ und $a_{z+1} = 3$, oder $D_0 + 2D' = 3D$ und $a_{z+1} = 3$ ist.

In (§. 31.) wurde nachgewiesen, dafs von den drei Relationen, welche dort zwischen den drei Nennern der vollständigen Quotienten, die zu a_z, a_{z+1}, a_{z+2} gehören, Statt finden, nicht eine mehrmals und nicht mehrere zugleich vorkommen können. Hieraus ergab sich weiter, dafs obgleich die Zahlen A, welche der Gleichung $p^2 - Aq^2 = -2$ genügen, im Allgemeinen auf verschiedene Weise in der Form $t^2 + 2u^2$ ausgedrückt werden können, dafs jedoch nur eine einzige dieser Zerlegungen durch die Nenner der vollständigen Quotienten dargestellt werden kann. In dem dortigen Falle konnten die Zahlen p und q nur einen einzigen Werth haben, weil es aufser dem mittleren Nenner keinen andern $= 2$ giebt, und man konnte eben deswegen die Zahlen A nach den ihnen entsprechenden q in Classen theilen.

In dem gegenwärtigen Falle, wo die Zahl A der Gleichung

$$p^2 - Aq^2 = -3$$

Genüge leisten soll, findet ein ganz ähnliches Sachverhältnifs Statt, wenn innerhalb der ersten Periode unter den Nennern der vollständigen Quotienten nur ein einziger $= 3$ vorkommt, der dieser Gleichung genügt. Dies wird immer der Fall sein, wenn die Periode *kein* Mittelglied enthält; denn nimmt der Nenner 3 in der ersten Hälfte der Periode eine gerade Stelle ein, so wird er in der zweiten Hälfte eine ungerade Stelle einnehmen, und umgekehrt. Das gleiche findet Statt, wenn ein mittlerer Nenner vorhanden ist, der selbst $= 3$ ist, da dann kein anderer Nenner diesen Werth haben kann. Geht dagegen, dem mittleren Nenner ein Nenner $= 3$ voraus, welcher in *gerader* Stelle steht, so mufs auch der nach dem mittleren Nenner vorhandene Nenner $= 3$ in *gerader* Stelle stehen. Dann giebt es also zwei Werthe von q, welche der Gleichung $p^2 - Aq^2 = -3$ entsprechen; es wird also auch eine Relation doppelt, oder es werden zwei verschiedene Relationen zugleich vorkommen.

Ist z. B. $A=133$, so findet sich in der Reihe der Nenner der vollständigen Quotienten die Zahl 3 in der *vierten* und in der *vierzehnten* Stelle, und zugleich findet sich die Relation $D_0 + D' = D$ nebst $a_{z+1} = 1$ *zweimal*. Einmal sind die drei aufeinander folgenden Nenner 1, 12, 11 und dann 4, 13, 9. Demgemäfs hat man $133 = 5^2 + 3.6^2 = 11^2 + 3.2^2$. Bei der Zahl 163 dagegen findet man die Gruppe 6, 7, 9, welche der Relation $D' + 2D_0 = 3D$ nebst $a_{z+1} = 3$ entspricht; dann hat man auch die Gruppe 11, 14, 3, welche der Relation $D_0 + D' = D$ und $a_{z+1} = 1$ entspricht; hieraus folgt $163 = 4^2 + 3.7^2$, man mag die erste oder die zweite Relation benutzen.

Berücksichtigt man die Anmerkung in (§. 23.), so ist leicht zu sehen, dafs es auch hier immer zwei Zahlen giebt, die ein ganz ähnliches Verhältnifs zu einander haben, wie diejenigen, welche ich *conjugirte* Stammzahlen genannt habe; und giebt man den Gröfsen α, β, x, y, die ihnen hier, nach dem Vorhergehenden, zukommenden Werthe, so kann man an die Betrachtung des Ausdrucks $\alpha y - \beta x$ ähnliche Resultate knüpfen, wie in den früher betrachteten Fällen, welche ich deshalb nicht weiter entwickele.

47.

Zum Schlusse dieser Abhandlung will ich die Anwendung der Grundzahlen und Stammzahlen bei Berechnung einer *Pell*'schen Tafel daran nach-

GENERAL LIBRARY University MICHIGAN

weisen, dafs ich zeige, für wie viel Zahlen unter 1000 der ihnen entsprechende Kettenbruch sich unmittelbar aus dem der Zahl 2 entsprechenden Kettenbruch ableiten läfst.

Ich werde mich dabei folgender Abkürzungen bedienen. Die ***Periode*** welche einer ***Grundzahl*** und das ***Schema***, welches einer ***Stammzahl*** entspricht, werde ich in ***eckige Klammern*** einschliefsen, so dafs z. B. [2, 2, 2] bedeutet, dafs die Periode aus den Theilnennern 2, 2, 2 besteht; die Periode der ***conjugirten*** Grundzahlen und Stammzahlen werden durch ein vorgesetztes ***C*** bezeichnet werden. Die Zahlen, welchen eine gewisse Periode zukommt, stehen hinter derselben mit = verbunden. Das Zeichen * vor einer Zahl bedeutet, dafs sie schon früher vorgekommen ist, und [0,(***D***)] ein Schema, in welchem gar kein periodischer Theilnenner vorhanden ist.

Urzahl 2. (§. 10.)

[0] = 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101, 122, 145, 170, 197, 226, 257, 290, 325, 362, 401, 442, 485, 530, 577, 626, 677, 730, 785, 842, 901, 962.

[2] = 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210, 240, 272, 306, 342, 380, 420, 462, 506, 552, 600, 650, 702, 756, 812, 870, 930, 992.

[2,2] = 41, 130, 269, 458, 697, 986.

C.[1,1,1,1] = 13, 74, 185, 346, 557, 818.

[2,2,2] = 55, 180, 377, 646, 987.

C.[1,1,2,1,1] = 21, 112, 275, 510, 817.

[2,2,2,2] = 925.

C.[1,1,2,2,1,1] = 761.

Grundzahl 5.

[4] = 18, 39, 68, 105, 150, 203, 264, 333, 410, 495, 588, 689, 798, 915.

[4,4] = 370.

C.[1,3,3,1] = 218.

Grundzahl 10.

[6] = 38, 84, 148, 230, 330, 448, 584, 738, 910.

Grundzahl 17.

$$[8] = 66,147,260,405,582,791.$$

Grundzahl 26.

$$[10] = 102,228,404,630,906.$$

Grundzahl 37.

$$[12] = 146,327,580,905.$$

Grundzahl 50.

$$[14] = 198,444,788.$$

Grundzahl 65.

$$[16] = 258,579.$$

Grundzahl 82.

$$[18] = 326,732.$$

Grundzahl 101.

$$[20] = 402,903.$$

Grundzahl 122.

$$[22] = 486.$$

Grundzahl 145.

$$[24] = 578.$$

Grundzahl 170.

$$[26] = 678.$$

Grundzahl 197.

$$[28] = 786.$$

Grundzahl 226.

$$[30] = 902.$$

Grundzahl 6.

$$[2,4,2] = 155,504.$$

$$C.[1,1,4,1,1] = 57,308,759.$$

Grundzahl 12.

$$[2,6,2] = 305,990.$$

$$C.[1,1,6,1,1] = 111,602.$$

Grundzahl 20.

$$[2,8,2] = 505.$$

$$C.[1,1,8,1,1] = 183,994.$$

Grundzahl 30.

$[2,10,2] = 755.$

$C.[1,1,10,1,1] = 273.$

Grundzahl 42.

$[2,12,2] =$ ———

$C.[1,1,12,1,1] = 381.$

Grundzahl 56.

$[2,14,2] =$ ———

$C.[1,1,14,1,1] = 507.$

Grundzahl 72.

$[2,16,2] =$ ———

$C.[1,1,16,1,1] = 651.$

Grundzahl 90.

$[2,18,2] =$ ———

$C.[1,1,18,1,1] = 813.$

Grundzahl 110.

$[2,20,2] =$ ———

$C.[1,1,20,1,1] = 993.$

Stammzahl 6.

$[2,4,(2)] = 131,418,867.$

$C.[1,1,3,1,(2)] = 43,242,603.$

Stammzahl 12.

$[0,(3)] =$ *39, *84, *147, *228, *327, *444, *579, *732, *903.

Stammzahl 55.

$[2;(5)] =$ *155, *305, *505, *755.

Stammzahl 180.

$[2,(9)] =$ *504, *990.

Stammzahl 21.

$[1,1,(3)] =$ *57, *111, *183, *273, *381, *507, *651, *813, *993.

Stammzahl 112.

$[1,1,(7)] =$ *308, *602, *994.

Stammzahl 275.

$[1,1,(11)] =$ *759.

Demnach sind aus dem der Zahl 2 entsprechenden Kettenbruche für 163 Zahlen die entsprechenden Kettenbrüche abgeleitet, d. h. für mehr als den sechsten Theil aller hier in Betracht kommenden Zahlen, da unter den ersten tausend Zahlen 969 *nicht quadratische* Zahlen sind. Genau genommen liefsen sich aber die noch vielen andern Zahlen entsprechenden Kettenbrüche daraus ableiten. Insofern nemlich der Zahl 6 das Schema $[0,(2)]$ entspricht, kann man daraus die Grundzahl finden, welcher dieses Schema zukommt, dies ist die Zahl 3; man kann also den dieser letzteren Zahl entsprechenden Kettenbruch, und mithin auch alle wieder aus diesem abgeleiteten, als aus dem der Zahl 2 entsprechenden abgeleitet ansehen.

Göttingen, im August 1854.

2.

Über Reihenentwicklungen, welche nach den Potenzen eines gegebenen Polynoms fortschreiten, und zu Coefficienten Polynome eines niedereren Grades haben.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch *C. W. Borchardt*.)

1.

Lösung der Aufgabe nach der Methode der Entwicklungs-Coefficienten.

Wenn man eine Function von x nach den Potenzen eines endlichen Polynoms:

$$\boldsymbol{P} = p + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

entwickelt, so kann diese Entwicklung

$$(1.) \qquad \alpha + \alpha_1 \boldsymbol{P} + \alpha_2 \boldsymbol{P}^2 + \alpha_3 \boldsymbol{P}^3 + \cdots = f(x)$$

wenn α, α_1, α_2, ... constante, nicht vieldeutige Coefficienten bedeuten, für jeden gegebenen Werth von $\boldsymbol{P}$ nur für *einen* der n Werthe von x gültig sein, welche dem gegebenen Werthe von $\boldsymbol{P}$ entsprechen. Convergirt nämlich die Reihe für einen gegebenen Werth $\boldsymbol{P} = b$, so hat sie einen vollkommen bestimmten Werth; die Function $f(x)$ aber erhält, wenn man für x die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\boldsymbol{P} = b$ setzt, n verschiedene Werthe, und es kann nur einer derselben mit dem Werthe der Reihe

$$\alpha + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 + \cdots$$

übereinstimmen.

Wenn aber die Coefficienten keine Constanten, sondern Polynome des $(n-1)$ten Grades von x bedeuten, so kann die Gleichung (1.) für alle n Werthe von x gelten, welche demselben Werthe von $\boldsymbol{P}$ entsprechen. Bezeichnet man in diesem Falle mit

$$\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,\ \ldots\ \boldsymbol{X}_{n-1}$$

Polynome vom $(n-1)$ten Grade, so kann man der Reihe (1.) immer die Form

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{S}_1 + \cdots + \boldsymbol{X}_{n-1} \boldsymbol{S}_{n-1} = f(x)$$

geben, in welcher $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_1$, ... $\boldsymbol{S}_{n-1}$ nach den Potenzen von $\boldsymbol{P}$ fortschreitende

Reihen mit *constanten* Coefficienten bedeuten, und es wird die Gleichung (1.) für alle Werthe von x gelten, für welche die Gröfse P solche Werthe erhält, dafs die n Reihen S, S_1 ... convergiren.

Wenn die Function $f(x)$ ebenfalls ein endliches Polynom ist, so wird die Reihe (1.) immer abbrechen.

Man findet dann den Coefficienten α als Rest der Division von $f(x)$ durch P; nennt man den Quotienten dieser Division $f_1(x)$, so findet man α_1 als Rest der Division von $f_1(x)$ durch P, u. s. f.

Diese Methode, die Coefficienten α, α_1, etc. zu bestimmen, ist aber nicht mehr anwendbar, wenn $f(x)$ nach den Potenzen von x *ins Unendliche* fortschreitet.

Für diesen Fall kann man den Coefficienten des allgemeinen Gliedes α_i, wenn man die Möglichkeit der Entwicklung (1.) voraussetzt, durch folgende Betrachtungen finden.

Man dividire nämlich die Gleichung (1.), in welcher $f(x)$ eine nach den ganzen positiven Potenzen von x entwickelte Reihe bedeute, durch P^{i+1}, und entwickle jeden Term des hierdurch erhaltenen Ausdrucks:

$$(2.)\quad \frac{\alpha}{P^{i+1}} + \frac{\alpha_1}{P^i} + \cdots + \frac{\alpha_i}{P} + \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}P + \text{etc.} = \frac{f(x)}{P^{i+1}}$$

nach den *absteigenden* Potenzen von x, so erhält man aus der Entwicklung der Terme

$$\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}P + \cdots \text{etc.}$$

gar keine negativen Potenzen von x; die aus der Entwicklung von $\frac{\alpha_i}{P}$ entstehenden negativen Potenzen von x beginnen von $\frac{1}{x}$, weil die Polynome α, α_1, etc. um einen Grad niedriger als P sein sollen; die aus der Entwicklung von $\frac{\alpha_{i-1}}{P^2}$ hervorgehenden negativen Potenzen von x beginnen mit $\frac{1}{x^{n+1}}$, u. s. f.

In dem Producte

$$f(x)\frac{1}{P^{i+1}},$$

in welchem der eine Factor $f(x)$ nach den aufsteigenden, der andre $\frac{1}{P^{i+1}}$ nach den absteigenden Potenzen von x entwickelt ist, kann daher das Aggregat derjenigen Terme, welche in

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \cdots \quad \frac{1}{x^n}$$

multiplicirt sind, nur aus der Entwicklung eines einzigen Terms, des dem Bruche $\frac{f(x)}{P^{i+1}}$ gleichen Ausdrucks (2.), nämlich des Terms $\frac{\alpha_i}{P}$, hervorgehen, weil, wie man gesehen hat, jeder Term $\frac{\alpha_{i+k}}{P^{1-k}}$ nur positive Potenzen von x, und jeder Term $\frac{\alpha_{i-k}}{P^{1+k}}$ nur höhere Potenzen von $\frac{1}{x}$ als $\frac{1}{x^n}$ giebt

Wenn man demnach dieses Aggregat mit:

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots+\frac{A_n}{x^n}$$

bezeichnet, so hat man:

$$(3.)\quad \frac{\alpha_i}{P} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots+\frac{A_n}{x^n}+\cdots \text{ etc.}$$

wo die auf $\frac{A_n}{x^n}$ folgenden Glieder nur höhere Potenzen von $\frac{1}{x}$ als die $n$te enthalten. ***Multiplicirt man daher den Theil der Entwicklung von*** $\frac{f(x)}{P^{i+1}}$, ***welcher nur die negativen Potenzen von*** x ***enthält mit*** P ***und behält in dem Producte nur die positiven Potenzen von*** x ***bei, so erhält man den gesuchten Coefficienten*** α_i. Denn dieser Theil der Entwicklung von $\frac{f(x)}{P^{i+1}}$ weicht, dem Vorstehenden zufolge, von der Entwicklung von $\frac{\alpha_i}{P}$ nur in den Potenzen von $\frac{1}{x}$ ab, welche höher als die $n$te sind, und diese geben mit P multiplicirt, keine positive Potenz von x.

Wenn $F(x)$ eine Reihe ist, welche gleichzeitig positive und negative Potenzen von x enthält, so kann man den blos die negativen Potenzen von x enthaltenden Theil dieser Reihe besonders darstellen. Derselbe wird nämlich, wie ich in den Disquis. Analyt. de fractionibus simplicibus gezeigt habe, der Coefficient von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung des Bruches:

$$\frac{F(h)}{x-h},$$

wenn man diese Entwicklung nach den aufsteigenden Potenzen von h, den absteigenden von x anstellt.

Hiernach wird für unsern Fall der Theil der Entwicklung von $\frac{f(x)}{P^{i+1}}$, welcher nur die negativen Potenzen von x enthält, der Coefficient von $\frac{1}{h}$

in der Entwicklung des Bruches:

$$\frac{f(h)}{\{P(h)\}^{i+1}(x-h)}.$$

Um α_i zu erhalten, hat man diesen Ausdruck, zufolge des im Vorstehenden Bewiesenen, mit P zu multipliciren, und im Producte:

$$\frac{P}{x-h} = P\left(\frac{1}{x}+\frac{h}{x^2}+\frac{h^2}{x^3}+\frac{h^3}{x^4}+\cdots \text{ etc.}\right)$$

nur die positiven Potenzen von x, die Constante mit eingeschlossen, beizubehalten. Wenn man:

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots+p_nx^{n-1} \\ P_2 &= p_2+p_3x+p_4x^2+\cdots+p_nx^{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n &= p_n \end{aligned}$$

setzt, so folgt hieraus, dafs α_i der Coefficient von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung von $\{P_1+P_2h+P_3h^2+\cdots+P_nh^{n-1}\}\frac{f(h)}{\{P(h)\}^{i+1}}$ ist. Giebt man demnach dem Polynome $(n-1)$ten Grades, welchem der gesuchte Coefficient α_i gleich ist, die Form:

$$\begin{aligned} &\beta_1^{(i)}\{p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots+p_nx^{n-1}\} \\ &+\beta_2^{(i)}\{p_2+p_3x+p_4x^2+\cdots+p_nx^{n-2}\} \\ &+\beta_3^{(i)}\{p_3+p_4x+\cdots\cdots\cdots+p_nx^{n-3}\}+\cdots+\beta_n^{(i)} = \alpha_i \end{aligned}$$

wo $\beta_1^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$, ... $\beta_n^{(i)}$ Constanten sind, so wird $\beta_k^{(i)}$ der Coefficient von $\frac{1}{h^k}$ in der Entwicklung von

$$\frac{f(h)}{\{P(h)\}^{i+1}}$$

oder, wenn man x für h schreibt gleich *dem Coefficienten von* $\frac{1}{x^k}$ *in der Entwicklung des Bruchs*

$$\frac{f(x)}{P^{i+1}}.$$

Wenn $f(x)$ eine unendliche Reihe ist, so wird $f(x)\frac{1}{P^{i+1}}$ ein Product, dessen einer Factor nach den positiven, der andre nach den negativen Potenzen von x in's Unendliche fortschreitet, und daher jeder Coefficient dieses Productes ebenfalls eine unendliche Reihe. Man kann aber, wenn man die Factorenzerfällung von P kennt, die Coefficienten der negativen Potenzen in diesem Producte oder die Gröfsen $\beta_k^{(i)}$ auf folgende Art durch einen endlichen

Ausdruck darstellen. Zufolge der von mir in den angeführten Untersuchungen über Partialbrüche gegebenen Sätze wird nämlich der Theil der Entwicklung von $\frac{f(x)}{P^{i+1}}$, welcher blofs die negativen Potenzen von x enthält, der Coefficient von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung der Summe:

$$\Sigma \frac{f(x_1+h)}{\{P(x_1+h)\}^{i+1}(x-x_1-h)},$$

wenn man diese Summe über alle Wurzeln x_1 der Gleichung $P=0$ ausdehnt, und die Entwicklung nach den aufsteigenden Potenzen von h, den absteigenden von x anstellt *). Es wird daher der Coefficient von $\frac{1}{x^k}$ in der Entwicklung von $\frac{F(x)}{P^{i+1}}$ oder die Gröfse $\beta_k^{(i)}$ gleich dem Coefficienten von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung von

$$\Sigma \frac{(x_1+h)^{k-1} f(x_1+h)}{\{P(x_1+h)\}^{i+1}}.$$

Setzt man $P = p_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, so wird $\beta_k^{(i)}$ gleich dem Coefficienten von h^i in der Entwicklung von

$$\frac{1}{p_n^{i+1}} \Sigma \frac{(x_1+h)^{k-1} f(x_1+h)}{\{(x_1+h-x_2)(x_1+h-x_3)\dots(x_1+h-x_n)\}^{i+1}}$$

oder

$$\beta_k^{(i)} = \frac{1}{p_n^{i+1}} \Sigma \frac{\partial^i \frac{x_1^{k-1} f(x_1)}{\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)\}^{i+1}}}{1.2\dots i.\partial x_1^i}$$

wo man während der Differentiationen nach einer der Gröfsen $x_1, x_2, \dots, x_n$ immer die andern sämmtlich als constant anzusehen hat.

§. 2.

Lösung der Aufgabe mittelst der *Lagrange*schen Reihe.

Man kann zu diesen Resultaten auch durch folgende Betrachtungen mit Hülfe der *Lagrange*schen Reihe gelangen.

Wenn man das Polynom

$$P = y$$

*) Aehnliche Sätze hat Hr. *Cauchy* fast um dieselbe Zeit in seinen *Exercices d'Analyse* aufgestellt, und ihnen eine sehr grofse Entwicklung gegeben, so dafs er es für nöthig gehalten hat, dafür neue Benennungen und Zeichen einzuführen, und daraus einen eignen Calcul zu machen, den er *Calcul des Résidus* nennt.

setzt, so erhält die vorgelegte Entwicklung von $f(x)$ die Form einer ganzen Function von x vom $(n-1)$ten Grade, deren Coefficienten nach den ganzen, positiven Potenzen von y aufsteigende Reihen sind. Das Eigenthümliche dieser Entwicklung besteht darin, dafs sie gültig bleiben soll, wenn man für denselben Werth von y für die Gröfse x jede Wurzel der Gleichung $P = y$ setzt. Bezeichnet man daher die n Wurzeln der Gleichung $P = y$ mit:

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots \quad X_n,$$

so erfordert die hier vorgelegte Aufgabe, zuerst eine ganze Function von x vom $(n-1)$ten Grade zu bestimmen, welche, wenn man für x nach einander die Werthe $X_1, X_2, \ldots X_n$ setzt, respective die Werthe

$$f(X_1), \quad f(X_2), \quad \ldots \quad f(X_n)$$

annimmt; die Coefficienten dieser Function, welche auf bekannte Art durch die Gröfsen

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots \quad X_n, \quad f(X_1), \quad f(X_2), \quad \ldots \quad f(X_n)$$

ausgedrückt werden, sind dann mittelst der Gleichung $P = y$ nach den ganzen positiven Potenzen von y zu entwickeln, was, wie ich zeigen will, mit Hülfe des *Lagrange*schen Lehrsatzes geschehen kann.

Aus der Gleichung

$$P - y = p + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n - y = p_n (x - X_1)(x - X_2) \ldots (x - X_n)$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{P-y}{x-X_1} &= p_n (x - X_2)(x - X_3) \ldots (x - X_n) \\ &= p_1 + p_2 x + \cdots + p_n x^{n-1} \\ &\quad + X_1 (p_2 + p_3 x + \cdots + p_n x^{n-2}) \\ &\quad + X_1^2 (p_3 + p_4 x + \cdots + p_n x^{n-3}) + \cdots + p_n X_1^{n-1} \end{aligned}$$

Setzt man $P'(x) = \frac{dP}{dx}$, so wird

$$P'(X_1) = p_n (X_1 - X_2)(X_1 - X_3) \ldots (X_1 - X_n).$$

Mittelst dieser und der ähnlich gebildeten Gleichungen kann die bekannte *Lagrange*sche Formel, durch welche eine ganze Function vom $(n-1)$ten Grade ausgedrückt wird, welche für $x = X_1, X_2, \ldots X_n$ respective die Werthe $f(X_1), f(X_2), \ldots f(X_n)$ annimmt,

$$f(X_1)\cdot\frac{(x-X_2)(x-X_3)\dots(x-X_n)}{(X_1-X_2)(X_1-X_3)\dots(X_1-X_n)}$$
$$+f(X_2)\cdot\frac{(x-X_1)(x-X_3)\dots(x-X_n)}{(X_2-X_1)(X_2-X_3)\dots(X_2-X_n)}$$
$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+f(X_n)\cdot\frac{(x-X_1)(x-X_2)\dots(x-X_{n-1})}{(X_n-X_1)(X_n-X_2)\dots(X_n-X_{n-1})}$$

folgendermafsen dargestellt werden:

$$(p_1+p_2x+\dots+p_nx^{n-1})\left\{\frac{f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{f(X_n)}{P'(X_n)}\right\}$$
$$+(p_2+p_3x+\dots+p_nx^{n-2})\left\{\frac{X_1f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_nf(X_n)}{P'(X_n)}\right\}$$
$$+(p_3+p_4x+\dots+p_nx^{n-3})\left\{\frac{X_1^2f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2^2f(x_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_n^2f(X_n)}{P'(X_n)}\right\}$$
$$\cdot\ \cdot$$
$$+p_n\left(\frac{X_1^{n-1}f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2^{n-1}f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_n^{n-1}f(X_n)}{P'(X_n)}\right).$$

Die n Summen rechter Hand hat man nach den ganzen positiven Potenzen von y zu entwickeln. Der Coefficient von y^i in der Entwicklung der Summe:

$$\frac{X_1^{k-1}f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2^{k-1}f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_n^{k-1}f(X_n)}{P'(X_n)}$$

ist die im ersten §. mit $\beta_k^{(i)}$ bezeichnete Gröfse.

Setzt man

$$\int x^{k-1}f(x)dx = \psi_k(x)$$

und bezeichnet man mit Y_k die Summe:

$$\psi_k(X_1)+\psi_k(X_2)+\dots+\psi_k(X_n) = Y_k,$$

so erhält der obige Ausdruck, durch welchen $f(x)$ dargestellt worden ist, die einfachere Form:

$$(p_1+p_2x+\dots+p_nx^{n-1})\frac{dY_1}{dy}$$
$$+(p_2+p_3x+\dots+p_nx^{n-2})\frac{dY_2}{dy}+\dots+p_n\frac{dX_n}{dy} = f(x)$$

Es wird daher $\beta_k^{(i)}$ der Coefficient von y^i in der Entwicklung von $\frac{dY_k}{dy}$, oder ***man erhält $\beta_k^{(i)}$, wenn man den Coefficienten von y^{i+1} in der Entwicklung von Y_k mit $i+1$ multiplicirt.***

Um jeden der einzelnen Terme

$$\psi_k(X_1), \quad \psi_k(X_2) \quad \ldots \quad \psi_k(X_n),$$

deren Aggregat mit Y_k bezeichnet worden ist, nach den ganzen positiven Potenzen von y entwickeln zu können, mufs man, wenn man hierzu den *Lagrange*schen Lehrsatz benutzen will, die Gleichung $P = y$ auf verschiedene Arten auf die von *Lagrange* zu Grunde gelegte Form:

$$\alpha - x + y\varphi(x) = 0$$

bringen. Die *Lagrange*sche Entwicklung bezieht sich nämlich auf diejenige Wurzel dieser Gleichung, welche für $y = 0$ den Werth α erhält oder einen solchen Werth, für welchen nicht zugleich die Function $\varphi(x)$ unendlich wird. Setzt man

$$P = p_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

so reduziren sich die Wurzeln der Gleichung $P = y$ für $y = 0$ auf $x_1, x_2, \ldots x_n$, und ich will X_m diejenige nennen, welche für $y = 0$ den Werth x_m erhält. Um eine auf diese Wurzel X_m bezügliche Entwicklung mittelst des *Lagrange*schen Lehrsatzes zu erhalten; mufs man der obigen Bemerkung zufolge die Gleichung $P = y$ folgendermafsen darstellen:

$$x_m - x + \frac{y}{p_n(x - x_1) \ldots (x - x_{m-1})(x - x_{m+1}) \ldots (x - x_n)} = 0,$$

so dafs für die verschiedenen Wurzeln $X_1, X_2, \ldots X_n$ die Gröfse α in der *Lagrange*schen Gleichung respective die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ erhält, und für $\varphi(x)$ die Functionen

$$\frac{x - x_1}{P}, \quad \frac{x - x_2}{P}, \quad \ldots \quad \frac{x - x_n}{P}$$

zu setzen sind.

Die *Lagrange*sche Reihe giebt, wenn $\psi(x)$ eine beliebige Function von x und $\psi'(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}$ ist,

$$\psi x = \psi\alpha + y\varphi\alpha\psi'\alpha + y^2 \frac{d.(\varphi\alpha)^2\psi'\alpha}{2d\alpha} + y^3 \frac{d^2(\varphi\alpha)^3\psi'\alpha}{2.3d\alpha^2} + \text{etc.}$$

Setzt man hierin:

$$\psi x = \psi_k(x) = \int x^{k-1} f(x)\, dx$$

so erhält man

$$\psi_k(x) = \psi_k(\alpha) + y\alpha^{k-1} f\alpha\varphi\alpha + y^2 \frac{d\alpha^{k-1} f\alpha(\varphi\alpha)^2}{2d\alpha} + y^3 \frac{d^2\alpha^{k-1} f\alpha(\varphi\alpha)^3}{2.3d\alpha^2} + \text{etc.}$$

Setzt man in der Reihe rechts vom Gleichheitszeichen:

$$\alpha = x_1, \quad \varphi x = \frac{1}{p_n(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)},$$

so erhält man die Entwicklung von $\psi(X_1)$ und auf ähnliche Art die Entwicklung von $\psi(X_2)$, $\psi(X_3)$ ... $\psi(X_n)$. Die Summe aller auf diese Art erhaltenen Reihen giebt die Entwicklung von Y_k. Multiplicirt man den Coefficienten von y^i in dieser letzteren mit $i+1$, so erhält man:

$$\beta_k^{(i)} = \Sigma \frac{\partial^i \frac{x_1^{k-1} f(x_1)}{p_n^{i+1}\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)\}^{i+1}}}{1.2.3\dots i.\partial x_1^i},$$

wenn man während der Differentiation nach x_1 die Gröfsen x_2, x_3, ... x_n als constant betrachtet, und die Summation noch auf die $n-1$ andern Ausdrücke erstreckt, die aus dem unter dem Summenzeichen befindlichen durch Vertauschung von x_1 mit x_2, x_3, ... x_n erhalten werden, welches das im ersten §. gefundene Resultat ist.

Hat P den Factor $(x-x_1)^\mu$ und ist durch keine höhere Potenz von $x-x_1$ theilbar, so erhalten für $y=0$ gleichzeitig μ Wurzeln der Gleichung $P=y$ den Werth x_1. Bezeichnet man diese Wurzeln mit:

$$X_1, \quad X_2, \quad \dots \quad X_\mu,$$

so mufs man, um durch den *Lagrange*schen Lehrsatz die Summe

$$\psi(X_1)+\psi(X_2)+\dots+\psi(X_\mu)$$

nach den ganzen positiven Potenzen von y zu entwickeln, aus der Gleichung $P=y$ durch Ausziehung der μten Wurzel die Gleichung

$$x_1 - x + \frac{y^{\frac{1}{\mu}}}{p_n^{\frac{1}{\mu}}\{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)\}^{\frac{1}{\mu}}} = 0$$

ableiten, welche für die verschiedenen Werthe der μten Wurzel μ verschiedene Gleichungen von der Form $\alpha - x + y^{\frac{1}{\mu}}\varphi x = 0$ giebt, welche sich auf die verschiedenen Wurzeln X_1, X_2, ... X_μ beziehen.

Der *Lagrange*sche Lehrsatz giebt die Entwicklung einer beliebigen Function von jeder dieser Wurzeln nach den ganzen positiven Potenzen von $y^{\frac{1}{\mu}}$ und man erhält aus einer dieser Entwicklungen sämmtliche μ, wenn man für $y^{\frac{1}{\mu}}$ seine μ Werthe setzt. Die Entwicklung der Summe:

$$\psi(X_1)+\psi(X_2)+\dots+\psi(X_\mu)$$

erhält man daher vermöge der bekannten Eigenschaften der Wurzeln der Einheit, wenn man in der Entwicklung einer der Functionen $\psi(\boldsymbol{X}_1)$ etc. die gebrochenen Potenzen von y fortläfst und die ganzen Potenzen von y mit μ multiplicirt. Der Coefficient von y^{i+1} in der Entwicklung dieser Summe, mit $i+1$ multiplicirt, wird daher

$$\frac{\partial^{\mu i+\mu-1}.\dfrac{x_1^{k-1}f(x_1)}{p_n^{i+1}\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)\}^{i+1}}}{1.2\dots(\mu i+\mu-1)\,\partial x^{\mu i+\mu-1}},$$

was mit dem im ersten §. gegebenen Resultate übereinstimmt. Wenn die Function $f(x)$ vieldeutig ist, so kann man willkürlich darüber bestimmen, welchen ihrer verschiedenen Werthe sie für jede der Wurzeln der Gleichung $\boldsymbol{P}=0$ annehmen soll, und für jede dieser Annahmen werden die Coefficienten a_i der polynomischen Entwicklung verschieden. Wenn ν die Zahl der Werthe ist, die $f(x)$ für einen gegebenen Werth von x annehmen kann, so erhält man so den verschiedenen möglichen Annahmen entsprechend ν^n verschiedene Entwicklungen.

§. 3.

Anwendung auf rationale gebrochene Functionen.

Wenn die Function, welche nach den Potenzen eines Polynoms $\boldsymbol{P}$ entwickelt werden soll, eine rationale Function ist, so werden die Gröfsen $\beta_k^{(i)}$ rationale symmetrische Functionen der Wurzeln der Gleichung $\boldsymbol{P}=0$, und können daher durch die Coefficienten des Polynoms $\boldsymbol{P}$ rational dargestellt werden, so dafs es in diesem Falle der Factorenzerfällung von $\boldsymbol{P}$ nicht bedarf. Man kann aber in diesem Falle die vorgelegte Entwicklung auch durch die folgende, ganz verschiedene Methode erhalten.

Es sei die zu entwickelnde Function

$$\frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{V}}=f(x),$$

wo $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ ganze rationale Functionen von x sind. Jede dieser Functionen stelle man durch endliche, nach den Potenzen von $\boldsymbol{P}$ fortschreitende Ausdrücke dar,

$$\boldsymbol{U}_0+\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{P}+\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{P}^2+\dots=\boldsymbol{U}$$
$$\boldsymbol{V}_0+\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{P}+\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{P}^2+\dots=\boldsymbol{V},$$

in welchen die Coefficienten $\boldsymbol{U}_0$, $\boldsymbol{U}_1$, ... etc.; $\boldsymbol{V}_0$, $\boldsymbol{V}_1$, ... etc. Polynome von niedererem Grade als $\boldsymbol{P}$ sind. Es seien $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{N}$ zwei andere ganze

rationale Functionen von x von der Beschaffenheit, dafs

$$MV - NP = 1.$$

Diese Functionen M und N können durch die Methode der unbestimmten Coefficienten oder durch die Verwandlung des Bruches $\frac{V}{P}$ in einen Kettenbruch gefunden werden.

Wenn die Factorenzerfällung von P gegeben ist, findet man M auch dadurch, dafs man $\frac{1}{PV}$ in Partialbrüche zerfällt, und alle Partialbrüche, welche aus den Factoren von P hervorgehen, in *einen* Bruch vereinigt. Der Zähler dieses Bruches wird die Function M. Man hat daher, wenn man die Werthe von V für $x = x_1, x_2, \ldots x_n$, mit

$$V_1, \quad V_2 \quad \ldots \quad V_n$$

bezeichnet,

$$M = P\left\{\frac{1}{P'(x_1)V_1.(x-x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)V_2.(x-x_2)} + \cdots + \frac{1}{P'(x_n)V_n.(x-x_n)}\right\}.$$

Hat man auf irgend eine Weise die Function M vom $(n-1)$ten Grade bestimmt, so bringe man die Producte MU und MV auf die Form:

$$u_0 + u_1P + u_2P^2 + \cdots \text{etc.} = MU$$
$$1 + v_1P + v_2P^2 + \cdots \text{etc.} = MV,$$

in welcher die sämmtlichen Coefficienten $u_0, u_1, u_2, \ldots$ etc., $v_1, v_2, \ldots$ etc. Polynome von niedererem Grade als P sind. Der zu entwickelnde Bruch wird dann:

$$\frac{u_0 + u_1P + u_2P^2 + \cdots \text{etc.}}{1 + v_1P + v_2P^2 + \cdots \text{etc.}} = \frac{U}{V}$$

Entwickelt man den Ausdruck links nach den Potenzen von P, so werden die Coefficienten ganze rationale Functionen von u_0, u_1 etc., v_1, v_2 etc., welche man wieder als Aggregate von Potenzen von P, die in Polynome niedereren Grades multiplicirt sind, darstellen kann, wodurch man die verlangte Entwicklung erhält.

Man kann aber auch bei der Bildung der Coefficienten dieser Entwicklung ein recurrirendes Verfahren befolgen. Ist die gesuchte Entwicklung

$$f_0 + f_1.P + f_2.P^2 + f_3.P^3 + \cdots \text{etc.} = \frac{u_0 + u_1P + u_2P^2 + \cdots \text{etc.}}{1 + v_1P + v_2P^2 + \cdots \text{etc.}} = \frac{U}{V},$$

wo f_0, f_1, etc. Polynome $(n-1)$ten Grades sind, und kennt man bereits die Coefficienten $f_0, f_1, \ldots f_i$, so findet man aus ihnen den unmittelbar folgenden

f_{i+1}. Ist nämlich $a_{m,k}$ der Rest und $b_{m,k}$ der Quotient der Division von $f_m . v_k$ durch P, so dafs

$$f_m . v_k = a_{m,k} + b_{m,k} P,$$

so sind die Functionen

$$a_{0,k}, \quad a_{1,k}, \quad \ldots \quad a_{i,k}; \quad b_{0,k}, \quad b_{1,k}, \quad \ldots \quad b_{i,k}$$

gegeben, wenn die Coefficienten $f_0, f_1, \ldots f_i$ bereits bekannt sind, und man findet aus ihnen den nächst folgenden Coefficienten

$$f_{i+1} = u_{i+1} - \{a_{i,1} + a_{i-1,2} + a_{i-2,3} + \cdots + a_{0,i+1}\} - \{b_{i-1,1} + b_{i-2,2} + b_{i-3,3} + \cdots + b_{0,i}\}.$$

Mittelst dieser Formel kann man aus dem ersten Coefficienten $f_0 = u_0$ die übrigen finden.

Wenn P und V einen gemeinschaftlichen Factor haben, kann die Gleichung

$$MV - NP = 1$$

nicht erfüllt werden, und es kann in der That dann auch die verlangte Entwicklung nicht Statt haben.

Die Aufgabe, einen rationalen Bruch in eine nach den Potenzen eines Polynoms fortschreitende Reihe zu entwickeln, deren Coefficienten Polynome niedereren Grades sind, findet eine Anwendung, wenn man einen Bruch:

$$\frac{L}{P^i Q^k R^l \ldots},$$

in welchem $L, P, Q, R \ldots$ ganze rationale Functionen sind, in eine ganze Function und in andre Brüche zerlegen will, welche die Potenzen von P, Q, R etc. bis zur $i$ten, $k$ten, $l$ten etc. zu Nennern und Zähler von respective niedererer Ordnung als P, Q, R etc. haben. Man erhält nämlich die aus dem Factor P^i hervorgehenden Brüche, wenn man die rationale Function

$$\frac{L}{Q^k R^l \ldots}$$

in der im Vorigen auseinandergesetzten Weise in eine nach den Potenzen von P aufsteigende Reihe entwickelt, deren Coefficienten von niedererem Grade als P sind, diese Entwicklung aber nur bis zur $(i-1)$ten Potenz von P fortsetzt, und durch P^i dividirt. Verfährt man ebenso in Bezug auf Q, R etc., so ist das auf diese Weise erhaltene Aggregat von Brüchen dem vorgelegten Bruche gleich, oder, wenn der Zähler des vorgelegten Bruches von höherem Grade als der Nenner ist, von demselben nur um eine ganze Function ver-

schieden, welche der Quotient der Division des Zählers L durch den Nenner $P^iQ^kR^l\ldots$ ist. Ist L' der Rest dieser Division, so werden die Brüche, in welche der vorgelegte Bruch zerlegt wird, dieselben, wenn man statt des Zählers L den einfacheren L' setzt.

Man kann hiervon bei der Integration der rationalen Functionen Gebrauch machen, wenn der Nenner imaginäre lineäre Factoren hat, und man, um die imaginären Gröfsen zu vermeiden, die reellen trinomischen Factoren und ihre Potenzen zu Nennern der Partialbrüche nimmt.

§. 4.

Anwendung auf gebrochene Potenzen rationaler Functionen.

Ich will jetzt die im Vorigen gegebene Methode auf die Entwicklung einer *gebrochenen* Potenz einer rationalen Function anwenden. Wie man zufolge einer oben gemachten Bemerkung voraussehen kann, wird dies nicht möglich sein, ohne die Wurzeln der Gleichung $P=0$ zu kennen, indem die Entwicklung nur dann bestimmt ist, wenn man festgesetzt hat, welchen ihrer Werthe die zu entwickelnde irrationale Gröfse für jede der verschiedenen Wurzeln der Gleichung $P=0$ annehmen soll.

Um der Aufgabe sogleich eine gröfsere Allgemeinheit zu geben, werde ich annehmen, die zu entwickelnde irrationale Function habe die Form:

$$\sqrt[\nu]{\frac{U^{m\nu-\alpha}\,U_1^{m_1\nu-\alpha_1}\,U_2^{m_2\nu-\alpha_2}\ldots}{V^{\beta}\,V_1^{\beta_1}\,V_2^{\beta_2}\ldots}}=f(x),$$

wo

$$U,\quad U_1,\quad U_2\quad\ldots;\qquad V,\quad V_1,\quad V_2\quad\ldots$$

ganze rationale Functionen, und

$$\nu,\ m,\ m_1,\ m_2\ \ldots;\quad \alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \ldots;\quad \beta,\ \beta_1,\ \beta_2\ \ldots$$

ganze positive Zahlen und aufserdem $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \ldots$ kleiner als ν sein sollen. ***Man suche eine ganze rationale Function M vom $(n-1)$ten Grade, welche einer Gleichung von der Form:***

$$M^{\nu}U^{\alpha}U_1^{\alpha_1}U_2^{\alpha_2}\ldots V^{\beta}V_1^{\beta_1}V_2^{\beta_2}\ldots=1-NP$$

genügt, wo N ebenfalls eine ganze rationale Function sein soll und P das gegebene Polynom ist, nach dessen Potenzen die Entwicklung angestellt werden soll. Vermittelst der vorstehenden Gleichung sind die Werthe der Function M für die n Wurzeln der Gleichung $P=0$ gegeben, und da

diese Function den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigen soll, ist sie durch diese Werthe bestimmt, oder hat nur diejenige Unbestimmtheit, die aus der Wahl der Werthe hervorgeht, welche die gegebene irrationale Function für die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $P = 0$ annehmen kann. Umgekehrt genügt jede der so bestimmten Functionen M, deren Anzahl ν^n ist, einer Gleichung der angegebenen Art. Denn wenn die Function M auf die angegebene Art bestimmt ist, so verschwindet die ganze rationale Function:

$$1 - M^\nu U^\alpha U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots V^\beta V_1^{\beta_1} V_2^{\beta_2} \ldots$$

für jede der Wurzeln der Gleichung $P = 0$, und ist daher durch P theilbar, oder sie erhält die Form NP, wo N eine ganze rationale Function ist, wie verlangt wird. Bei dieser Bestimmung von M wird nur vorausgesetzt, dafs die ganzen Functionen $U, U_1, \ldots V, V_1, \ldots$ mit P keinen gemeinschaftlichen Factor haben, welches die Bedingung ist, unter welcher allein die verlangte Entwicklung Statt haben kann.

Hat man die Function M gefunden, so kann man die gegebene irrationale Function auf die Form:

$$\frac{M U^m U_1^{m_1} U_2^{m_2} \ldots}{\sqrt[\nu]{(1-NP)}} = f(x)$$

bringen, in welcher sie sich nun ohne weitere Schwierigkeit auf die verlangte Art entwickeln läfst. Stellt man nämlich den Zähler des vorstehenden Bruches und die Function N wieder als Aggregate von Potenzen von P dar, welche in Polynome $(n-1)$ten Grades multiplicirt sind, so erhält $f(x)$ die Form:

$$f(x) = \frac{u_0 + u_1 P + u_2 P^2 + \cdots \text{etc.}}{\sqrt[\nu]{(1 - v_1 P - v_2 P^2 - \cdots \text{etc.})}},$$

wo $u_0, u_1, \ldots, v_1, v_2, \ldots$ ganze Functionen $(n-1)$ten Grades sind. Entwickelt man diesen Ausdruck nach den Potenzen von P, so werden die Coefficienten ganze rationale Functionen von $u_0, u_1, \ldots v_1, v_2, \ldots$, welche man wieder als Aggregate von Potenzen von P, welche in Polynome $(n-1)$ten Grades multiplicirt sind, darzustellen hat, wodurch man schliefslich die verlangte Entwicklung erhält.

Wenn P einen Factor $(x - x_1)^\mu$ hat, so kann man mittelst der Gleichung, durch welche M bestimmt wird, für $x = x_1$ nicht blofs den Werth von M selber, sondern auch die Werthe seiner ersten $\mu - 1$ Differenzialquotienten bestimmen. Man kann daher immer die Partialbrüche angeben, in

welche sich der Bruch $\frac{M}{P}$ zerfällen läfst, und erhält dann durch Multiplication mit P die Function M selbst.

§. 5.

Anwendung auf irrationale Functionen im Allgemeinen.

Man kann durch die im Vorigen angewandte Methode auch allgemein jede *algebraische* Function von x in eine nach den Potenzen eines Polynoms P fortschreitende Reihe entwickeln, deren Coefficienten Polynome niedereren Grades sind.

Es sei ζ durch eine algebraische Gleichung $\varphi(x, \zeta) = 0$ gegeben, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x sind. Man soll ζ in eine Reihe

$$\alpha + \alpha_1 P + \alpha_2 P^2 + \text{etc.} = \zeta$$

entwickeln, in welcher α, α_1, etc. ganze Functionen von x vom $(n-1)$ten Grade sind, und welche so beschaffen ist, dafs sie immer gleichzeitig für alle n Werthe von x gültig ist, für welche P einen gegebenen Werth erhält. Wenn P verschwindet, welches geschieht, wenn man der Gröfse x die Werthe

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_n$$

giebt, so wird ζ respective eine Wurzel der Gleichungen

$$\varphi(x_1, \zeta) = 0, \quad \varphi(x_2, \zeta) = 0, \quad \ldots \quad \varphi(x_n, \zeta) = 0.$$

Es steht ganz in unserm Belieben zu bestimmen, welcher Wurzel ζ jedesmal gleich werden soll. Nennt man $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ *beliebige* Wurzeln dieser verschiedenen Gleichungen, so dafs ζ_i eine beliebige Wurzel der Gleichung $\varphi(x_i, \zeta) = 0$ ist, so kann die gesuchte Entwicklung von ζ so bestimmt werden, dafs sie die Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ erhält, wenn x die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ annimmt, wobei wieder, wenn die Gleichung $\varphi = 0$ in Bezug auf ζ vom νten Grade ist, ν^n Combinationen Statt finden können, welche verschiedene Entwicklungen geben, die immer anderen Werthen der algebraischen Function entsprechen. Die hier zu findende Entwicklung wird für die der Gröfse x_1 benachbarten Werthe von x die der Gröfse ζ_1 benachbarten Werthe von ζ, für die der Gröfse x_2 benachbarten Werthe von x die der Gröfse ζ_2 benachbarten Werthe von ζ u. s. f. darstellen. Man kann dieselbe auf folgende Art erhalten.

Es sei α eine ganze rationale Function von x vom $(n-1)$ten Grade, welche, wenn x die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ annimmt, die Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$

erhält. Substituirt man in $\varphi(x, \zeta)$ für ζ die Function α, so wird die Function $\varphi(x, \alpha)$, die man erhält, immer durch P theilbar. Denn zufolge der gemachten Voraussetzungen verschwinden die Gröfsen:

$$\varphi(x_1, \zeta_1), \quad \varphi(x_2, \zeta_2), \quad \ldots \quad \varphi(x_n, \zeta_n)$$

und da α, wenn x die Werthe x_1, x_2, $\ldots$ x_n annimmt, gleichzeitig die Werthe ζ_1, ζ_2, $\ldots$ ζ_n erhält, so verschwindet auch $\varphi(x, \alpha)$ für alle diese Werthe von x, und ist daher durch:

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = P$$

theilbar. Man setze jetzt

$$\zeta = \alpha + z,$$

so verwandelt sich die Gleichung $\varphi(x, \zeta) = 0$ in eine andre von der Form:

$$AP + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \text{etc.} = 0,$$

in welcher A, A_1, A_2, etc. endliche ganze Functionen von x sind. Wenn man die beiden ganzen Functionen K und B_1 sucht, welche der Gleichung:

$$KA_1 - B_1 P = 1$$

genügen, so erhält diese Gleichung durch Multiplication mit K die Form:

$$BP + (1 + B_1 P) z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \text{etc.} = 0.$$

Durch Umkehrung erhält man hieraus:

$$z = C_1 P + C_2 P^2 + C_3 P^3 + \text{etc.},$$

wo C_1, C_2 etc. ganze rationale Functionen von B, B_1, B_2, etc. und daher auch ganze rationale Functionen von x sind, worunter ich immer nur solche Functionen verstehe, in denen x auf einen endlichen Grad steigt. Man kann eine solche Reihe leicht in eine andre

$$\zeta - \alpha = z = D_1 P + D_2 P^2 + D_3 P^3 + \text{etc.}$$

verwandeln, in welcher D_1, D_2 etc. von niedererem Grade als P sind. In sämmtlichen hier betrachteten ganzen Functionen und auch in den zuletzt erhaltenen D_1, D_2 etc. sind die constanten Coefficienten rationale Ausdrücke der in den Functionen P, $\varphi(x, \zeta)$ und α enthaltenen Constanten. Die Bestimmung der Function B_1 setzt voraus, dafs A_1 oder der Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$ für $\zeta = \alpha$ mit P keinen gemeinschaftlichen Factor habe, welche Bedingung darauf hinauskommt, dafs, wenn man in der Gleichung $\varphi(x, \zeta) = 0$ für x die Wurzeln der Gleichung $P = 0$ setzt, für keinen dieser Werthe von x die Glei-

chungen $\varphi(x, \zeta) = 0$, zwei gleiche Wurzeln ζ erhalten. Hat $\boldsymbol{P}$ den Factor $(x - x_1)^\mu$ so mufs nicht blofs α für $x = x_1$ den Werth einer Wurzel ζ erhalten, sondern es müssen auch die ersten $\mu - 1$ Differentialquotienten von α den diesem Werthe entsprechenden Differentialquotienten $\frac{d\zeta}{dx}$, $\frac{d^2\zeta}{dx^2}$, ... $\frac{d^{\mu-1}\zeta}{dx^{\mu-1}}$ gleich werden, wodurch α in allen Fällen bestimmt wird.

§. 6.

Anwendung auf logarithmische Functionen, exponentielle Functionen und Potenzen von beliebigem Exponenten.

Die hier gebrauchte Methode bleibt anwendbar, wenn die als endliche ganze Functionen von x eingeführten Ausdrücke solche unendliche Reihen sind, welche in der angegebenen Art nach ganzen positiven Potenzen von $\boldsymbol{P}$ fortschreiten und ganze rationale Functionen von x zu Coefficienten haben. So kann die hier für die Entwicklung einer algebraischen Function gegebene Methode auch angewandt werden, wenn die zwischen x und ζ gegebene Gleichung die Form

$$\varphi + \varphi_1 \boldsymbol{P} + \varphi_2 \boldsymbol{P}^2 + \text{etc. in inf.} = 0$$

hat, wo φ, φ_1 etc. ganze rationale Functionen von x und ζ sind. Auch für diesen Fall werden die Constanten, welche in den gesuchten Entwicklungscoefficienten $(n-1)$ten Grades enthalten sind, durch die Constanten des ersten Entwicklungscoefficienten α rational ausgedrückt werden. Dagegen hört im Allgemeinen die Anwendbarkeit der im vorigen §. für die Entwicklung algebraischer Functionen gegebenen Methode auf, wenn es sich um die Entwicklung von *transcendenten* Functionen handelt. Man wird aber in vielen Fällen durch ein andres recurrirendes Verfahren aus dem ersten Gliede der Entwicklung alle Polynome nach einander durch algebraische Operationen ableiten können, so dafs auch in diesen wieder die Constanten rationale Functionen der in dem ersten enthaltenen werden.

Um hiervon ein Beispiel zu geben, will ich die Aufgabe stellen, den *Logarithmus* eines gegebenen endlichen oder unendlichen Ausdrucks

$$a + a_1 \boldsymbol{P} + a_2 \boldsymbol{P}^2 + a_3 \boldsymbol{P}^3 + \text{etc.}$$

in welchem a, a_1, etc. Polynome niedereren Grades als $\boldsymbol{P}$ sind in eine ähnliche Reihe zu entwickeln. Es sei diese Reihe

$$\alpha + \alpha_1 \boldsymbol{P} + \alpha_2 \boldsymbol{P}^2 + \alpha_3 \boldsymbol{P}^3 + \text{etc.} = \log(a + a_1 \boldsymbol{P} + a_2 \boldsymbol{P}^2 + a_3 \boldsymbol{P}^3 + \text{etc.}),$$

so erhält man durch Differentiation:

$$\begin{aligned}(1.)\quad & a' + a_1' P + a_2' P^2 + a_3' P^3 + \text{etc.} \\ & + P'(a_1 + 2a_2 P + 3a_3 P^2 + \text{etc.}) \\ & = \{a + a_1 P + a_2 P^2 + a_3 P^3 + \text{etc.}\} \\ & \times \begin{Bmatrix} \alpha' + \alpha_1' P + \alpha_2' P^2 + \alpha_3' P^3 + \text{etc.} \\ + P'(\alpha_1 + 2\alpha_2 P + 3\alpha_3 P^2 + \text{etc.}) \end{Bmatrix},\end{aligned}$$

wo durch den obern Accent der nach x genommene Differentialquotient bezeichnet wird. Es sei

$$(2.)\quad a_i P' = b_i + c_i P; \quad \alpha_i P' = \beta_i + \gamma_i P,$$

wo b_i, β_i die Reste der Division von $a_i P'$, $\alpha_i P'$, durch P und c_i, γ_i die respectiven Quotienten bedeuten; es sei ferner

$$(3.)\quad a_i' + ic_i + (i+1) b_{i+1} = e_i; \quad \alpha_i' + i\gamma_i + (i+1)\beta_{i+1} = \varepsilon_i.$$

Da die Functionen a_i gegeben sind, so sind auch die Functionen e_i gegebene Polynome vom $(n-1)$ten Grade. Durch Substitution der Gleichungen (2.) und (3.) verwandelt sich die Gleichung (1.) in die folgende:

$$\begin{aligned}(4.)\quad & e + e_1 P + e_2 P^2 + e_3 P^3 + \text{etc.} \\ & = (a + a_1 P + a_2 P^2 + a_3 P^3 + \text{etc.})(\varepsilon + \varepsilon_1 P + \varepsilon_2 P^2 + \varepsilon_3 P^3 + \text{etc.}).\end{aligned}$$

Setzt man

$$(5.)\quad a\varepsilon_i + a_1 \varepsilon_{i-1} + a_2 \varepsilon_{i-2} + \cdots + a_i \varepsilon = \zeta_i + \eta_i P,$$

wo ζ_i und η_i ganze Functionen vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade sind, so giebt die Gleichung (4.) zwischen diesen unbekannten Functionen die Relation

$$(6.)\quad e_i = \eta_{i-1} + \zeta_i.$$

Ich will jetzt annehmen, dafs die Entwicklungscoefficienten α, α_1, ... α_i bereits bekannt sind. Man kennt dann auch vermöge (2.), (3.) die Functionen ε, ε_1, ... ε_{i-1} und vermöge (5.) die Function η_{i-1}. Es ist daher durch die vorstehende Gleichung (6.) auch ζ_i gegeben; vermöge (2.) ist auch γ_i gegeben. Setzt man daher:

$$(7.)\quad a(\alpha_i' + i\gamma_i) + a_1 \varepsilon_{i-1} + a_2 \varepsilon_{i-2} + \cdots + a_i \varepsilon - \zeta_i = \vartheta_i,$$

so ist auch ϑ_i gegeben. Die Gleichungen (3.), (5.) und (7.) geben

$$(8.)\quad (i+1) a\beta_{i+1} + \vartheta_i = \eta_i P$$

oder, wenn man den Werth

$$\beta_{i+1} = \alpha_{i+1} P' - \gamma_{i+1} P$$

substituirt,

$$(9.)\quad \{(i+1)a\gamma_{i+1}+\eta_i\}P-(i+1)aP'.\alpha_{i+1} = \vartheta_i.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$(10.)\quad aP' = Q+f.P,\quad (i+1)a\gamma_{i+1}+\eta_i-(i+1)f.\alpha_{i+1} = k_{i+1},$$

wo Q den Rest der Division von aP' durch P, f den Quotienten dieser Division bedeutet, so verwandelt sie sich in die folgende:

$$(11.)\quad k_{i+1}.P-(i+1)\alpha_{i+1}.Q = \vartheta_i.$$

In dieser Gleichung sind die ganzen Functionen P, Q, ϑ_i gegeben, die ganzen Functionen k_{i+1} und α_{i+1} unbekannt, von denen die letztere der auf die gegebenen zunächst folgende Entwicklungscoefficient ist. Um denselben aus der Gleichung (11.) zu bestimmen, sucht man ein für allemal nach den bekannten Vorschriften die beiden Functionen K und L vom $(n-1)$ten Grade, für welche

$$KP-LQ = 1$$

ist. Nach gleichfalls bekannten Regeln wird dann $(i+1)\alpha_{i+1}$ der Rest der Division von $L\vartheta_i$ durch P.

Auf diese Weise kann man aus α nach und nach alle folgenden Coefficienten α_1, α_2, etc. finden.

Als zweites Beispiel soll die Entwicklung einer Function dienen, deren Logarithmus gegeben ist. Sind a, a_1, etc. gegebene ganze Functionen $(n-1)$ten Grades, und setzt man

$$e^{a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.}} = \alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.},$$

wo α, α_1, etc. wieder ganze Functionen $(n-1)$ten Grades sein sollen, so kann man aus α die übrigen Coefficienten α_1, α_2, etc. finden. Man kann nämlich allgemein, wenn α, α_1, ... α_i gegeben sind, den nächst höheren Coefficienten α_{i+1} folgendermafsen bestimmen.

Bedient man sich der Bezeichungen (2.) und (3.), so hat man die Gleichung

$$(e_0+e_1P+e_2P^2+\text{etc.})(\alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.}) = \varepsilon+\varepsilon_1P+\varepsilon_2P^2+\text{etc.}$$

Kennt man α, α_1, ... α_i und also auch ε, ε_1, ... ε_{i-1}, so giebt diese Gleichung ε_i und daher wegen (3.) auch β_{i+1}, wodurch man mittelst (2.) auch α_{i+1} erhalten kann. Kennt man nämlich die beiden Functionen M und N vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade, für welche

$$MP'-NP = 1,$$

so wird α_{i+1} der Rest der Division von $M\beta_{i+1}$ durch P.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auf die Entwicklung *einer beliebigen Potenz* anwenden, wobei ich der Kürze wegen wieder von den obigen Bezeichnungen Gebrauch machen will. Für *irgend einen* Exponenten k sei:

$$(a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.})^k = \alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.},$$

so erhält man:

$$k(e+e_1P+e_2P^2+\text{etc.})(\alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.})$$
$$= (a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.})(\varepsilon+\varepsilon_1P+\varepsilon_2P^2+\text{etc.}).$$

Kennt man $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_i$, so giebt diese Gleichung den Werth von ζ_i, woraus man mittelst (7.) den Werth von ϑ_i und dann wieder, wie im ersten Beispiel mittelst der Function L den Werth von $(i+1)\alpha_{i+1}$ als Rest der Division von $L\vartheta_i$ durch P findet.

7.

Anwendung auf den Fall einer durch eine Quadratur definirten Function.

Die im Vorstehenden angewandte Methode beruht auf der Benutzung der Differentialgleichung erster Ordnung, welcher die zu entwickelnde Function Genüge leistet. Dieselbe Methode kann in allen Fällen angewandt werden, in welchen man, bei den gewöhnlichen nach den Potenzen von x fortschreitenden Reihen durch eine Differentialgleichung, welcher sie genügen, lineäre Relationen zwischen ihren Coefficienten erhält. Betrachtet man den einfachsten Fall, in welchem eine Reihe von der gegebenen Art zu integriren ist, und das Integral wieder auf dieselbe Form gebracht werden soll, so kann man jeden Term derselben auf den unmittelbar vorhergehenden zurückführen, so dafs man, wenn der erste Term gegeben ist, nach und nach alle übrigen finden kann. Der erste Term des gesuchten Integrals mufs aber durch andere Betrachtungen gefunden werden.

Es sei nämlich:

$$\int f(x)\,dx = \int(a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.})\,dx = A+A_1P+A_2P^2+\text{etc.}$$

Sind wieder $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $P=0$ und ist x_0 die untere Gränze, von welcher an das Integral genommen werden soll, so ist A als eine Function des $(n-1)$ten Grades zu bestimmen, welche für $x = x_1, x_2, \ldots x_n$ respective die Werthe

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx, \quad \ldots \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

erhält. Es sei B_i der Rest der Division von A_iP' durch P und C_i der

Quotient dieser Division, so dafs

$$A_i P' = B_i + C_i P.$$

Man hat dann

$$a_i = iC_i + A_i' + (i+1)B_{i+1}.$$

Kennt man daher A_i und den Quotienten C_i der Division von $A_i P'$ durch P, so ist durch die vorstehende Formel auch B_{i+1} gegeben. Man hat dann auf die bekannte Art zwei ganze Functionen A_{i+1} und C_{i+1}, respective vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade, von der Beschaffenheit zu suchen, dafs

$$A_{i+1}P' - C_{i+1}P = B_{i+1}.$$

Man findet diese Functionen mittelst der beiden Hülfsfunctionen M und N vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade, welche der Gleichung

$$MP' - NP = 1$$

genügen, als die Reste der Division von MB_{i+1} durch P und von NB_{i+1} durch P'. Es werden daher, wenn man A_i und C_i kennt, die Functionen A_{i+1} und C_{i+1} respective die Reste der Division

$$\text{von } \frac{1}{i+1}M(a_i - A_i' - iC_i) \text{ durch } P \text{ und}$$

$$\text{von } \frac{1}{i+1}N(a_i - A_i' - iC_i) \text{ durch } P'.$$

Auf diese Weise kann man aus A nach und nach alle folgenden Coefficienten A_1, A_2, etc. finden. *)

---

*) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dafs, wenn man das Product zweier den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigenden Functionen F und G durch eine Function $n$ten Grades

$$P = p + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

zu dividiren hat, es vortheilhaft sein kann, dem einen Factor die Form

$$f(p_1 + p_2 x + \cdots + p_n x^{n-1}) + f_1(p_2 + p_3 x + \cdots + p_n x^{n-2}) + \cdots + f_{n-2}(p_{n-1} + p_n x) + f_{n-1} p_n = F$$

zu geben, in welcher f, f_1, $\ldots$ f_{n-1} Constanten bedeuten. Man kann dann nämlich den Rest und den Quotienten der Division unmittelbar hinschreiben. Um die Function F auf diese Form zu bringen, bedarf es nur der leichten Auflösung solcher lineärer Gleichungen, von welcher jede folgende eine Unbekannte weniger enthält. Wenn für mehrere ähnliche Operationen, wie im Vorhergehenden, der eine Factor derselbe bleibt, wird der erreichte Vortheil noch wesentlich vermehrt. Es sei

$$P_m = p_m + p_{m+1} x + \cdots + p_n x^{n-m},$$
$$P^{(m)} = p + p_1 x + \cdots p_{m-1} x^{m-1},$$

so dafs

$$P = P^{(m)} + x^m P_m$$

und

$$F = fP_1 + f_1 P_2 + \cdots f_{n-1} P_n.$$

8.

Modification für den Fall, wo die ganze Function P, nach deren Potenzen entwickelt wird, lineäre Factoren in höherer als der ersten Potenz enthält.

Das hier gebrauchte Verfahren mufs für den Fall, dafs P und P' einen gemeinschaftlichen Factor haben, eine wesentliche Modification erleiden.

Es sei P durch die Factoren $x-x_1$, $x-x_2$, etc. respective μ_1, μ_2, etc. Mal theilbar, so wird

$$F = (x-x_1)^{\mu_1-1}(x-x_2)^{\mu_2-1}, \ldots$$

der gemeinschaftliche Factor von P und P', und setzt man $P = F.Q$, so wird Q durch $(x-x_1)$, $(x-x_2)$, etc., aber durch jeden dieser lineären Factoren von F nur *einmal* theilbar.

Aus der Gleichung

$$A_i P' = B_i + C_i P,$$

folgt, dafs auch alle Gröfsen B_i diesen Factor F haben. Setzt man daher:

$$P = F.Q, \quad P' = F.Q_1, \quad B_i = F.D_i,$$

so hat man

$$A_i Q_1 = D_i + C_i Q.$$

Ist f der Grad von F, so werden Q und Q_1 vom $(n-f)$ten und $(n-f-1)$ten Grade; es werden daher A_i und C_i als Functionen vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade nicht mehr mittelst der vorstehenden Gleichung durch Q, Q_1 und D_i bestimmt, sondern, wenn (A_i) und (C_i) in der vorstehenden Gleichung die Functionen vom $(n-f-1)$ten und $(n-f-2)$ten Grade bedeuten, welche dieser Gleichung genügen, so kann man zu (A_i) und (C_i) respective die Ausdrücke $R_i Q$ und $R_i Q_1$, wo R_i *eine beliebige Function* vom $(f-1)$ten Grade

---

Ist der andre Factor

$$G = g + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_{n-1} x^{n-1},$$

so setze man in ähnlicher Weise

$$G_m = g_m + g_{m+1} x + \cdots + g_{n-1} x^{n-m-1},$$
$$G^{(m)} = g + g_1 x + \cdots + g_{m-1} x^{m-1},$$

so dafs

$$G^{(m)} + x^m G_m = G.$$

Setzt man

$$\frac{FG}{P} = Q + \frac{R}{P},$$

so hat man den Quotienten der Division

$$Q = fG_1 + f_1 G_2 + \cdots + f_{n-2} G_{n-1}$$

und den Rest

$$R = f(G'P_1 - G_1 P') + f_1(G''P_2 - G_2 P'') + \cdots f_{n-2}(G^{(n-1)}P_{n-1} - G_{n-1}P^{(n-1)}) + f_{n-1}P_n G,$$

wie sich unmittelbar aus den vorstehenden Formeln ergiebt.

ist, hinzufügen, und

$$A_i = (A_i) + R_i Q, \qquad C_i = (C_i) + R_i Q_1$$

setzen. Nach diesen vorausgeschickten Bemerkungen will ich zeigen, wie man in dem hier betrachteten Falle aus der Gröfse A_i die folgende A_{i+1} finden kann.

Die oben gegebene Gleichung

$$a_i = iC_i + A_i' + (i+1)B_{i+1}$$

zeigt, dafs die bereits gefundene Function A_i so beschaffen sein mufs, dafs der Ausdruck $a_i - iC_i - A_i'$ durch F theilbar wird, weil alle Functionen B_i durch F theilbar sind. Setzt man in der vorstehenden Gleichung $B_{i+1} = FD_{i+1}$, so erhält man

$$(i+1)D_{i+1} = \frac{1}{F}\{a_i - iC_i - A_i'\}.$$

Aus D_{i+1}, Q und Q_1 erhält man die Functionen (A_{i+1}) und (C_{i+1}) vom $(n-f-1)$ten und $(n-f-2)$ten Grade, welche der Gleichung

$$(A_{i+1})Q_1 = D_{i+1} + (C_{i+1})Q$$

genügen, und aus diesen:

$$A_{i+1} = (A_{i+1}) + RQ; \qquad C_{i+1} = (C_{i+1}) + RQ_1,$$

wo R eine noch zu bestimmende Function des $(f-1)$ten Grades ist. Die Bestimmung von R erhält man daraus, dafs der Ausdruck

$$a_{i+1} - (i+1)C_{i+1} - A_{i+1}'$$

durch F theilbar sein mufs. Setzt man

$$a_{i+1} - (i+1)(C_{i+1}) - (A_{i+1})' = b_{i+1}, \qquad Q' + (i+1)Q_1 = Q_i,$$

so wird der vorstehende Ausdruck, wenn $\frac{dR}{dx} = R'$,

$$H = b_{i+1} - Q_i R - QR'.$$

Es kommt daher darauf an, *eine Function R vom $(f-1)$ten Grade so zu bestimmen, dafs der Ausdruck H durch eine gegebene Function vom f^{ten} Grade*

$$F = (x-x_1)^{\mu_1-1}(x-x_2)^{\mu_2-1}\ldots$$

theilbar wird, deren lineäre Factoren die Function Q einmal und nicht öfter theilen.

Soll der Ausdruck H durch $(x-x_1)^{\mu_1-1}$ theilbar sein, so mufs derselbe und seine μ_1-2 ersten Differentialquotienten für $x=x_1$ verschwinden. Aber in jedem Differentialquotienten von H ist der höchste von R in Q multiplicirt, welches für $x=x_1$ verschwindet, so dafs für $x=x_1$ in dem (μ_1-2)ten Differentialquotienten von H die Differentialquotienten von R ebenfalls nur bis zum (μ_1-2)ten steigen. Man erhält daher, indem man H und seine μ_1-2 ersten Differentialquotienten $=0$ setzt, nachdem man darin

den Werth $x = x_1$ substituirt hat, $\mu_1 - 1$ Gleichungen, aus denen man successive die Werthe findet, welche R und seine $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_1$ annehmen. Umgekehrt wird H durch $(x - x_1)^{\mu_1 - 1}$ theilbar, wenn man die Werthe von R und seinen $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten auf die angegebene Art bestimmt hat. Ebenso erhält man aus der Bestimmung, dafs H auch durch $(x - x_2)^{\mu_2 - 1}$ theilbar sein soll, die Bestimmung der Werthe, welche R und seine $\mu_2 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_2$ annehmen, und ähnliches in Bezug auf jeden der lineären Factoren, durch deren höhere Potenzen P theilbar ist, und deren um 1 niedrigere Potenzen die Factoren von F bilden.

Kennt man auf diese Weise sowohl die Werthe, welche R selbst für $x = x_1$, $x = x_2$, etc. annimmt, als auch die Werthe, welche seine $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_1$, seine $\mu_2 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_2$, u. s. f. erhalten, so kennt man auch die Zähler der Partialbrüche, in welche sich der Bruch

$$\frac{R}{F} = \frac{R}{(x - x_1)^{\mu_1 - 1}(x - x_2)^{\mu_2 - 1} \ldots},$$

nach den gewöhnlichen Regeln zerfällen läfst, und erhält durch Multiplication mit F die gesuchte Function R selber. Hat man R gefunden, so ist der gesuchte Coefficient $A_{i+1} = (A_{i+1}) + RQ$ vollkommen bestimmt. Man kann daher auch in dem Falle, dafs das Polynom P gleiche Factoren hat, jeden Coefficienten der gesuchten Entwicklung des Integrals aus dem unmittelbar vorhergehenden ableiten, und so aus dem ersten A nach und nach die übrigen finden. Die Bestimmung von A ergiebt sich aber daraus, dafs A für $x = x_1, x_2$, etc. die Werthe

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx, \quad \text{etc.}$$

erhält, und dafs von der Function

$$A - \int a\,dx$$

die $\mu_1 - 1$ ersten Differentialqnotienten für $x = x_1$, die $\mu_2 - 1$ ersten für $x = x_2$, etc. verschwinden.

Auf ganz ähnliche Art ist das in den im §. 6. behandelten Beispielen angewandte Verfahren, um aus dem ersten Entwicklungscoefficienten die folgenden abzuleiten, für den Fall, wenn P mehrere gleiche Factoren hat, zu modificiren.

(Berlin im Juli 1847.)

3.

Über eine Eigenschaft der quadratischen Formen von positiver Determinante.

(Von Herrn *G. Lejeune-Dirichlet.*)

(Vorgetragen in der Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse der Berliner Akademie am 16. Juli 1855.) *)

Da der neue Satz, welcher den Gegenstand dieser Vorlesung bildet, innig mit der Theorie der Gleichung

$$(1.) \qquad t^2 - Du^2 = 1$$

zusammenhängt, so sind zunächst einige Bemerkungen über diese Gleichung zu machen, worin die gegebene positive ganze Zahl D keinem Quadrate gleich sein soll und von welcher hier nur die in positiven ganzen Zahlen t, u ausgedrückten Auflösungen zu berücksichtigen sind.

Sind T, U die kleinsten der Gleichung genügenden Werthe, so werden bekanntlich sämmtliche Auflösungen von der eben erwähnten Beschaffenheit durch die Formel

$$(T + U\sqrt{D})^n = t_n + u_n\sqrt{D}$$

erhalten, wenn man der ganzen Zahl n alle positiven Werthe beilegt. Unter diesen Auflösungen giebt es unendlich viele, in denen u_n durch eine beliebige (positive) Zahl S theilbar ist, und die Exponenten n, für die dieser Umstand statt findet, sind die aufeinander folgenden Vielfachen des kleinsten N derselben. Setzt man nämlich $D' = DS^2$, und bildet die neue Gleichung

$$t'^2 - D'u'^2 = 1,$$

so erhellt, dafs jede Auflösung dieser letzteren, wenn $t = t'$, $u = Su'$ gesetzt wird, eine Auflösung von (1.) ergiebt, in welcher u durch S aufgeht, und umgekehrt,. woraus das Behauptete und überdies folgt, dafs N durch die Gleichung

$$(T + U\sqrt{D})^N = T' + U'\sqrt{D'}$$

bestimmt wird, worin T', U' die kleinsten Werthe von t', u' bedeuten.

---

*) Es ist hier von den Zusätzen Gebrauch gemacht worden, welche der geehrte Herr Verfasser der von ihm in den Monatsberichten der Berliner Akademie (Juli 1855) eingerückten Notiz bei einer späteren Veröffentlichung derselben im *Liouville*schen Journal (Februar 1856) hinzugefügt hat.

Man kann, ohne T', U' zu kennen, den Exponenten N angeben, sobald für jeden der verschiedenen in S enthaltenen Primfactoren p der kleinste Werth ν, für den u_ν durch p aufgeht, und zugleich der Exponent δ der höchsten Potenz von p bekannt ist, durch welche u_ν theilbar ist. Es wird nämlich, wenn e eine beliebige durch p^ε (wo ε auch Null sein kann) und keine höhere Potenz von p theilbare Zahl bedeutet, unter der vorhin gemachten Voraussetzung $p^{\delta+\varepsilon}$ die höchste in $u_{\nu e}$ aufgehende Potenz von p.

Um dies zu beweisen, bezeichne man mit θ und η zwei ganze Zahlen, welche der Gleichung (1.) genügen, und überdies mit p^k (wo k von Null verschieden) die höchste in η enthaltene Potenz von p. Wenn man aus dieser Lösung durch die Formel

$$(\theta+\eta\sqrt{D})^m = t+u\sqrt{D}$$

eine neue herleitet, so hat man

$$u = \eta\left\{m\theta^{m-1}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\theta^{m-3}\eta^2 D+\cdots\right\},$$

und, da θ nicht durch p theilbar ist, so erhellt, dafs die höchste in u aufgehende Potenz von p die $k$te sein wird, wenn m nicht durch p theilbar ist, dagegen die $k+1$ste, wenn $m=p$. Da nun die Erhebung zu irgend einer Potenz sich aus den beiden angeführten speciellen Fällen zusammensetzen läfst, so ergiebt sich hieraus das oben ausgesprochene Resultat.

Nach dem eben Bewiesenen besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs $u_{\nu e}$ durch p^α, wo α positiv, theilbar sei, darin, dafs e den Factor $p^{\alpha-\delta}$ haben mufs, wo der Exponent $\alpha-\delta$, wenn er negativ wird, durch Null zu ersetzen ist.

Unterscheidet man nun die verschiedenen in S enthaltenen Primfactoren p so wie die ihnen entsprechenden Werthe ν, δ durch Indices, und setzt

$$S = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots,$$

so ist nach dem Gesagten N das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen

$$\nu_1 p_1^{\alpha_1-\delta_1},\quad \nu_2 p_2^{\alpha_2-\delta_2},\quad \ldots\ .$$

und man sieht sogleich, dafs wenn man ohne neue Primzahlen in S aufzunehmen, sämmtliche Exponenten α_1, α_2, ... über jede Grenze hinaus wachsen läfst, der Quotient $\frac{S}{N}$ bald einen festen von α_1, α_2, ... nicht mehr abhängigen Werth erreichen wird.

Aus der eben bewiesenen Eigenschaft ergiebt sich eine interessante Folgerung für die Theorie der quadratischen Formen von positiver Determi-

nante. Fügt man zu den schon gemachten Voraussetzungen noch die hinzu, dafs D keinen quadratischen Faktor enthält, bezeichnet mit h die Anzahl der Klassen, in welche die zur Determinante D gehörigen Formen zerfallen, und nimmt h' in ähnlicher Bedeutung für die Determinante $D' = DS^2$, so hat man, wie in einer früheren Abhandlung (Rech. sur div. applic. sec. part.) bewiesen worden ist, die Gleichung

$$h' = h \frac{\log(T+U\sqrt{D})}{\log(T'+U'\sqrt{D'})} SR,$$

wo hinsichtlich des Factors R zu bemerken ist, dafs derselbe von den Primzahlen p_1, p_2, ..., nicht aber von den Exponenten α_1, α_2, ..., abhängt. Da man dieser Gleichung auch die Form

$$h' = h \frac{S}{N} R$$

geben kann, so folgt, dafs aus jeder positiven Determinante D unendlich viele andere DS^2 abgeleitet werden können, welchen allen dieselbe Klassenanzahl entspricht. Durch schickliche Wahl von D und den Primzahlen p_1, p_2, ... läfst sich bewirken, und zwar auf unendlich viele verschiedene Arten, dafs diese unveränderliche Anzahl der Klassen mit der der genera übereinstimmt, und so die Richtigkeit der von *Gaufs* ausgesprochenen Vermuthung beweisen, dafs die Reihe der positiven Determinanten, welche in jedem genus nur eine Klasse besitzen, nicht abbricht, was um so merkwürdiger ist, als die mit derselben Eigenschaft begabten negativen Determinanten nur in endlicher Anzahl zu sein scheinen (Disq. arith. art. 303 und 304). Nach einer sehr weit getriebenen Induction (sie erstreckt sich, wenn ich nicht irre, bis 10000), welche zuerst von *Euler* und später von *Gaufs* angestellt wurde, deren ersterer zu einer Zeit, wo die von *Lagrange* gegründete Theorie der quadratischen Formen noch nicht bestand, sich mit diesen Zahlen unter dem Namen der *numeri idonei* beschäftigte, d. h. der zur Auffindung grofser Primzahlen geeigneten Zahlen, würde die Anzahl der in Rede stehenden negativen Determinanten nicht mehr als 65 betragen, und die gröfste derselben würde, abgesehen vom Vorzeichen, den Werth 1848 haben.

4.

Sur un théorème relatif aux séries.*)

(Par M. *G. Lejeune-Dirichlet.*)

Le théorème que je vais établir d'une manière nouvelle est le même qui m'a servi comme lemme dans plusieurs Mémoires précédents. La démonstration que j'en ai donnée dans le premier de ces Mémoires **) suppose une certaine condition qui, bien qu'elle se trouve remplie dans la plupart des applications qu'on peut faire du lemme, n'est pas indispensable, comme j'en ai déjà fait la remarque ailleurs, et comme on pourra au reste le voir dans ce qui va suivre.

Je commence par un cas particulier très-simple et qui consiste en ce que, a et b désignant des constantes positives et ϱ une variable également positive, on a

$$\lim \varrho \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(b+na)^{1+\varrho}} = \frac{1}{a},$$

la limite se rapportant au décroissement indéfini de ϱ. Pour démontrer ce cas particulier, considérons l'intégrale

$$\int_b^\infty \frac{dx}{x^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho b^\varrho}$$

comme l'aire d'une courbe ayant x pour abscisse; cette courbe se rapprochant de plus en plus de l'axe des x, si l'on mène des parallèles à cet axe par les extrémités des ordonnées qui répondent à $x = b,\ b+a,$ etc., on aura des rectangles extérieurs et intérieurs à notre aire, et l'on conclura sur le champ que la somme dont il s'agit d'avoir la limite, se trouve comprise entre les deux quantités

$$\frac{1}{ab^\varrho} + \frac{\varrho}{b^{1+\varrho}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{ab^\varrho},$$

dont la limite commune est $\frac{1}{a}$.

Pour passer maintenant au théorème général, soient

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots\ldots,\ k_n,\ \ldots,$$

des constantes positives rangées par ordre de grandeur croissante, de sorte que $k_n \leqq k_{n+1}$, et supposons que ces constantes soient telles, qu'en désignant

---

*) Journal de M. *Liouville.* Année 1856.

**) Tome XIX de ce Journal.

par t une variable continue et positive, et par T le nombre des termes de notre suite qui ne surpassent pas t, le rapport

$$\frac{T}{t}$$

converge vers la limite finie α lorsque t croît indéfiniment. Cela supposé, je dis que cette même quantité α sera aussi la limite de la somme

$$(1.) \qquad \varrho \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{k_n^{1+\varrho}}$$

pour une valeur infiniment petite de ϱ.

D'après la condition supposée, on peut, δ désignant un nombre aussi petit que l'on voudra, choisir un terme de la série dont la valeur τ soit assez grande pour que, t étant $\geqq \tau$, on ait constamment

$$\alpha - \delta < \frac{T}{t} < \alpha + \delta.$$

Cela fait, soit N la valeur de T qui repond à $t = \tau$, et ne considérons d'abord que les termes de notre série ayant un indice $n > N$. Un pareil terme k_n peut présenter deux cas, selon que l'on aura $k_n < k_{n+1}$ ou $k_n = k_{n+1}$. Dans le premier cas, la valeur de T qui répond à $t = k_n$ sera n, et l'on aura

$$\alpha - \delta < \frac{n}{k_n} < \alpha + \delta.$$

Dans le second cas, soit, parmi les termes qui suivent k_n, $k_{m'}$ le dernier qui soit encore égal à k_n; soit de plus, parmi les termes précédents, k_m le premier dont la valeur soit inférieure à celle de k_n. Si maintenant nous faisons croître t à partir de $t = k_m$, T restera invariablement égal à m, tant que t n'atteindra pas la valeur $k_{m'}$, et notre rapport $\frac{T}{t}$ approchant ainsi indéfiniment de $\frac{m}{k_{m'}}$, en même temps qu'il reste toujours supérieur à $\alpha - \delta$, nous aurons

$$\frac{m}{k_{m'}} > \alpha - \delta.$$

Mais comme par le premier cas nous avons aussi $\frac{m'}{k_{m'}} < \alpha + \delta$, et en outre $m < n < m'$, $k_n = k_{m'}$, nous concluons, comme précédemment,

$$\alpha - \delta < \frac{n}{k_n} < \alpha + \delta.$$

Cette double inégalité étant mise sous la forme

$$(\alpha - \delta)^{1+\varrho} \frac{\varrho}{n^{1+\varrho}} < \frac{\varrho}{k_n^{1+\varrho}} < (\alpha + \delta)^{1+\varrho} \frac{\varrho}{n^{1+\varrho}},$$

si nous sommons depuis $n = N+1$ jusqu'à $n = \infty$, il viendra

$$(\alpha-\delta)^{1+\varrho}.\varrho\Sigma\frac{1}{n^{1+\varrho}} < \varrho\Sigma\frac{1}{k_n^{1+\varrho}} < (\alpha+\delta)^{1+\varrho}.\varrho\Sigma\frac{1}{n^{1+\varrho}}.$$

Or l'expression $\varrho\Sigma\frac{1}{n^{1+\varrho}}$ rentrant dans le cas particulier examiné plus haut, en supposant $b = N+1$, $a = 1$, et ayant par suite l'unité pour limite, on voit que la partie de notre somme (1.), qui s'étend depuis $n = N+1$ jusqu'à $n = \infty$, finira par rester comprise entre $\alpha-\varepsilon$ et $\alpha+\varepsilon$, le nombre ε étant tant soit peu supérieur à δ et par conséquent, comme ce dernier, d'une petitesse arbitraire, et comme en même temps la première partie qui n'a qu'un nombre fini N de termes, converge évidemment vers zéro, il s'ensuit que la limite de l'expression (1.) est en effet α; C. Q. F. D.

5.

Über die Flächen dritten Grades.

(Von Herrn *J. Steiner*.)

(Vorgetragen in der Gesammtsitzung der Berliner Akademie am 31sten Januar 1856.)

Die höheren algebraischen Flächen sind rücksichtlich ihrer charakteristischen geometrischen Eigenschaften noch wenig erforscht. Aus den langjährigen Untersuchungen über diesen Gegenstand wird ein Theil derjenigen Resultate mitgetheilt, die sich auf die Flächen dritten Grades beziehen. Es ist daraus zu sehen, dafs diese Flächen fortan fast eben so leicht und einläfslich zu behandeln sind, als bisher die Flächen zweiten Grades. Von den schönen Eigenschaften der ersteren mögen hier, in gedrängter Kürze, nachstehende angeführt werden.

Zuerst werden mehrere verschiedene Erzeugungsarten der Flächen dritten Grades gezeigt, aus welchen die wesentlichsten Eigenschaften dieser Flächen unmittelbar hervortreten, und wovon folgende die beachtenswerthesten sind.

I. ***Durch die 9 Geraden, g, in welchen die Flächen zweier beliebigen gegebenen Trieder einander gegenseitig schneiden und durch irgend einen gegebenen Punct, P, ist eine Fläche dritten Grades, f^3, bestimmt.*** Nämlich jede durch den Punct gelegte Ebene schneidet die 9 Geraden in 9 Puncten, welche mit jenem zusammen irgend eine Curve dritten Grades bestimmen, und der Ort aller dieser Curven ist die genannte Fläche. — Unter den 9 Geraden g giebt es sechsmal drei solche, welche einander nicht schneiden, und welche also ein Hyperboloid bestimmen; jedes dieser 6 Hyperboloide schneidet die Fläche f^3 noch in drei neuen Geraden, ***so dafs also dieselbe 27 Gerade enthält.*** Rücksichtlich der zwei Schaaren Gerade, die jedes Hyperboloid enthält, gehören die je drei bestimmenden Geraden zur einen und die drei neuen Geraden zur andern Schaar, diese drei schneiden also jene, aber einander nicht.

II. ***Werden ein gegebener Flächenbüschel zweiten Grades, $B(f^2)$, und ein gegebener Ebenenbüschel $B(E)$, projectivisch auf einander be-***

zogen, so erzeugen sie irgend eine Fläche dritten Grades, f^3, welche durch die Grundcurve, R^4,*) des ersten, so wie durch die Axe, g, des andern Büschels geht; d. h. alle Kegelschnitte, C^2, in welchen die einzelnen Flächen zweiten Grades, f^2, von den ihnen entsprechenden Ebenen, E, geschnitten werden,**) liegen in einer Fläche dritten Grades. ***Dabei giebt es fünf Ebenen E, welche die ihnen entsprechenden Flächen f^2 berühren, so dafs der zugehörige Kegelschnitt C^2 in zwei Gerade, g, zerfällt,*** u. s. w.

III. ***Ist ein Flächenbüschel zweiten Grades, $B(f^2)$, gegeben, so ist die Pampolare jedes beliebigen Pols, P, in Bezug auf denselben irgend ein e Flähe dritten Grades f^3, welche stets durch die Grundcurve R^4 des Büschels und auch durch den Pol geht.*** Das heifst, der aus dem Pol P jeder Fläche, f^2, des gegebenen Büschels umschriebene Kegel berührt sie längs eines Kegelschnitts C^2 und alle diese Kegelschnitte liegen in einer Fläche dritten Grades f^3; die Ebenen der Kegelschnitte, als Polarebenen des Pols in Bezug auf die respectiven Flächen des Büschels, gehen sämmtlich durch eine bestimmte Gerade, g, welche auch in der Fläche f^3 liegt. Der gegebene Flächenbüschel enthält insbesondere vier Kegel, wie ***Poncelet*** zuerst gezeigt hat, für jeden derselben zerfällt der genannte Kegelschnitt C^2 in zwei Gerade, g_1, die sich im Scheitel des Kegels kreuzen und mit jener Geraden g ein Dreieck bilden; auch bei derjenigen Fläche des Büschels, welche durch den Pol P geht und daher daselbst von ihrer Polarebene berührt wird, zerfällt der Kegelschnitt C^2 in zwei Gerade, g_2, die sich im Pol kreuzen und gleichfalls mit jener Geraden g ein Dreieck bilden; dies sind zusammen bereits 11 in der Fläche f^3 liegende Gerade. Durch jede der beiden zuletzt genannten Geraden g_2 lassen sich vier solche Ebenen legen, welche die Grundcurve R^4 des Büschels berühren, und jede dieser Ebenen schneidet die Fläche f^3 in zwei neuen Geraden, die sich im Berührungspunct (der Ebene mit der Curve) kreuzen, was mit jenen zusammen 27 in der Fläche f^3 liegende Gerade ausmacht.

---

*) Das heifst, die Raumcurve 4ten Grades, die der gemeinsame Schnitt aller Flächen des $B(f^2)$ ist.

**) Die projectivische Beziehung der gegebenen Büschel geschieht unter anderem dadurch, dafs man in irgend einem Puncte P der Curve R^4 an alle Glieder des Flächenbüschels $B(f^2)$ Berührungsebenen E_1 legt, die einen Ebenenbüschel $B(E_1)$ bilden, diesen sodann mit dem gegebenen Ebenenbüschel $B(E)$, durch willkürliche Annahme von drei Paar sich entsprechender Ebenen, E und E_1, projectivisch bezieht und nachher an Stelle jeder Ebene E_1 diejenige Fläche f^2 nimmt, welche sie berührt.

IV. ***Sind irgend drei Flächen zweiten Grads gegeben, so schneiden sich die drei Polarebenen jedes Pols P in Bezug auf dieselben, im Allgemeinen, in je einem andern Puncte P_1; bewegt sich der Pol P in einer beliebigen gegebenen Ebene, so beschreibt der Punct P_1 irgend eine Fläche dritten Grads.*** Oder: ***Denkt man sich alle Flächen zweiten Grads, welche durch beliebig gegebene sieben Puncte gehen, so liegen die irgend einer gegebenen Ebene in Bezug auf dieselben entsprechenden Pole sämmtlich in einer Fläche dritten Grads.*** Die vielen weitern interessanten Umstände, welche dabei noch stattfinden, müssen hier übergangen werden.

Aus diesen Entstehungsarten — und weiterhin durch Hülfe einiger Polaritäts-Sätze — ergeben sich nachstehende merkwürdige Haupteigenschaften der Flächen dritten Grads.

„Eine allgemeine Fläche dritten Grads f^3 enthält 27 gerade Linien g (reelle oder imaginäre); jede derselben wird von 10 der übrigen geschnitten, und zwar von fünf Paaren die einander selbst schneiden, so dafs sie mit jener fünf Dreiecke bilden. Alle 27 Geraden g schneiden sonach einander zu zweien in 135 Puncten δ und bilden im Ganzen 45 Dreiecke $\triangle$. Die fünf Paar Schnittpuncte, δ, in jeder Geraden, g, gehören zu einem Involutions-Punctensystem; ist dasselbe hyperbolisch, so enthält es zwei Asymptotenpuncte (Doppelpuncte) π. Die Seiten jedes Dreiecks $\triangle$ enthalten entweder 1° alle drei hyperbolisches, oder 2° nur eine hyperbolisches und zwei elliptisches Puncten-System. Oder umfassender:

Es giebt 27 verschiedene Systeme von solchen Ebenen, E, welche die Fläche f^3 in Kegelschnitten, C^2, schneiden, und zwar bestehen dieselben aus 27 Ebenenbüscheln, $B(E)$, welche die 27 Geraden g respective zu Axen haben; und umgekehrt, ***jede Ebene, welche die Fläche f^3 in einem Kegelschnitte schneidet, schneidet dieselbe nothwendig noch in einer der 27 Geraden und gehört zu einem der Ebenenbüschel. Die Schaar Kegelschnitte, C^2, die den Ebenen eines und desselben Ebenenbüschels angehören, schneiden dessen Axe, g, in dem genannten Puncten-System; jede Ebene ist als eine die Fläche f^3 doppelt berührende anzusehen, und die Schnitte ihres Kegelschnitts mit der Axe als die Berührungspuncte; unter den Kegelschnitten giebt es insbesondere zwei, C_0^2, welche die Axe berühren, und zwar in den genannten Asymptotenpuncten π; ferner giebt es fünf Kegelschnitte, die in je zwei Gerade g zer-***

fallen, so dafs die zugehörige Ebene die Fläche f^3 in drei Puncten berührt, nämlich in den Ecken des in ihr liegenden Dreiecks $\triangle$. Die Ebenen der 45 Dreiecke $\triangle$ sind die einzigen, welche die Fläche f^3 in drei Puncten berühren.

Es giebt ferner 45 Systeme von solchen Flächen zweiten Grads, f^2, welche die Fläche dritten Grads f^3 in je drei Kegelschnitten C^2 schneiden; jedem Dreieck $\triangle$ *entspricht ein solches System, nämlich jede drei Ebenen, die beziehlich durch dessen drei Seiten gehen, enthalten drei solche Kegelschnitte C^2, durch welche allemal irgend eine Fläche zweiten Grads geht;* und umgekehrt: *Hat eine Fläche zweiten Grads f^2 mit der Fläche dritten Grads f^3 irgend drei Kegelschnitte gemein, so gehen die Ebenen derselben jedesmal durch die drei Seiten eines der 45 Dreiecke* $\triangle$; oder *geht eine Fläche f^2 durch zwei in der Fläche f^3 liegende Kegelschnitte, so schneiden sich beide Flächen allemal noch in irgend einem dritten Kegelschnitt und die Ebenen der drei Kegelschnitte gehen durch die drei Seiten eines und desselben Dreiecks* $\triangle$. Die Seiten jedes Dreiecks $\triangle$ werden von den vorgenannten besondern Kegelschnitten C_0^2 in ihren Asymptoten-Puncten π berührt; *die drei Paar oder sechs Asymptoten-Puncte liegen zu drei und drei in vier Geraden, l, und durch die je drei zugehörigen Kegelschnitte C_0^2 geht ein Kegel zweiten Grads, f_0^2, welcher die Ebene des Dreiecks längs der zugehörigen Geraden l berührt, und die Scheitel aller vier Kegel liegen in einer Geraden.* Aufserdem enthält das dem Dreieck entsprechende Flächensystem zweiten Grads, f^2, noch unendlich viele Kegel; *ihre Scheitel liegen sämmtlich in einer Fläche vierten Grads.*

Die drei Kegelschnitte C^2, durch welche je eine Fläche zweiten Grads f^2 geht, können insbesondere auch aus drei Paar Geraden g bestehen, wobei dann die Fläche ein einfaches Hyperboloid, h^2, ist. *Nimmt man von den 27 Geraden g irgend drei, welche einander nicht schneiden, so bestimmen sie ein solches Hyperboloid, denn dasselbe schneidet die Fläche f^3 allemal noch in drei andern Geraden g, welche jene drei treffen, aber einander nicht. „Es giebt im Ganzen 360 solche Hyperboloide h^2; jedes der 45 Systeme Flächen zweiten Grads enthält 48 derselben, und jedes Hyperboloid kommt in 8 verschiedenen Systemen vor."*

Wählt man von den 45 Dreiecken $\triangle$ zwei solche, welche keine Gerade g gemein haben, deren Ebenen sich also in einer andern Geraden, etwa k, schneiden, die ihre *Kante* heifst, so treffen sich die Seiten beider

Dreiecke paarweise auf dieser Kante, in drei Puncten δ. Bezeichnet man die Dreiecke durch A und B, ihre Seiten (die Gerade g sind) beziehlich durch a, a_1, a_2 und b, b_1, b_2, so schneiden sich etwa die Paare a und b, a_1 und b_1, a_2 und b_2 auf der Kante k, und sodann sind diese Paare Seiten von drei andern Dreiecken $\triangle$: abc, $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ oder A_1, B_1, C_1, deren dritte Seiten c, c_1, c_2, für sich, die Seiten eines sechsten Dreiecks $\triangle$ oder C sind. Die Ebenen der Dreiecke A, B, C bilden ein Trieder, T, auf dessen drei Kanten k ihre Seiten einander paarweise schneiden, und ebenso bilden die Ebenen der Dreiecke A_1, B_1, C_1 ein Trieder, T_1, auf dessen Kanten ihre Seiten einander treffen; jene Dreiecke, wie diese, haben die nämlichen 9 Geraden g, oder $aa_1a_2bb_1b_2cc_1c_2$ zu Seiten, und die Flächen beider Trieder schneiden einander gegenseitig in denselben (wie oben I.). Zwei solche Trieder heifsen *conjugirte Trieder*.

„Die Ebenen der 45 Dreiecke $\triangle$ bilden auf diese Weise im Ganzen 240 Trieder, oder 120 Paare conjugirte Trieder T und T_1." Diese Paare ordnen sich zu drei und drei in 40 Gruppen, wovon jede Gruppe alle 27 Geraden g enthält.

„Jedes Dreieck $\triangle$ kommt in 16 verschiedenen Triedern vor, so dafs also 16 Trieder-Scheitel in seine Ebene fallen; diese 16 Scheitel liegen allemal in einer Curve vierten Grads, welche die Seiten des Dreiecks zu Doppeltangenten hat, und zwar dieselben in ihren Asymptotenpuncten π berührt."

Die 240 Trieder haben zusammen 720 verschiedene Kanten k; *also liegen die 135 Schnittpuncte δ der 27 Geraden g zu drei und drei in 720 Geraden k, welche sich zu drei und drei in 240 neuen Puncten T (Scheiteln der Trieder) treffen.* Durch jeden Schnittpunct δ gehen je 16 Gerade k, wovon jede noch durch zwei andere Schnittpuncte, etwa δ_1 und δ_2 (statt δ), geht; nimmt man in jeder derselben einen vierten Punct, λ, so, dafs $\delta\delta_1$ $\lambda\delta_2$ harmonisch sind, *so liegen die 16 Puncte λ zweimal zu vier und vier in vier Geraden, und diese 8 Geraden sammt den zwei Geraden g, deren Schnitt jener erste Punct δ ist, liegen in einem Hyperboloid.*

Wird durch irgend einen in der Fläche f^3 liegenden Kegelschnitt C^2 eine beliebige Fläche zweiten Grads, f^2, gelegt, *so schneidet sie jene Fläche, im Allgemeinen, noch in einer Raumcurve vierten Grads, R^4, durch welche allemal unzählige andere Flächen zweiten Grads gehen, oder ein Flächenbüschel zweiten Grads geht; unter diesen Flächen befinden sich 5 solche,*

welche die gegebene Fläche f^3 in je einem Puncte berühren, und die Berührungsebenen in diesen fünf Puncten sammt der Ebene jenes Kegelschnitts C^2 gehen durch eine und dieselbe Gerade g; zudem enthält jede der 5 Berührungsebenen noch zwei andere Gerade g, die sich im Berührungspunct kreuzen, so dafs also jede ein Dreieck $\triangle$ enthält. — Legt man durch irgend zwei einander nicht schneidende Gerade g ein beliebiges Hyperboloid, ***so schneidet dasselbe die Fläche f^3 aufserdem noch in einer solchen Raumcurve vierten Grads, R_1^4, durch welche keine andere Fläche zweiten Grads geht;*** diese Curve ist also wesentlich verschieden von der vorigen R^4, welche als der Schnitt irgend zweier Flächen zweiten Grads anzusehen ist, und ***welche man bisher für die einzige Raumcurve vierten Grades hielt.*** Die beiden Curven unterscheiden sich namentlich noch in folgenden Eigenschaften. ***„Die Tangentenfläche der Curve R_1^4*** (d. h. ***die Fläche, in welcher alle ihre Tangenten liegen***) ***ist vom 6ten Grad und von der 6ten Klasse; wogegen die Tangentenfläche der Curve R^4 vom 8ten Grad und von der 12ten Klasse ist."*** Ferner: ***„Von den zwei Schaaren Gerade, welche in dem durch die Curve R_1^4 gehenden einzigen Hyperboloid liegen, schneidet jede Gerade der einen Schaar die Curve in drei und jede Gerade der andern Schaar nur in einem Punct; wogegen bei jedem Hyperboloid, welches durch die Curve R^4 geht, jede Gerade aus der einen oder andern Schaar dieselbe in zwei Puncten trifft."***

„Somit giebt es zwei wesentlich verschiedene Arten von Raumcurven vierten Grads, R^4 und R_1^4."

Wird der gegebenen Fläche dritten Grads, f^3, aus irgend einem Puncte oder Pol P ein Kegel umschrieben, so ist derselbe vom 6ten Grad und berührt die Fläche längs einer Raumcurve 6ten Grads, durch die jedesmal irgend eine Fläche zweiten Grads, f^2, geht, welche die ***erste Polare*** des Pols P in Bezug auf die gegebene Fläche f^3 heifst. Es giebt unendlich viele solche besondere Pole, deren erste Polare je ein Kegel zweiten Grades, f_0^2, ist, und es findet das Gesetz statt: ***„dafs wenn P_1 der Scheitel dieses Kegels ist, dann auch seine erste Polare gleichfalls ein Kegel ist, und dafs der Scheitel desselben in jenem ersten Pol P liegt."*** Solche zwei Puncte P und P_1 heifsen ***reciproke Pole*** in Bezug auf die Fläche f^3.

„Der gemeinsame Ort aller reciproken Pole ist eine bestimmte Fläche vierten Grads, P^4," welche die ***Kernfläche*** der gegebenen Fläche dritten Grads f^3 genannt wird.

„Die Kernfläche P^4 geht namentlich auch durch die Scheitel der obigen 240 Trieder, und zwar sind die Scheitel jedes der 120 Paar conjugirten Trieder T und T_1 auch ein Paar reciproke Pole." Dabei findet noch der nähere Umstand statt, *dafs der Polarkegel f_0^2 des Scheitels T dem conjugirten Trieder T_1 umschrieben ist, d. h. durch dessen drei Kanten k geht, und ebenso auch umgekehrt.*

„Ferner sind auch die zwei Asymptotenpuncte π in jeder der 27 Geraden g ein Paar reciproke Pole P und P_1, und zwar wird die Gerade in denselben von der Kernfläche P^4 berührt." —

„Es giebt im Ganzen 10 solche spezielle Pole P, oder P_0, deren Polarkegel f_0^2 in zwei Ebenen, F und F_1, zerfällt, (so dafs auch der aus dem Pol der Fläche f^3 umschriebene Kegel in zwei Kegel dritten Grads und ebenso die Berührungscurve in zwei ebene Curven dritten Grads zerfällt); dabei ist dann der reciproke Pol, P_1, nicht mehr absolut bestimmt, sondern er liegt längs der Schnittlinie oder Kante, p_1, der beiden Ebenen überall, so dafs für jeden in dieser Kante liegenden Punct P_1 die erste Polare ein Kegel f_0^2 ist, und dafs die Scheitel aller dieser Kegel in jenem Pol P_0 vereinigt sind." *„Den 10 Polen P_0 entsprechen demnach 10 reciproke Grade p_1."* *„Die 10 Pole sind Knotenpuncte der Kernfläche P^4 und die 10 Geraden liegen ganz in derselben."* Die gegenseitige Lage dieser Pole und Geraden ist der Art, *dafs in jeder Kante p_1 je drei der 10 Pole liegen, und dafs auch durch jeden Pol P_0 je drei der 10 Kanten gehen.* Oder genauer: *„Die 10 Pole P_0 und die 10 Geraden p_1 sind die Ecken und Kanten eines vollständigen Pentaeders, d. h. es giebt 5 bestimmte Ebenen, E_0, die sich paarweise in den 10 Geraden und zu je drei in den 10 Polen schneiden, und wobei die Schnittlinie je zweier Ebenen und der Schnittpunct der jedesmaligen drei andern reciprok sind."* *Die Kernfläche P^4 wird hiernach von jeder der 5 Ebenen E_0 in je vier Geraden p_1 geschnitten. Die durch jede Kante p_1 gehenden, vorgenannten zwei Ebenen F und F_1 sind zu den zugehörigen zwei Ebenen E_0 zugeordnet harmonisch.* Die zehn Ebenenpaare *F* und F_1 haben auch noch interessante gegenseitige Beziehungen unter sich.

Es giebt nun ferner auch noch solche Pole *P*, deren Polarkegel f_0^2 insbesondere Cylinder sind. *„Der Ort dieser Pole ist eine auf der Kernfläche liegende Raumcurve 6ten Grads, R^6, welche durch die 10 Knotenpuncte P_0 derselben geht"* (da deren Polaren, *F* und F_1, auch als Cylinder

anzusehen sind). *„Die Axe, a, jedes Cylinders schneidet die Curve R^6 in drei Puncten, und durch jeden Punct der Curve gehen je drei Axen." Der gemeinschaftliche Ort aller Cylinder-Axen a ist eine (geradlinige) Fläche 8ten Grads, a^8, welche die Curve R^6 zur dreifachen Linie hat, und in welcher namentlich auch die 10 Kanten p_1 des vorgenannten Pentaeders liegen."* Mehrere merkwürdige Eigenschaften dieser Fläche können hier nicht entwickelt werden.

Die Kernfläche P^4 schneidet die gegebene Fläche f^3 längs einer Raumcurve 12ten Grads, R^{12}, welche für die letztere Fläche sehr charakteristisch ist. *Zunächst geht diese Curve durch die 54 Asymptotenpuncte π der 27 Geraden g und berührt sie in denselben, so dafs sie also jede Gerade zur Doppeltangente hat.*

„Sodann scheidet die Curve R^{12} auf der Fläche f^3 diejenigen Regionen von einander ab, wo das Krümmungsmafs positiv und wo dasselbe negativ ist; längs der Curve selbst ist dasselbe Null."

Ferner ist die Curve R^{12} der Ort aller derjenigen Puncte auf der Fläche f^3, in welchen die zugehörige Berührungsebene die Fläche mit Rückkehrpunct schneidet, d. h. in einer solchen Curve dritten Grads C^3 schneidet, welche den Punct zum Rückkehrpunct hat, so dafs also die Rückkehrtangente, t, der Curve C^3 die Fläche f^3 im selben Puncte osculirt oder dreipunctig berührt.

„Der Ort aller dieser Rückkehrtangenten t ist eine abwickelbare Fläche 30sten Grads, t^{30}, welche die Fläche f^3 längs der Curve R^{12} osculirt und die 27 Geraden g zu Doppellinien hat, so dafs also die Schnittcurve beider Flächen, t^{30} und f^3, die vom 90sten Grad sein mufs, aus der dreifachen Curve R^{12} und aus den doppelt zu zählenden 27 Geraden g besteht." U. s. w.

Eine beliebige Ebene, *E*, schneidet die gegebene Fläche f^3 in einer Curve dritten Grads; *die der Fläche längs dieser Curve umschriebene abwickelbare Fläche, Φ, ist vom 12ten Grad und von der 6ten Klasse, und ihre Rückkehrlinie (arrête de rebroussement) ist vom 18ten Grad.* Die zweite Polare irgend eines Pols *P* in Bezug auf die gegebene Fläche f^3 ist eine Ebene, etwa *e*. *„Bewegt sich der Pol P in jener festen Ebene E, so ist die Enveloppe seiner Polarebene e eine Fläche dritten Grads*

e^3 und nur vierter Klasse*), welche vier Knotenpuncte, Q_0, hat, und jener abwickelbaren Fläche Φ eingeschrieben ist; auch ist die Fläche e^3 allemal der Kernfläche P^4 eingeschrieben und berührt dieselbe längs einer Raumcurve 6ten Grads R^6, in welcher namentlich auch die 4 Knotenpuncte Q_0 sich befinden, so dafs also letztere jedesmal in der Kernfläche P^4 liegen." Die Fläche e^3 heifst die ***zweite Polare*** der Ebene E in Bezug auf die gegebene Fläche f^3. Dieselbe hat (vor andern Flächen gleichen Grades) die merkwürdige besondere Eigenschaft: ***dafs der aus irgend einem in ihr liegenden Puncte ihr umschriebene Kegel (der für andere Puncte vom 6ten Grad ist) in zwei Kegel zweiten Grads und in die zugehörige Berührungsebene zerfällt; letztere berührt beide Kegel, und diese gehen stets beide durch die vier Knotenpuncte Q_0. Versetzt man die Ebene E ins Unendliche, so ist ihre zweite Polare e^3 die Enveloppe aller Durchmesser-Ebenen der gegebenen Fläche f^3; dieselbe behält alle angegebenen Eigenschaften, sie ist den Flächen P^4 und Φ eingeschrieben, etc.,*** die letztere, Φ, ist in diesem Falle eine Art asymptotischer Fläche der gegebenen Fläche f^3.

Bewegt sich der Pol P in irgend einer festen Geraden D, ***so ist die Enveloppe seiner Polarebene e ein Kegel zweiten Grads, etwa d^2,*** welcher die ***zweite Polare*** der Geraden D in Bezug auf die gegebene Fläche f^3 heifst.

„Es giebt im Ganzen 100 solche besondere Gerade D, deren zweite Polare sich auf eine Gerade d reducirt, d. h. wobei jener Kegel d^2 sich auf seine Axe d reducirt, so dafs alle Polarebenen e einen Büschel um dieselbe bilden." Den 100 Geraden D entsprechen jedoch zusammen nur 25 Gerade d, indem jede der letztern je vier von jenen entspricht. ***Die 25 Geraden d bestehen aus den 10 Kanten p_1 des obigen Pentaeders und aus den 15 Diagonalen desselben.***

---

*) Eine allgemeine Fläche dritten Grads ist von der zwölften Klasse; im obigen Fall wird die Klasse durch jeden Knotenpunct um 2 erniedrigt, eben so, wie nach *Poncelet*'s Satz, bei den ebenen Curven die Klasse durch jeden Doppelpunct um 2 verringert wird.

6.

Über die den Gaufsischen Perioden der Kreistheilung entsprechenden Congruenzwurzeln.

(Von Herrn *E. E. Kummer,* Professor in Berlin.)

Die Theorie der idealen Primfactoren derjenigen complexen Zahlen, welche als einzige Irrationalitäten die Wurzeln der Gleichung $\alpha = 1$ enthalten, wo λ eine ungerade Primzahl ist, beruht hauptsächlich darauf, dafs allen Perioden, welche aus den Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^{\lambda-1} + \alpha^{\lambda-2} + \alpha^{\lambda-3} + \ldots + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

gebildet werden können, gewisse ganze Zahlen entsprechen, welche aus den die Perioden bestimmenden Gleichungen hervorgehen, wenn man dieselben als Congruenzen für bestimmte Moduln betrachtet. Ist e ein Theiler von $\lambda - 1$, $e.f = \lambda - 1$, und γ eine primitive Wurzel für den Modul λ, so giebt der Ausdruck:

$$\eta_k = \alpha^{\gamma^k} + \alpha^{\gamma^{k+e}} + \alpha^{\gamma^{k+2e}} + \ldots + \alpha^{\gamma^{k+(f-1)e}}$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots e-1$, die e Perioden von je f Gliedern. Diese sind die Wurzeln einer Gleichung des e^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten

$$(1.) \quad y^e + A_1 y^{e-1} + A_2 y^{e-2} + \ldots + A_e = 0$$

und aufserdem besteht für dieselben ein System von e^2 Gleichungen von der Form

$$(2.) \quad \eta_r \eta_{r+k} = \overset{k}{\mu} f + \overset{k}{m} \eta_r + \overset{k}{m_1} \eta_{r+1} + \overset{k}{m_2} \eta_{r+2} + \ldots + \overset{k}{m_{e-1}} \eta_{r-1}$$

für $r = 0, 1, 2, \ldots e-1$ und $k = 0, 1, 2, \ldots e-1$, auf welchen die Rechnung mit den Perioden beruht. Wenn nun q eine Primzahl ist, deren f^{te} Potenz congruent Eins ist, für den Modul λ, für welche also

$$q^f \equiv 1, \mod \lambda,$$

so hat die Congruenz:

$$(3.) \quad y^e + A_1 y^{e-1} + A_2 y^{e-2} + \ldots + A_e \equiv 0, \mod q,$$

stets die e realen Congruenzwurzeln

$$y = u, u_1, u_2, \ldots u_{e-1},$$

welche jedoch auch zum Theil einander gleich sein können. Dieses habe ich

zuerst in der Abhandlung „Über die Divisoren gewisser Formen u. s. w." Bd. 30, pag. 107 dieses Journals streng bewiesen. In der Abhandlung „Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren" Bd. 35, pag. 327 habe ich sodann gezeigt, dafs dieselben Congruenzwurzeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{e-1}$ auch dem Systeme der e^2 Congruenzen

$$(4.) \quad u_r u_{r+k} \equiv \overset{k}{\mu f} + \overset{k}{m} u_r + \overset{k}{m_1} u_{r+1} + \overset{k}{m_2} u_{r+2} + \cdots \overset{k}{m_{e-1}} u_{r-1}, \mod q,$$

für $x = 0, 1, 2, \ldots e-1$, $k = 0, 1, 2, \ldots e-1$, genügen, wenn sie in gehöriger, cyklisch vollständig bestimmter Ordnung genommen werden, und dafs ganz allgemein jede rationale Gleichung unter den Perioden, als Congruenz für den Modul q befriedigt wird, wenn anstatt der Perioden die entsprechenden Congruenzwurzeln eingesetzt werden. Dieser wichtige Punct scheint mir noch einer näheren Aufklärung und vollständigeren Begründung zu bedürfen, welche ich hier mit Hülfe einer sehr einfachen, auch für allgemeinere complexe Zahlen anwendbaren Methode, ausführen will.

Ich gehe zu diesem Zwecke wieder von der auch in meinen früheren Untersuchungen benutzten Congruenz aus:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-q+1) \equiv x^q - x, \mod q,$$

welche identisch für jeden Werth des x erfüllt wird, in der Art, dafs wenn das Product auf der einen Seite nach Potenzen von x entwickelt wird, die Coefficienten der gleichen Potenzen auf beiden Seiten nach dem Modul q congruent sind. Setzt man in dieser Congruenz $x = \eta_k$ und bemerkt, dafs für jede Primzahl q, welche der Congruenz $q^f \equiv 1$, mod. λ, genügt, die q^{te} Potenz einer jeden Periode von f Gliedern derselben einfachen Periode congruent ist, nach dem Modul q, dafs also

$$\eta_k^q \equiv \eta_k, \mod q,$$

welche, so wie auch die folgenden Congruenzen in denen Perioden vorkommen, in dem Sinne aufzufassen ist, dafs wenn man beide Seiten in die lineäre Form $a\eta + a_1\eta_1 + \cdots + a_{e-1}\eta_{e-1}$ bringt, die Coefficienten der gleichen Perioden auf beiden Seiten einzeln congruent sind nach dem Modul q: so erhält man hieraus die Congruenz:

$$(5.) \quad \eta_k(\eta_k-1)(\eta_k-2)\ldots(\eta_k-q+1) \equiv 0, \mod q.$$

Wird nun der Kürze wegen das Product

$$(y-\eta)(y-\eta_1)(y-\eta_2)\ldots(y-\eta_{e-1})$$

oder, was dasselbe ist, die linke Seite der Gleichung (1.) durch $\varphi(y)$ be-

zeichnet, so ergiebt diese Congruenz, wenn nach einander $k = 0, 1, 2, \ldots e-1$ gesetzt und das Product aller so erhaltenen Congruenzen gebildet wird:

$$\varphi(0).\varphi(1).\varphi(2)\ldots.\varphi(q-1) \equiv 0, \mod. q^e.$$

Hieraus folgt, dafs die Congruenz des e^{ten} Grades $\varphi(y) \equiv 0$, mod. q, stets wirkliche Congruenzwurzeln hat. Es sollen nun nur die ***von einander verschiedenen*** Wurzeln dieser Congruenz in Betracht gezogen werden, deren Anzahl gleich h sei, und welche durch $a, a_1, a_2, \ldots a_{h-1}$ bezeichnet werden sollen. Wenn nun diese h Zahlen alle diejenigen erschöpfen, welche der Congruenz $\varphi(y) \equiv 0$, mod. q, genügen, so folgt, dafs es unter den Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots q-1$ aufserdem $q-h$ Zahlen giebt, welche dieser Congruenz nicht genügen, welche durch $b, b_1, b_2, \ldots b_{q-h-1}$ bezeichnet werden sollen. Die Zahlen $a, a_1, \ldots a_{h-1}$ mit den Zahlen $b, b_1, \ldots b_{q-h-1}$ zusammen, erschöpfen so vollständig alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots q-1$, deshalb kann die Congruenz (5.) auch folgendermafsen dargestellt werden:

$$(a-\eta_k)(a_1-\eta_k)\ldots(a_{h-1}-\eta_k)(b-\eta_k)(b_1-\eta_k)\ldots(b_{q-h-1}-\eta_k) \equiv 0, \mod. q.$$

Multiplicirt man diese Congruenz mit dem Producte aller zu $b-\eta_k$ conjugirten Factoren, ebenso mit dem Producte aller zu $b_1-\eta_k$ conjugirten Factoren u. s. w., so geht dieselbe über in:

$$(a-\eta_k)(a_1-\eta_k)\ldots(a_{h-1}-\eta_k).\varphi(b).\varphi(b_1)\ldots\varphi(b_{q-h-1}) \equiv 0, \mod. q.$$

Die Factoren $\varphi(b), \varphi(b_1), \ldots$, welche nur ganze Zahlen sind, deren keine durch q theilbar ist, weil die Zahlen $b, b_1, \ldots b_{q-h-1}$ der Congruenz $\varphi(y) \equiv 0$, mod. q, nicht genügen, können nun durch Division weggehoben werden, wodurch diese Congruenz folgende einfachere Gestalt erhält:

$$(6.) \quad (a-\eta_k)(a_1-\eta_k)(a_2-\eta_k)\ldots.(a_{h-1}-\eta_k) \equiv 0, \mod. q.$$

Aus einer gewissen Anzahl der Factoren dieses Products und der mit denselben conjugirten, nämlich aus den Factoren:

$$\begin{array}{llll}
a-\eta, & a_1-\eta, & a_2-\eta, & \ldots\ a_{h-1}-\eta, \\
a-\eta_1, & a_1-\eta_1, & a_2-\eta_1, & \ldots\ a_{h-1}-\eta_1, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
a-\eta_{e-1}, & a_1-\eta_{e-1}, & a_2-\eta_{e-1}, & \ldots\ a_{h-1}-\eta_{e-1},
\end{array}$$

deren Anzahl gleich $h.e$ ist, bilde ich nun ein Product $\Psi(\eta)$ von der Beschaffenheit, dafs es möglichst viele dieser $h.e$ Factoren enthalte, keinen mehr als einmal, ohne jedoch durch q theilbar zu sein, dafs es aber durch Hinzufügung eines jeden dieser Factoren, der noch nicht darin enthalten ist, durch

q theilbar werde. Um ein solches Product zu bilden nimmt man irgend einen dieser Faktoren und multiplicirt ihn mit einem zweiten, ist dieses Produkt nicht durch q theilbar, so multiplicirt man mit einem dritten und so fort; erhält man durch Hinzufügung eines neuen Faktors ein durch q theilbares Produkt, so ist dieser Faktor zu verwerfen und ein anderer der noch vorhandenen Faktoren zu nehmen, welcher dem Produkte hinzuzufügen oder zu verwerfen ist, jenachdem er dasselbe durch q nicht theilbar oder durch q theilbar macht. Sind auf diese Weise alle $h.e$ Faktoren an die Reihe gekommen und entweder dem Produkte hinzugefügt oder verworfen, so ist das gesuchte Product $\Psi(\eta)$, welches die angegebenen Bedingungen erfüllt, gefunden.

In diesem Produkte $\Psi(\eta)$ können nun von den h zusammengehörenden Faktoren, welche dieselbe Periode η_k enthalten, nämlich

$$a-\eta_k, \quad a_1-\eta_k, \quad a_2-\eta_k, \quad \ldots \quad a_{h-1}-\eta_k$$

nicht alle zugleich enthalten sein, weil sonst vermöge der Congruenz (6.) $\Psi(\eta)$ durch q theilbar sein würde; es mufs also für jede der Perioden η, η_1, η_2, $\ldots$ η_{e-1}, oder was dasselbe ist, für jeden Werth des k wenigstens einen dieser Faktoren geben, welcher nicht in $\Psi(\eta)$ enthalten ist, welcher daher mit $\Psi(\eta)$ multiplicirt ein durch q theilbares Produkt giebt. Wird die in diesem Faktor vorkommende Congruenzwurzel a durch u_k bezeichnet, so dafs dieser Faktor gleich $u_k-\eta_k$ ist, so hat man die Congruenz:

$$(7.) \quad \begin{cases} \Psi(\eta)(u_k-\eta_k) \equiv 0, \mod q, \\ \text{oder} \\ \Psi(\eta)\eta_k \equiv \Psi(\eta)u_k, \mod q, \end{cases}$$

welche Congruenz für jeden beliebigen Werth des $k=0, 1, 2, \ldots e-1$ giltig ist, und somit ein System von e Congruenzen repräsentirt. In dieser Congruenz gehört auch zu jeder bestimmten Periode η_k nur eine einzige Congruenzwurzel u_k; denn wenn derselben auch eine von u_k verschiedene Zahl v_k genügte, so würde daraus folgen

$$\Psi(\eta)(u_k-v_k) \equiv 0, \mod q,$$

welches unmöglich ist.

Bezeichnet nun $F(\eta)$ irgend eine ganze und ganzzahlige Function der Perioden, welche also nur aus Gliedern von der Form $c.\eta_r\eta_s\eta_t\ldots$ besteht, wo die Indices der Perioden auch einander gleich sein können, so hat man

durch mehrmals wiederholte Anwendung der Congruenz (7.)

$$\Psi(\eta).\eta_r.\eta_s.\eta_t \cdots \equiv \Psi(\eta).u_r.u_s.u_t \ldots \mod. q$$

und demnach, wenn $F(u)$ diejenige ganze Zahl bedeutet, welche man aus $F(\eta)$ erhält, wenn man in dieser anstatt der Perioden η, η_1, $\ldots$ η_{e-1} die entsprechenden Congruenzwurzeln u, u_1, $\ldots$ u_{e-1} setzt,

$$(8.) \qquad \Psi(\eta)F(\eta) \equiv \Psi(\eta)F(u), \mod. q.$$

Hat man nun irgend eine rationale Gleichung unter den Perioden, welche aufser diesen nur ganze Zahlen enthält, so kann man dieselbe immer auf die Form $F(\eta) = 0$ bringen, indem man die etwa darin enthaltenen Brüche durch Multiplication entfernt und alle Glieder auf eine Seite bringt. Aus $F(\eta) = 0$ folgt aber vermöge der Congruenz (8.) die Congruenz $F(u) \equiv 0$, mod. q, und somit hat man den vollständigen Beweis des Satzes, ***daſs jede rationale Gleichung unter den Perioden, welche aufser diesen nur ganze Zahlen enthält, als Congruenz für den Modul q befriedigt wird, wenn anstatt der Perioden*** η, η_1, $\ldots$ η_{e-1} ***die ihnen entsprechenden Congruenzwurzeln*** u, u_1, $\ldots$ u_{e-1} ***gesetzt werden.*** Aus dem Systeme der e^2 Fundamentalgleichungen für die Rechnung mit den Perioden, nämlich

$$\eta_r\eta_{r+k} = \overset{k}{\mu f} + \overset{k}{m}\eta_r + \overset{k}{m_1}\eta_{r+1} + \cdots + \overset{k}{m_{e-1}}\eta_{r-1},$$

folgt somit auch das System der e^2 Congruenzen unter den Zahlen u, u_1, $\ldots$ u_{e-1}:

$$u_r u_{r+k} \equiv \overset{k}{\mu f} + \overset{k}{m}u_r + \overset{k}{m_1}u_{r+1} + \cdots + \overset{k}{m_{e-1}}u_{r-1}, \mod. q.$$

Die zu $\Psi(\eta)$ conjugirten complexen Zahlen sind, wie man aus dem angegebenen Bildungsgesetze der Zahl $\Psi(\eta)$ sogleich erkennt, ebenfalls solche complexe Zahlen, welche denselben Bedingungen genügen. Verwandelt man daher in der Congruenz (7.) die in den Perioden zu Grunde gelegte Wurzel α in α^{γ^r}, wodurch die Indices aller Perioden um r vermehrt werden, so hat man

$$(9.) \qquad \Psi(\eta_r)(u_k - \eta_{k+r}) \equiv 0, \mod. q,$$

oder wenn k in $k - r$ verwandelt wird:

$$(10.) \qquad \Psi(\eta_r)(u_{k-r} - \eta_k) \equiv 0, \mod. q,$$

woraus folgt, dafs die den Perioden η, η_1, $\ldots$ η_{e-1} entsprechenden Congruenzwurzeln u, u_1, $\ldots$ u_{e-1}, mit Beibehaltung ihrer cyklischen Ordnung, denselben auf e verschiedene Weisen zugeordnet werden können, nämlich so, dafs für

jeden Werth des k, der Periode η_k die Congruenzwurzel u_{k-r} entspricht, wo r einen jeden der Werthe $r = 0, 1, 2, \ldots e-1$ haben kann.

Die nach der oben angegebenen Regel gebildeten complexen Zahlen $\Psi(\eta)$ können mit dem besten Erfolge als Grundlage für die Theorie der aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten complexen Zahlen, namentlich für die Zerlegung derselben in ihre idealen Primfaktoren benutzt werden. Aus diesem Grunde will ich hier noch die wesentlichsten Eigenschaften derselben kurz entwickeln, indem ich erstens zeige, ***dafs die conjugirten complexen Zahlen*** $\Psi(\eta)$, $\Psi(\eta_1)$, $\ldots$ $\Psi(\eta_{e-1})$ ***alle wirklich von einander verschieden sind,*** und zweitens, ***dafs diese e conjugirten complexen Zahlen alle diejenigen erschöpfen, welche nach dem gegebenen Bildungsgesetze überhaupt gebildet werden können.***

Gesetzt es wären zwei dieser conjugirten Zahlen einander gleich, z. B. $\Psi(\eta_s) = \Psi(\eta_t)$, so würde hieraus, wenn die Indices der Perioden um s vermindert und $t-s = r$ gesetzt wird, folgen, dafs auch

$$\Psi(\eta) = \Psi(\eta_r)$$

sein müfste. Nun ist aber nach den Congruenzen (7.) und (9.)

$$\Psi(\eta)(u_k - \eta_k) \equiv 0 \quad \text{und} \quad \Psi(\eta_r)(u_k - \eta_{k+r}) \equiv 0, \mod q,$$

also müfste auch sein:

$$\Psi(\eta)(\eta_k - \eta_{k+r}) \equiv 0, \mod q.$$

Multiplicirt man nun mit $\alpha^{-\gamma^k}$ und nimmt die Summe für $k = 0, 1, 2, \ldots \lambda-2$, so hat man zunächst

$$\alpha^{-\gamma^k}\eta_k = 1 + \alpha^{\gamma^k(\gamma^e-1)} + \alpha^{\gamma^k(\gamma^{2e}-1)} + \cdots + \alpha^{\gamma^k(\gamma^{(f-1)e}-1)}$$

$$\alpha^{-\gamma^k}\eta_{k+r} = \alpha^{\gamma^k(\gamma^r-1)} + \alpha^{\gamma^k(\gamma^{r+e}-1)} + \alpha^{\gamma^k(\gamma^{r+2e}-1)} + \cdots + \alpha^{\gamma^k(\gamma^{r+(f-1)e}-1)}$$

also

$$\sum_0^{\lambda-2}{}_k \alpha^{-\gamma^k}\eta_k = \lambda - f \quad \text{und} \quad \sum_0^{\lambda-2}{}_k \alpha^{-\gamma^k}\eta_{k+r} = -f,$$

woraus folgen würde

$$\Psi(\eta)\lambda \equiv 0, \mod q,$$

da dieses aber unmöglich ist, so folgt, dafs die conjugirten complexen Zahlen $\Psi(\eta)$, $\Psi(\eta_1)$, $\ldots$ $\Psi(\eta_{e-1})$ wirklich alle von einander verschieden sind.

Betrachtet man nun irgend welche zwei dieser conjugirten Zahlen, so sieht man, dafs dieselben, weil sie wirklich verschieden sind, nicht genau aus denselben Factoren von der Form $a-\eta$ zusammengesetzt sein können, dafs vielmehr die eine irgend welche dieser Factoren enthalten mufs, welche die andere nicht enthält, woraus unmittelbar folgt, dafs die Producte je zweier alle durch q theilbar sein müssen.

Die Summe dieser e conjugirten Zahlen, nämlich

$$\Psi(\eta)+\Psi(\eta_1)+\cdots\Psi(\eta_{e-1})=M$$

ist als symmetrische Function aller Perioden eine nicht complexe ganze Zahl. Dieselbe ist auch nicht durch q theilbar, denn weil die Produkte je zweier verschiedener dieser conjugirten Zahlen alle durch q theilbar sind, so hat man

$$\Psi(\eta).M \equiv \Psi(\eta)^2, \mod. q.$$

Wäre nun M durch q theilbar, so müfste auch $\Psi(\eta)^2$ und folglich auch $\Psi(\eta)$ selbst durch q theilbar sein, welches nicht der Fall ist.

Nimmt man nun an, es liefse sich nach der oben angegebenen Regel aus den Factoren von der Form $a-\eta$ eine von $\Psi(\eta)$ und deren conjugirten verschiedene Zahl $\Phi(\eta)$ bilden, so würde für jedes r die Congruenz Statt haben

$$\Phi(\eta)\Psi(\eta_r) \equiv 0, \mod. q,$$

denn $\Phi(\eta)$ müfste nothwendig irgend welche Factoren von der Form $a-\eta$ enthalten, welche $\Psi(\eta_r)$ nicht enthält und eben so $\Psi(\eta_r)$ irgend welche nicht in $\Phi(\eta)$ enthaltene. Wenn nun nach einander $r=0, 1, 2, \ldots e-1$ genommen wird, so würde die Summation dieser e Congruenzen ergeben

$$\Phi(\eta)M \equiv 0, \mod. q,$$

und weil M eine nicht complexe, durch q nicht theilbare ganze Zahl ist, so müfste sein

$$\Phi(\eta) \equiv 0, \mod. q,$$

welches unmöglich ist. Die e conjugirten complexen Zahlen

$$\Psi(\eta), \Psi(\eta_1), \ldots \Psi(\eta_{e-1})$$

sind also die einzigen, welche den für diese Art von complexen Zahlen festgesetzten Bestimmungen genügen.

Berlin, den 5. Juni 1856.

7.

De aequationibus quarti et sexti gradus quae in theoria linearum et superficierum secundi gradus occurrunt.

(Auctore *F. Joachimsthal,* Prof. ord.)

Quae olim de normalibus linearum et superficierum secundi gradus exposui theoremata, ope duarum aequationum, quarum una quarti altera autem sexti gradus, demonstrari possunt. Cum autem in utraque, quam ea de re conscripsi, commentatione geometrica, harum aequationum proprietates algebraicas consulte praetermiserim, haud inutile fore credo, formulas, quibus antea usus sum, cum Geometris nunc communicare. In fine commentationis nonnulla de aequatione generaliore $2n$ti gradus adjiciam, quae illas tanquam casus speciales continet.

I.

Problema de inveniendis normalibus a puncto (ξ, η) ad conicam ad coordinatas rectangulares relatam

$$(1.) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

ductis, a resolutione aequationis (1.) atque

$$(2.) \qquad a\frac{\xi - x}{x} = b\frac{\eta - y}{y}$$

pendet, ubi x et y tanquam incognitae spectandae sunt. Introducendo aliam incognitam u, valoribus fractionum in (2.) contentarum aequalem, habemus

$$(2^*.) \qquad x = \frac{a\xi}{a+u} \qquad y = \frac{b\eta}{b+u},$$

atque hinc, per aequationem (1.)

$$(3.) \qquad \frac{a\xi^2}{(a+u)^2} + \frac{b\eta^2}{(b+u)^2} = 1,$$

sive, si brevitatis causa loco ipsarum $a\xi^2$, $b\eta^2$ litterae α, β scribuntur

$$(4.) \qquad \frac{\alpha}{(a+u)^2} + \frac{\beta}{(b+u)^2} = 1,$$

cujus aequationis biquadraticae radices signis u_1, u_2, u_3, u_4 denotentur.

Ut relationes inter normales inveniantur, quae a coordinatis ξ, η non pendeant, quantitates α et β inter aequationes

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha}{(a+u_1)^2} + \dfrac{\beta}{(b+u_1)^2} = 1 \\ \dfrac{\alpha}{(a+u_2)^2} + \dfrac{\beta}{(b+u_2)^2} = 1 \\ \dfrac{\alpha}{(a+u_3)^2} + \dfrac{\beta}{(b+u_3)^2} = 1 \end{cases}$$

eliminandae sunt. Aequatio, quam nota eliminationis regula obtinemus, more auctorum recentiorum, qui theoriam determinantium coluerunt, hoc modo exhiberi potest

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(a+u_1)^2} & \dfrac{1}{(b+u_1)^2} & 1 \\ \dfrac{1}{(a+u_2)^2} & \dfrac{1}{(b+u_2)^2} & 1 \\ \dfrac{1}{(a+u_3)^2} & \dfrac{1}{(b+u_3)^2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Quum autem haec aequatio factorem supervacaneum $(u_1-u_2)(u_1-u_3)(u_2-u_3)$ manifesto contineat alia eruenda erit eliminationis methodus cujus ope ad relationem ab hoc incommodo liberam perveniatur.

Designando per $\varphi(a)$ functionem primi vel secundi gradus, atque ponendo

$$(a+u_1)(a+u_2)(a+u_3) = A,$$
$$(b+u_1)(b+u_2)(b+u_3) = B,$$

habemus formulam notam

$$\frac{\varphi(a)}{A} = \frac{\varphi(-u_1)}{u_2-u_1 \,.\, u_3-u_1}\,\frac{1}{a+u_1} + \frac{\varphi(-u_2)}{u_1-u_2 \,.\, u_3-u_2}\,\frac{1}{a+u_2} + \frac{\varphi(-u_3)}{u_1-u_3 \,.\, u_2-u_3}\,\frac{1}{a+u_3}$$

quae differentiatione respectu quantitatis a in hanc

$$(7.)\quad \frac{\varphi(a)A' - \varphi'(a)A}{A^2}$$
$$= \frac{\varphi(-u_1)}{u_2-u_1 \,.\, u_3-u_1}\,\frac{1}{(a+u_1)^2} + \frac{\varphi(-u_2)}{u_1-u_2 \,.\, u_3-u_2}\,\frac{1}{(a+u_2)^2} + \frac{\varphi(-u_3)}{u_1-u_3 \,.\, u_2-u_3}\,\frac{1}{(a+u_3)^2}$$

transit. Jam multiplicando aequationes (5.) per quantitates

$$\frac{\varphi(-u_1)}{u_2-u_1 \,.\, u_3-u_1}, \qquad \frac{\varphi(-u_2)}{u_1-u_2 \,.\, u_3-u_2}, \qquad \frac{\varphi(-u_3)}{u_1-u_3 \,.\, u_2-u_3}$$

atque addendo, obtinemus ope aequationis (7.)

$$(8.)\quad \frac{\alpha}{A^2}\{\varphi(a)A'-\varphi'(a)A\}+\frac{\beta}{B^2}\{\varphi(b)B'-\varphi'(b)B\}$$
$$=\frac{\varphi(-u_1)}{u_2-u_1\,.\,u_3-u_1}+\frac{\varphi(-u_2)}{u_1-u_2\,.\,u_3-u_2}+\frac{\varphi(-u_3)}{u_1-u_3\,.\,u_2-u_3}.$$

Sit $\varphi(a)$ functio linearis $=a+\lambda$, ubi λ quantitatem constantem denotat. Pars dextra aequationis praecedentis secundum formulam Eulerianam evanescere debet, atque habemus

$$(9.)\quad \frac{\alpha}{A^2}\{\varphi(a)A'-\varphi'(a)A\}+\frac{\beta}{B^2}\{\varphi(b)B'-\varphi'(b)B\}=0.$$

Sed quantitas arbitraria λ ita determinari potest, ut sit

$$(10.)\quad \varphi(a)A'-\varphi'(a)A=0,\quad \text{sive } \frac{1}{a+\lambda}=\frac{A'}{A}$$

qua relatione (9.) in hancce transit

$$(11.)\quad \varphi(b)B'-\varphi'(b)B=0,\quad \text{sive } \frac{1}{b+\lambda}=\frac{B'}{B}.$$

Substitutis iterum valoribus functionum A et B, loco duarum aequationum praecedentium habentur sequentes

$$(12.)\quad \begin{cases}\frac{1}{a+\lambda}=\frac{1}{a+u_1}+\frac{1}{a+u_2}+\frac{1}{a+u_3}\\ \frac{1}{b+\lambda}=\frac{1}{b+u_1}+\frac{1}{b+u_2}+\frac{1}{b+u_3}.\end{cases}$$

His calculis eliminatio duarum quantitatum α et β e tribus aequationibus (5.) ad eliminationem unius quantitatis λ e duabus aequationibus (12.) reducta est. Jam subtrahendo aequationes (12.) obtinemus, suppresso factore $a-b$,

$$(13.)\quad \frac{1}{(a+\lambda)(b+\lambda)}=\frac{1}{(a+u_1)(b+u_1)}+\frac{1}{(a+u_2)(b+u_2)}+\frac{1}{(a+u_3)(b+u_3)}$$

et e combinatione satis obvia aequationum (12.) et (13.) haec aequatio finalis respectu radicum u_1, u_2, u_3 omnino symmetrica

$$(14.)\quad \frac{1}{(a+u_2)(b+u_3)}+\frac{1}{(a+u_3)(b+u_2)}+\frac{1}{(a+u_3)(b+u_1)}$$
$$+\frac{1}{(a+u_1)(b+u_3)}+\frac{1}{(a+u_1)(b+u_2)}+\frac{1}{(a+u_2)(b+u_1)}=0$$

derivatur. Calculo praecedenti igitur nacti sumus

Theorema I. Designando quantitatem $\frac{1}{(a+u_1)(b+u_2)}+\frac{1}{(a+u_2)(b+u_1)}$ characteristica $(1,2)$, inter ternas radices u_1, u_2, u_3 aequationis biqua-

draticae

$$(4.) \qquad \frac{\alpha}{(a+u)^2}+\frac{\beta}{(b+u)^2}=1$$

relatio intercedit

$$(14^*.) \qquad (2,3)+(1,3)+(1,2)=0.$$

Qua ex aequatione tres aliae, illi (14*.) analogae, permutatione radicum deduci possunt, scilicet

$$(15.) \qquad (2,4)+(1,4)+(1,2)=0,$$
$$(15^*.) \qquad (1,4)+(1,3)+(3,4)=0,$$
$$(15^{**}.) \qquad (2,4)+(2,3)+(3,4)=0.$$

Formando combinationem (14*.)+(15.)=(15*.)+(15**.) prodit alia aequatio haud inelegans

$$(16.) \qquad (1,2)=(3,4)$$

unde fluit

Theorema II. Inter quatuor radices aequationis $\frac{\alpha}{(a+u)^2}+\frac{\beta}{(b+u)^2}=1$ valet relatio

$$\frac{1}{(a+u_1)(b+u_2)}+\frac{1}{(a+u_2)(b+u_1)}=\frac{1}{(a+u_3)(b+u_4)}+\frac{1}{(a+u_4)(b+u_3)}.$$

Cujus theorematis adjumento sex expressiones

$$(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4),$$

quum sit $(1,2)=(3,4)$, $(1,3)=(2,4)$, $(1,4)=(2,3)$ ad tres diversas $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$ reducuntur quae tanquam radices aequationis cubicae, formae

$$U^3+\lambda' U+\lambda''=0$$

inveniri possunt, ubi λ', λ'' ipsarum α, β, a, b sunt functiones algebraicae facili negotio eruendae.

Observatio. Aequatio fundamentalis (4.) in formam trigonometricam redigi potest, ponendo

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{a+u}=\cos\varphi, \qquad \frac{\sqrt{\beta}}{b+u}=\sin\varphi,$$

unde prodit

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\varphi}-\frac{\sqrt{\beta}}{\sin\varphi}=a-b,$$

sive

$$l\sin\varphi+m\cos\varphi=\sin\varphi\cos\varphi, \quad \text{ubi} \quad l=\frac{\sqrt{\alpha}}{a-b},\ m=-\frac{\sqrt{\beta}}{a-b}.$$

Quae igitur de aequatione biquadratica (4.) supra invenimus theoremata, nunc ita audiunt.

„Inter radices φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 aequationis $l\sin\varphi + m\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi$
„intercedunt relationes

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2)+\sin(\varphi_1+\varphi_3)+\sin(\varphi_2+\varphi_3) = 0$$
$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4 = (2n+1)\pi; \quad n = \text{num. int.}"$$

Interpretationem geometricam relationis (14.) infra examinabimus.

II.

Perinde problema ducendi lineas normales a puncto (ξ, η, ζ) ad superficiem

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} = 1$$

a resolutione aequationis sexti gradus

$$(17.) \qquad \frac{a\xi^2}{(a+u)^2}+\frac{b\eta^2}{(b+u)^2}+\frac{c\zeta^2}{(c+u)^2} = 1$$

sive

$$(18.) \qquad \frac{\alpha}{(a+u)^2}+\frac{\beta}{(b+u)^2}+\frac{\gamma}{(c+u)^2} = 1$$

pendet, ubi brevitatis gratia α, β, γ loco ipsarum $a\xi^2$, $b\eta^2$, $c\zeta^2$ scripsimus. Ut proprietates normalium per idem punctum (ξ, η, ζ) transeuntium detegantur, inter quatuor aequationes

$$(19.) \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{(a+u_1)^2}+\frac{\beta}{(b+u_1)^2}+\frac{\gamma}{(c+u_1)^2} = 1 \\ \frac{\alpha}{(a+u_2)^2}+\frac{\beta}{(b+u_2)^2}+\frac{\gamma}{(c+u_2)^2} = 1 \\ \frac{\alpha}{(a+u_3)^2}+\frac{\beta}{(b+u_3)^2}+\frac{\gamma}{(c+u_3)^2} = 1 \\ \frac{\alpha}{(a+u_4)^2}+\frac{\beta}{(b+u_4)^2}+\frac{\gamma}{(c+u_4)^2} = 1 \end{cases}$$

quantitates α, β, γ eliminandae sunt, ita quidem ut aequatio finalis a producto differentiarum $u_1-u_2 . u_1-u_3 . u_1-u_4 . u_2-u_3 . u_2-u_4 . u_3-u_4$ sit libera. Scribendo

$$(20.) \quad \begin{cases} (a+u_1)(a+u_2)(a+u_3)(a+u_4) = A \\ (b+u_1)(b+u_2)(b+u_3)(b+u_4) = B \\ (c+u_1)(c+u_2)(c+u_3)(c+u_4) = C \end{cases}$$

atque statuendo $\varphi(a) = (a+\lambda)(a+\mu)$, habetur

$$\frac{\varphi(a)}{A} = \frac{\varphi(-u_1)}{u_2-u_1 . u_3-u_1 . u_4-u_1}\,\frac{1}{a+u_1} + \cdots$$

unde, differentiatione respectu ipsius a instituta, prodit aequatio

$$(21.)\qquad \frac{\varphi(a)A' - \varphi'(a)A}{A^2} = \Sigma \frac{\varphi(-u_1)}{u_2-u_1 . u_3-u_1 . u_4-u_1}\,\frac{1}{(a+u_1)^2}.$$

Cujus formulae ope, si aequationes (19.) ex ordine factoribus

$$\frac{\varphi(-u_1)}{u_2-u_1 . u_3-u_1 . u_4-u_1},\quad \frac{\varphi(-u_2)}{u_1-u_2 . u_3-u_2 . u_4-u_2},\quad \frac{\varphi(-u_3)}{u_1-u_3 . u_2-u_3 . u_4-u_3},$$
$$\frac{\varphi(-u_4)}{u_1-u_4 . u_2-u_4 . u_3-u_4}$$

multiplicantur, obtinemus addendo

$$\frac{\alpha}{A^2}\{\varphi(a)A' - \varphi'(a)A\} + \frac{\beta}{B^2}\{\varphi(b)B' - \varphi'(b)B\} + \frac{\gamma}{C^2}\{\varphi(c)C' - \varphi'(c)C\}$$
$$= \Sigma \frac{\varphi(-u_1)}{u_2-u_1 . u_3-u_1 . u_4-u_1}.$$

Quum functio φ secundum gradum non transgrediatur, pars dextra hujus formulae evanescit; habemus itaque

$$(22.)\quad \frac{\alpha}{A^2}\{\varphi(a)A' - \varphi'(a)A\} + \frac{\beta}{B^2}\{\varphi(b)B' - \varphi'(b)B\} + \frac{\gamma}{C^2}\{\varphi(c)C' - \varphi'(c)C\} = 0.$$

Quantitates λ et μ, quae in functione φ inveniuntur, quippe quae omnino arbitrariae sint, ita determinari possunt, ut ipsarum $\frac{\alpha}{A^2}$, $\frac{\beta}{B^2}$ coefficientes evanescant. Quo facto, aequatio (22.) in tres alias discerpitur,

$$\varphi(a)A' - \varphi'(a)A = 0,\quad \varphi(b)B' - \varphi'(b)B = 0,\quad \varphi(c)C' - \varphi'(c)C = 0$$

sive in

$$(23.)\quad \begin{cases} \frac{1}{a+\lambda} + \frac{1}{a+\mu} = \frac{1}{a+u_1} + \frac{1}{a+u_2} + \frac{1}{a+u_3} + \frac{1}{a+u_4} \\ \frac{1}{b+\lambda} + \frac{1}{b+\mu} = \frac{1}{b+u_1} + \frac{1}{b+u_2} + \frac{1}{b+u_3} + \frac{1}{b+u_4} \\ \frac{1}{c+\lambda} + \frac{1}{c+\mu} = \frac{1}{c+u_1} + \frac{1}{c+u_2} + \frac{1}{c+u_3} + \frac{1}{c+u_4}. \end{cases}$$

Reduximus itaque eliminationem ipsarum α, β, γ e quatuor aequationibus (19.) ad eliminationem duarum quantitatum λ et μ e tribus aequationibus (23.). Quae eliminatio, quamvis illa, quam supra (I.) tractavimus, multo complicatior, haud ineleganter hoc modo perficitur.

Subtrahendo binas aequationes (23.) habemus

$$(24.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(a+\lambda)(b+\lambda)}+\frac{1}{(a+\mu)(b+\mu)}\\ =\ &\frac{1}{(a+u_1)(b+u_1)}+\frac{1}{(a+u_2)(b+u_2)}+\frac{1}{(a+u_3)(b+u_3)}+\frac{1}{(a+u_4)(b+u_4)}\\ &\frac{1}{(b+\lambda)(c+\lambda)}+\frac{1}{(b+\mu)(c+\mu)}\\ =\ &\frac{1}{(b+u_1)(c+u_1)}+\frac{1}{(b+u_2)(c+u_2)}+\frac{1}{(b+u_3)(c+u_3)}+\frac{1}{(b+u_4)(c+u_4)}\\ &\frac{1}{(a+\lambda)(c+\lambda)}+\frac{1}{(a+\mu)(c+\mu)}\\ =\ &\frac{1}{(a+u_1)(c+u_1)}+\frac{1}{(a+u_2)(c+u_2)}+\frac{1}{(a+u_3)(c+u_3)}+\frac{1}{(a+u_4)(c+u_4)}\end{aligned}\right.$$

et multiplicando aequationes (23.) ex ordine per

$$\frac{1}{b-a.c-a},\qquad \frac{1}{a-b.c-b},\qquad \frac{1}{a-c.b-c}$$

atque addendo, habetur

$$(25.)\quad \frac{1}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)}+\frac{1}{(a+\mu)(b+\mu)(c+\mu)} = \frac{1}{(a+u_1)(b+u_1)(c+u_1)}+\cdots+\frac{1}{(a+u_4)(b+u_4)(c+u_4)}.$$

Jam procul dubio lectorem accuratius examinantem non fugit, calculos, quorum adjumento ex aeq. (12.) et (13.) quantitatem λ eliminavimus, hac formula concinne exhiberi posse

$$(26.)\quad (\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n)-(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n) = \Sigma(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1).$$

Si $n=1$, pars laeva in nihilum abit; si autem $n\geqq 2$, summa ad dextram $\frac{n(n-1)}{2}$ summas binarias ut $\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1$ continet.

Est autem formula (26.) prima in serie quadam infinita formularum, quarum secunda hoc modo scribi potest:

$$(27.)\quad \Sigma\xi_1\Sigma\eta_1\Sigma\zeta_1-\Sigma\xi_1\Sigma\eta_1\zeta_1-\Sigma\eta_1\Sigma\xi_1\zeta_1-\Sigma\zeta_1\Sigma\xi_1\eta_1+2\Sigma\xi_1\eta_1\zeta_1 = \Sigma(\xi_1\eta_2\zeta_3+\xi_1\eta_3\zeta_2+\xi_2\eta_3\zeta_1+\xi_2\eta_1\zeta_3+\xi_3\eta_1\zeta_2+\xi_3\eta_2\zeta_1).$$

Summae Σ in membro primo aequationis (27.) n terminos, summa autem in membro secundo $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ summas partiales senarias continet; si autem $n=1$, aut $n=2$, primum membrum evanescit.

Habemus ex. gr. pro $n = 3$

$$(28.)\quad (\xi_1+\xi_2+\xi_3)(\eta_1+\eta_2+\eta_3)(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)-(\xi_1+\xi_2+\xi_3)(\eta_1\zeta_1+\eta_2\zeta_2+\eta_3\zeta_3)$$
$$-(\eta_1+\eta_2+\eta_3)(\xi_1\zeta_1+\xi_2\zeta_2+\xi_3\zeta_3)-(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3)$$
$$+2(\xi_1\eta_1\zeta_1+\xi_2\eta_2\zeta_2+\xi_3\eta_3\zeta_3)$$
$$=\xi_1\eta_2\zeta_3+\xi_1\eta_3\zeta_2+\xi_2\eta_1\zeta_3+\xi_2\eta_3\zeta_1+\xi_3\eta_1\zeta_2+\xi_3\eta_2\zeta_1,$$

unde fluit aequatio identica

$$(29.)\quad (\xi_1+\xi_2)(\eta_1+\eta_2)(\zeta_1+\zeta_2)-(\xi_1+\xi_2)(\eta_1\zeta_1+\eta_2\zeta_2)-(\eta_1+\eta_2)(\xi_1\zeta_1+\xi_2\zeta_2)$$
$$-(\zeta_1+\zeta_2)(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)+2(\xi_1\eta_1\zeta_1+\xi_2\eta_2\zeta_2)=0.$$

Quibus expositis ad eliminationem ipsarum λ et μ progrediamur. Formetur hunc ad finem expressio

$$\left(\frac{1}{a+\lambda}+\frac{1}{a+\mu}\right)\left(\frac{1}{b+\lambda}+\frac{1}{b+\mu}\right)\left(\frac{1}{c+\lambda}+\frac{1}{c+\mu}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{a+\lambda}+\frac{1}{a+\mu}\right)\left(\frac{1}{(b+\lambda)(c+\lambda)}+\frac{1}{(b+\mu)(c+\mu)}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{b+\lambda}+\frac{1}{b+\mu}\right)\left(\frac{1}{(a+\lambda)(c+\lambda)}+\frac{1}{(a+\mu)(c+\mu)}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{c+\lambda}+\frac{1}{c+\mu}\right)\left(\frac{1}{(a+\lambda)(b+\lambda)}+\frac{1}{(a+\mu)(b+\mu)}\right)$$
$$+2\left(\frac{1}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)}+\frac{1}{(a+\mu)(b+\mu)(c+\mu)}\right),$$

quae secundum formulam (29.) identice evanescit. Substitutis autem valoribus summarum $\frac{1}{a+\lambda}+\frac{1}{a+\mu}$, $\frac{1}{b+\lambda}+\frac{1}{b+\mu}$, etc., supra inventis (cf. formulas (23.), (24), (25.)), obtinemus ope formulae (27.) quaesitam aequationem finalem respectu radicum u_1, u_2, u_3, u_4 omnino symmetricam, quae brevitatis causa

$$(30.)\quad 0=\Sigma\frac{1}{(a+u_1)(b+u_2)(c+u_3)}$$

scribi potest. Signum Σ viginti quatuor terminos continet, e termino primo $\frac{1}{(a+u_1)(b+u_2)(c+u_3)}$ permutatione radicum u_1, u_2, u_3, u_4 deducendos. Quae nunc inventa sunt, hoc modo enuntiari possunt.

Theorema III. Designando quantitatem

$$\frac{1}{(a+u_1)(b+u_2)(c+u_3)}+\frac{1}{(a+u_1)(b+u_3)(c+u_2)}+\frac{1}{(a+u_2)(b+u_1)(c+u_3)}$$
$$+\frac{1}{(a+u_2)(b+u_3)(c+u_1)}+\frac{1}{(a+u_3)(b+u_1)(c+u_2)}+\frac{1}{(a+u_3)(b+u_2)(c+u_1)}$$

characteristica (1, 2, 3), inter quaternas radices u_1, u_2, u_3, u_4 aequationis

$$(18.) \qquad \frac{\alpha}{(a+u)^2}+\frac{\beta}{(b+u)^2}+\frac{\gamma}{(c+u)^2}=1$$

intercedit relatio

$$(31.) \qquad (2,3,4)+(1,3,4)+(1,2,4)+(1,2,3)=0.$$

Quae propositio illi analoga est quam supra demonstravimus. Similiter, ut sex quantitates in (I.) signis (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) denotatas ad tres diversas reduci posse docuimus, nunc reductionem viginti qnantitatum (1, 2, 3), (1, 2, 4) ... (4, 5, 6) ad decem explicabimus.

Derivantur mutatione radicum e formula (31.) relationes

$$(31^a.) \qquad (2,3,5)+(1,3,5)+(1,2,5)+(1,2,3)=0$$
$$(31^b.) \qquad (2,4,5)+(1,4,5)+(1,2,5)+(1,2,4)=0$$
$$(31^c.) \qquad (3,4,5)+(1,4,5)+(1,3,5)+(1,3,4)=0$$
$$(31^d.) \qquad (2,3,4)+(2,3,5)+(2,4,5)+(3,4,5)=0$$
$$(31^e.) \qquad (1,2,3)+(1,2,6)+(1,3,6)+(2,3,6)=0.$$

Formando combinationem $(31.)+(31^a.)=(31^b.)+(31^c.)+(31^d.)$, habemus

$$(32.) \qquad (1,2,3)=(1,4,5)+(2,4,5)+(3,4,5), \text{ unde}$$
$$(1,2,3)=(1,4,6)+(2,4,6)+(3,4,6)$$
$$(1,2,3)=(1,5,6)+(2,5,6)+(3,5,6), \text{ atque similiter}$$
$$(4,5,6)=(1,2,4)+(1,2,5)+(1,2,6)$$
$$(4,5,6)=(1,3,4)+(1,3,5)+(1,3,6)$$
$$(4,5,6)=(2,3,4)+(2,3,5)+(2,3,6).$$

Quarum aequationum ratione habita, summa $(31.)+(31^a.)+(31^e.)$ mutatur in

$$(33.) \qquad (1,2,3)+(4,5,6)=0.$$

Nacti igitur sumus hanc propositionem

Theorema IV. Denotando per u_1, u_2, u_3 tres radices aequationis sexti gradus

$$(10.) \qquad \frac{\alpha}{(a+u)^2}+\frac{\beta}{(b+u)^2}+\frac{\gamma}{(c+u)^2}=1,$$

aequatio vigesimi gradus, cui omnes valores diversi expressionis

$$U=\frac{1}{(a+u_1)(b+u_2)(c+u_3)}+\frac{1}{(a+u_1)(b+u_3)(c+u_2)}+\frac{1}{(a+u_2)(b+u_1)(c+u_3)}$$
$$+\frac{1}{(a+u_2)(b+u_3)(c+u_1)}+\frac{1}{(a+u_3)(b+u_1)(c+u_2)}+\frac{1}{(a+u_3)(b+u_2)(c+u_1)}$$

satisfaciunt, potestatibus imparibus ipsius U caret.

Antequam aequationis generalis $\frac{\alpha_1}{(a_1+u)^2}+\frac{\alpha_2}{(a_2+u)^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{(a_n+u)^2}=1$ proprietates deducemus, nonnulla, ne formularum nexus nimis interrumpatur, de transformatione summae $\Sigma\alpha_1\beta_2\gamma_3\ldots\mu_n$ addantur.

III.

Lemma. „Datis n seriebus quantitatum

$$\begin{array}{lcccl} & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_i \\ & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_i \\ & & \vdots & & \\ & \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_i \\ & \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_i \\ \text{summa} & \Sigma\alpha_1\beta_2\gamma_3 & \ldots & & \mu_n \end{array}$$

„quae $i(i-1)(i-2)\ldots(i-n+1)$ terminos continet, ope summarum

$$(34.)\quad \begin{cases} \Sigma\alpha_1 & \Sigma\beta_1 & \Sigma\gamma_1 & \ldots & \Sigma\mu_1 \\ \Sigma\alpha_1\beta_1 & \Sigma\alpha_1\gamma_1 & \ldots & & \Sigma\lambda_1\mu_1 \\ \Sigma\alpha_1\beta_1\gamma_1 & \Sigma\alpha_1\beta_1\delta_1 & \ldots & & \Sigma\varkappa_1\lambda_1\mu_1 \\ & & \vdots & & \\ & \Sigma\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots & & & \mu_1 \end{cases}$$

„quarum singulae i terminis compositae sunt, exprimi potest, ita ut sit

$$(35.)\quad \Sigma\alpha_1\beta_2\gamma_3\ldots\mu_n = J,$$

„ubi J summarum (34.) functionem integram denotat. Dicimus insuper, „expressionem J pro $i\gtrless n-1$ in nihilum abire.

Quod lemma, facile ad inveniendum difficile autem ad explicandum, cum formula de reductione expressionis $\Sigma x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ ad summas potestatum radicum $x_1, x_2, \ldots x_i$, si ad modum demonstrandi solum spectas, prorsus congruit. Evolutio casuum $i=2, =3, =4$, quorum priores jam supra indicavimus, hic sufficiet (cf. form. 26 et 27). Habetur

$$(26.)\quad \Sigma\alpha_1\beta_2 = \Sigma\alpha_1\Sigma\beta_1-\Sigma\alpha_1\beta_1$$

unde mutliplicando per $\Sigma\gamma_1$

$$(36.)\quad \Sigma\alpha_1\beta_2\Sigma\gamma_1 = \Sigma\alpha_1\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1-\Sigma\alpha_1\beta_1\Sigma\gamma_1.$$

Est autem

$$(36^*.)\quad \Sigma\alpha_1\beta_2\Sigma\gamma_1 = \Sigma\alpha_1\beta_2\gamma_3+\Sigma\alpha_1\gamma_1\beta_2+\Sigma\alpha_2\beta_1\gamma_1,$$

atque iisdem, quibus formula (26.) demonstratur, ratiociniis

$$\Sigma\alpha_1\gamma_1\beta_2 = \Sigma\alpha_1\gamma_1\Sigma\beta_1 - \Sigma\alpha_1\beta_1\gamma_1$$
$$\Sigma\alpha_2\beta_1\gamma_1 = \Sigma\beta_1\gamma_1\Sigma\alpha_1 - \Sigma\alpha_1\beta_1\gamma_1.$$

His valoribus in formulis (36.) et (36*.) substitutis, derivatur

$$(37.)\quad \Sigma\alpha_1\beta_2\gamma_3 = \Sigma\alpha_1\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1 - \Sigma\alpha_1\Sigma\beta_1\gamma_1 - \Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\alpha_1 - \Sigma\gamma_1\Sigma\alpha_1\beta_1 + 2\Sigma\alpha_1\beta_1\gamma_1.$$

Perinde reductio ipsius $\Sigma\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4$ peragitur. Nam multiplicando aequationem praecedentem per $\Sigma\delta_1$, obtinemus

$$(37*.)\quad \Sigma\delta_1\Sigma\alpha_1\beta_2\gamma_3 = \Sigma\alpha_1\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\delta_1 - \Sigma\alpha_1\Sigma\delta_1\Sigma\beta_1\gamma_1 - \Sigma\beta_1\Sigma\delta_1\Sigma\gamma_1\alpha_1 - \Sigma\gamma_1\Sigma\delta_1\Sigma\alpha_1\beta_1 + 2\Sigma\delta_1\Sigma\alpha_1\beta_1\gamma_1.$$

Est autem

$$(37**.)\quad \Sigma\delta_1\Sigma\alpha_1\beta_2\gamma_3 = \Sigma\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4 + \Sigma\alpha_1\delta_1\beta_2\gamma_3 + \Sigma\beta_1\delta_1\alpha_2\gamma_3 + \Sigma\gamma_1\delta_1\alpha_2\beta_3;$$

eademque via, quam ad stabiliendam formulam (37.) secuti sumus, invenitur

$$\Sigma\alpha_1\delta_1\beta_2\gamma_3 = \Sigma\alpha_1\delta_1\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1 - \Sigma\alpha_1\delta_1\Sigma\beta_1\gamma_1 - \Sigma\beta_1\Sigma\alpha_1\gamma_1\delta_1 - \Sigma\gamma_1\Sigma\alpha_1\beta_1\delta_1 + 2\Sigma\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$$
$$\Sigma\beta_1\delta_1\alpha_2\gamma_3 = \Sigma\beta_1\delta_1\Sigma\alpha_1\Sigma\gamma_1 - \Sigma\beta_1\delta_1\Sigma\alpha_1\gamma_1 - \Sigma\alpha_1\Sigma\beta_1\gamma_1\delta_1 - \Sigma\gamma_1\Sigma\alpha_1\beta_1\delta_1 + 2\Sigma\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$$
$$\Sigma\gamma_1\delta_1\alpha_2\beta_3 = \Sigma\gamma_1\delta_1\Sigma\alpha_1\Sigma\beta_1 - \Sigma\gamma_1\delta_1\Sigma\alpha_1\beta_1 - \Sigma\alpha_1\Sigma\beta_1\gamma_1\delta_1 - \Sigma\beta_1\Sigma\alpha_1\gamma_1\delta_1 + 2\Sigma\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1.$$

Quibus valoribus in (37*.) atque (37**.) substitutis, derivatur

$$(38.)\quad \Sigma\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4 = \Sigma\alpha_1\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\delta_1 - \Sigma\alpha_1\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\delta_1 - \Sigma\alpha_1\Sigma\gamma_1\Sigma\beta_1\delta_1 - \Sigma\alpha_1\Sigma\delta_1\Sigma\beta_1\gamma_1 - \Sigma\gamma_1\Sigma\delta_1\Sigma\alpha_1\beta_1 - \Sigma\beta_1\Sigma\delta_1\Sigma\alpha_1\gamma_1 - \Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\alpha_1\delta_1 + 2\Sigma\alpha_1\Sigma_1\beta_1\gamma_1\delta_1 + 2\Sigma\beta_1\Sigma\alpha_1\gamma_1\delta_1 + 2\Sigma\gamma_1\Sigma\alpha_1\beta_1\delta_1 + 2\Sigma\delta_1\Sigma\alpha_1\beta_1\gamma_1 - 6\Sigma\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1.$$

Si singulae summae $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\beta_1$, $\Sigma\gamma_1$, $\Sigma\delta_1$ quatuor continent terminos, ita ut sit $\Sigma\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ etc., pars laeva aequationis (38.), iisdem viginti quatuor terminis composita atque determinans systematis

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{matrix}$$

in eo tantum a determinante differt, quod omnes ejus termini sunt positivi. Unde fluit, partem dextram formulae (38.) evanescere si singulae summae $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\beta_1$, $\Sigma\gamma_1$, $\Sigma\delta_1$ tres aut duos contineant terminos, aut modo unum.

Eodem modo, ope formulae (38.) ad reductionem summae $\Sigma\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4\varepsilon_5$ adscenditur, et sic porro.

Formulas speciales (26.), (37.), (38.) ill. ***Binet*** in diario a schola Polytechnica Parisiensi edito (Cah. XVI. pag. 285) publici juris fecit.

IV.

Inter $(n+1)$ radices diversas $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$ aequationis $2n^{\text{ti}}$ gradus

$$(39.)\qquad \frac{\alpha_1}{(a_1+u)^2}+\frac{\alpha_2}{(a_2+u)^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{(a_n+u)^2}=1$$

manifesto relatio intercedit a constantibus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ libera. Quae ut inveniatur n quantitates α inter $(n+1)$ aequationes eliminandae sunt, quarum prima

$$(40.)\qquad \left|\frac{\alpha_1}{(a_1+u_1)^2}+\frac{\alpha_2}{(a_2+u_1)^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{(a_n+u_1)^2}=1\right|$$

brevitatis causa loco totius systematis scribatur. Methodo, quam in art. I. et II. explicavimus, eliminatio ipsarum $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ad eliminationem $(n-1)$ quantitatum $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ e systemate n aequationum

$$(41.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a_1+v_1}+\dfrac{1}{a_1+v_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_1+v_{n-1}} \\ =\dfrac{1}{a_1+u_1}+\dfrac{1}{a_1+u_2}+\dfrac{1}{a_1+u_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_1+u_{n+1}} \\ \dfrac{1}{a_2+v_1}+\dfrac{1}{a_2+v_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_2+v_{n-1}} \\ =\dfrac{1}{a_2+u_1}+\dfrac{1}{a_2+u_2}+\dfrac{1}{a_2+u_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_2+u_{n+1}} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+v_1}+\dfrac{1}{a_n+v_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n+v_{n-1}} \\ =\dfrac{1}{a_n+u_1}+\dfrac{1}{a_n+u_2}+\dfrac{1}{a_n+u_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n+u_{n+1}} \end{cases}$$

reduci potest. Quo ex systemate derivantur $(n-1)$ alia, quorum primum $\frac{n(n-1)}{2}$ aequationes continens ita repraesentari potest:

$$(42.)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{(a_1+v_1)(a_2+v_1)}+\dfrac{1}{(a_1+v_2)(a_2+v_2)}+\cdots+\dfrac{1}{(a_1+v_{n-1})(a_2+v_{n-1})} \\ =\dfrac{1}{(a_1+u_1)(a_2+u_1)}+\dfrac{1}{(a_1+u_2)(a_2+u_2)}+\cdots+\dfrac{1}{(a_1+u_n)(a_2+u_n)} \\ \qquad +\dfrac{1}{(a_1+u_{n+1})(a_2+u_{n+1})} \end{array}\right|;$$

secundum autem, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ aequationes continens,

$$(43.)\quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{(a_1+v_1)(a_2+v_1)(a_3+v_1)} + \cdots + \dfrac{1}{(a_1+v_{n-1})(a_2+v_{n-1})(a_3+v_{n-1})} \\ = \dfrac{1}{(a_1+u_1)(a_2+u_1)(a_3+u_1)} + \cdots + \dfrac{1}{(a_1+u_n)(a_2+u_n)(a_3+u_n)} \\ \qquad + \dfrac{1}{(a_1+u_{n+1})(a_2+u_{n+1})(a_3+u_{n+1})} \end{array} \right|$$

etc., usque ad ultimum systema pervenitur quod unam tantummodo aequationem complectitur

$$(44.)\quad \sum_{v_1}^{v_{n-1}} \frac{1}{(a_1+v_1)(a_2+v_1)\dots(a_n+v_1)} = \sum_{u_1}^{u_{n+1}} \frac{1}{(a_1+u_1)(a_2+u_1)\dots(a_n+u_1)},$$

quarum aequationum deductio e systemate primitivo (41.) satis obvia est. Jam consideremus summam $1.2.3\dots(n+1)$ terminorum e termino primo permutatione quantitatum $u_1, u_2, u_3, \dots u_{n+1}$ deducendorum

$$\Sigma \frac{1}{(a_1+u_1)(a_2+u_2)\dots(a_n+u_n)}.$$

Quae summa secundum lemma in III. expositum tanquam summarum simplicium

$$(45.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{u_1}^{u_{n+1}} \dfrac{1}{a_1+u_1}, \quad \Sigma \dfrac{1}{a_2+u_1}, \quad \dots \quad \Sigma \dfrac{1}{a_n+u_1} \\ \sum_{u_1}^{u_{n+1}} \dfrac{1}{(a_1+u_1)(a_2+u_1)}, \quad \Sigma \dfrac{1}{(a_1+u_1)(a_3+u_1)}, \quad \dots \quad \Sigma \dfrac{1}{(a_{n-1}+u_1)(a_n+u_1)} \\ \vdots \\ \sum_{u_1}^{u_{n+1}} \dfrac{1}{(a_1+u_1)(a_2+u_1)\dots(a_n+u_1)} \end{array} \right.$$

functio rationalis integra J repraesentari potest. Substituendo autem in J summarum (45.) valores supra inventos, scilicet summas analogas

$$(46.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{v_1}^{v_{n-1}} \dfrac{1}{a_1+v_1}, \quad \Sigma \dfrac{1}{a_2+v_1}, \quad \dots \quad \Sigma \dfrac{1}{a_n+v_1} \\ \sum_{v_1}^{v_{n-1}} \dfrac{1}{(a_1+v_1)(a_2+v_1)}, \quad \Sigma \dfrac{1}{(a_1+v_1)(a_3+v_1)}, \quad \dots \quad \Sigma \dfrac{1}{(a_{n-1}+v_1)(a_n+v_1)} \\ \vdots \\ \sum_{v_1}^{v_{n-1}} \dfrac{1}{(a_1+v_1)(a_2+v_1)\dots(a_n+v_1)} \end{array} \right.$$

expressio J in nihilum abit, quum expressiones (46.) $(n-1)$ tantummodo terminis constent. Hinc prodit

Theorema V. Designando characteristica $(1, 2, 3, \ldots n)$ summam $1.2.3 \ldots n$ terminorum, qui permutatione quantitatum $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ e termino $\frac{1}{(a_1+u_1)(a_2+u_2)\ldots(a_n+u_n)}$ derivantur, inter $(n+1)$ radices diversas $u_1, u_2, u_3, \ldots u_{n+1}$ aequationis $2n^{\text{ti}}$ gradus

$$(39.) \quad \frac{\alpha_1}{(a_1+u)^2} + \frac{\alpha_2}{(a_2+u)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(a_n+u)^2} = 1$$

intercedit relatio

$$(47.) \quad (2,3,4,\ldots n+1)+(1,3,4,\ldots n+1)+(1,2,4,\ldots n+1)+\cdots+(1,2,3,\ldots n)=0$$

quae aequatio una cum reliquis e (47.) permutatione radicum $u_1, u_2, u_3, \ldots u_{2n}$ deducendis systema $\frac{2n.2n-1.2n-2\ldots n+2}{1.\quad 2.\quad 3\ldots n-1}$ relationum format.

E magna copia relationum quae a formula (39.) derivantur, nunc unam tantummodo eligemus, quae demonstratione muniatur, scilicet sequentem

$$(48.) \quad (1, 2, 3, \ldots n) \mp (n+1, n+2, n+3, \ldots 2n) = 0,$$

valente signo superiori vel inferiori prout n par est vel impar (cf. casus speciales (16.) et (33.)). Designemus signo $[1, 2, 3, \ldots n, n+1]$, quod $n+1$ indices continet partem laevam formulae (47.), ita ut sit

$$[1, 2, 3, \ldots n, n+1] = (2, 3, 4, \ldots n+1)+(1, 3, 4, \ldots n+1)+\cdots+(1, 2, 3, \ldots n).$$

Distribuantur indices $1, 2, 3, \ldots 2n-1, 2n$ in duo systemata, cujus alterum indices $1, 2, 3, \ldots n$; alterum autem indices $n+1, n+2, n+3, \ldots 2n$ comprehendat et designetur per A_1 summa omnium $[\,]$, quae n indices primi unum autem secundi systematis, per A_2 summa omnium $[\,]$, quae $n-1$ indices primi, duos autem secundi systematis contineat, etc., usque ad A_n pervenietur, qua littera summam omnium $[\,]$ designabimus, quae unum indicem primi, n autem indices secundi systematis comprehendunt. Jam dico expressionem

$$(49.) \quad A_1 - \frac{1}{n-1}A_2 + \frac{1.2}{n-1.n-2}A_3 - \frac{1.2.3}{n-1.n-2.n-3}A_4 + \cdots + (-1)^{n-1}A_n$$

substitutis valoribus ipsarum $A_1, A_2, \ldots A_n$ in

$$(50.) \quad n\{(1, 2, 3, \ldots n)+(-1)^{n-1}(n+1, n+2, n+3, \ldots 2n)\}$$

abire. Manifesto enim expressio $(1, 2, 3, \ldots n)$ in n terminis solis, quibus A_1

composita est, invenitur; scilicet in

$$[1, 2, \ldots n-1, n, n+1], \quad [1, 2, \ldots n-1, n, n+2],$$
$$[1, 2, \ldots n-1, n, n+3], \quad \ldots \quad [1, 2, \ldots n-1, n, 2n];$$

similiter $(n+1, n+2, n+3, \ldots 2n)$ in n terminis ipsius A_n tantum occurrit. Omnes alios terminos in (49.) se mutuo destruere, hoc modo probari potest. Consideremus simplicitatis causa expressionem

$$(51.) \qquad (1, 2, 3, \ldots n-i, n+1, n+2, n+3, \ldots n+i),$$

quum eadem ratiocinia pro omni expressione ( ) valeant, quae $n-i$ indices primi atque i indices secundi systematis contineat. Quae expressio (51.), ut sine negotio vides, invenitur

$$\begin{aligned} \text{in} \quad & [1, 2, 3, \ldots n-i, n-i+1, n+1, n+2, \ldots n+i], \\ & [1, 2, 3, \ldots n-i, n-i+2, n+1, n+2, \ldots n+i], \\ & [1, 2, 3, \ldots n-i, n-i+3, n+1, n+2, \ldots n+i], \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & [1, 2, 3, \ldots n-i, n, n+1, n+2, \ldots n+i], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{atque in} \quad & [1, 2, 3, \ldots n-i, n+1, n+2, n+3, \ldots n+i, n+i+1], \\ & [1, 2, 3, \ldots n-i, n+1, n+2, n+3, \ldots n+i, n+i+2], \\ & [1, 2, 3, \ldots n-i, n+1, n+2, n+3, \ldots n+i, n+i+3], \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & [1, 2, 3, \ldots n-i, n+1, n+2, n+3, \ldots n+i, n+i, 2n]. \end{aligned}$$

Jam i expressiones primae seriei ad A_i pertinent, itaque in (49.) factore $\pm \frac{1.2.3 \ldots i-1}{n-1.n-2.n-3 \ldots (n-i+1)}$ multiplicatae sunt; atque $(n-i)$ expressiones seriei secundae ad A_{i+1} pertinent, itaque in factorem $\mp \frac{1.2.3 \ldots i}{n-1.n-2.n-3 \ldots n-i}$ ductae sunt. Est igitur in (49.) coefficiens expressionis (51.)

$$= \pm \left\{ i \frac{1.2 \ldots i-1}{n-1.n-2 \ldots n-i+1} - (n-i) \frac{1.2 \ldots i}{n-1.n-2 \ldots n-i} \right\} = 0, \quad \text{q. e. d.}$$

Quum autem omnes quantitates [ ] secundum theorema V. evanescant, summa (49.) sive summa aequivalens (50.) in nihilum abit. Inde prodit formula (48.) sive

Theorema VI. Designando, ut supra, characteristica $(1, 2, 3, \ldots n)$ summam $1.2.3 \ldots n$ terminorum $\Sigma \frac{1}{(a_1+u_1)(a_2+u_2) \ldots (a_n+u_n)}$ qui permutatione quantitatum $u_1, u_2, \ldots u_n$ a termino primo derivantur, inter $2n$

radices $u_1, u_2, \ldots u_{2n}$ aequationis

$$(39.)\quad \frac{\alpha_1}{(a_1+u)^2}+\frac{\alpha_2}{(a_2+u)^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{(a_n+u)^2}=1$$

relatio intercedit haecce

$$(48^*.)\quad (1,2,3,\ldots n)=(-1)^n(n+1,n+2,n+3,\ldots 2n),$$

ita ut resolutione aequationis $\frac{1}{2}\frac{1.2.3\ldots 2n^{\text{ti}}}{(1.2.3\ldots n)^2}$ gradus $\frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2.3\ldots n)^2}$ quantitates $(1,2,3,\ldots n)$ ipsae aut earum quadrata inveniri possint.

V.

Jam methodum a nobis adhibitam cum formula e theoria determinantium deducta comparemus. Scribendo

$$\begin{aligned}(a_1+u_1)(a_1+u_2)\ldots(a_1+u_{n+1}) &= A_1\\ (a_2+u_1)(a_2+u_2)\ldots(a_2+u_{n+1}) &= A_2\\ &\vdots\\ (a_n+u_1)(a_n+u_2)\ldots(a_n+u_{n+1}) &= A_n\end{aligned}$$

habemus *)

$$(52.)\quad \det.\left\{\frac{1}{(a_1+u)^2},\ \frac{1}{(a_2+u)^2},\ \cdots\ \frac{1}{(a_n+u)^2},\ 1\right\}=\frac{V}{A_1^2A_2^2A_3^2\ldots A_n^2}$$
$$u=u_1,\ =u_2,\ =u_3\ \ldots\ =u_{n+1}$$

ubi

$$(53.)\quad V=\det.\{(a_2+u)^2(a_3+u)^2\ldots(a_n+u)^2;\ \ldots(a_1+u)^2(a_2+u)^2\ldots(a_{n-1}+u)^2;$$
$$(a_1+u)^2(a_2+u)^2\ldots(a_n+u)^2\}.$$
$$u=u_1,\ =u_2,\ =u_3\ \ldots\ =u_{n+1}$$

Peracta multiplicatione habemus

$$\begin{aligned}(a_2+u)^2(a_3+u)^2\ldots(a_n+u)^2 &= \lambda_1^{(0)}+\lambda_1^{(1)}u+\cdots+\lambda_1^{(2n-3)}u^{2n-3}+u^{2n-2}\\ (a_1+u)^2(a_3+u)^2\ldots(a_n+u)^2 &= \lambda_2^{(0)}+\lambda_2^{(1)}u+\cdots+\lambda_2^{(2n-3)}u^{2n-3}+u^{2n-2}\\ &\vdots\\ (a_1+u)^2(a_2+u)^2\ldots(a_{n-1}+u)^2 &= \lambda_n^{(0)}+\lambda_n^{(1)}u+\cdots+\lambda_n^{(2n-3)}u^{2n-3}+u^{2n-2}\\ (a_1+u)^2(a_2+u)^2\ldots(a_{n-1}+u)^2(a_n+u)^2 &= \mu^0+\mu^{(1)}u+\cdots+\mu^{(2n-1)}u^{2n-1}+u^{2n}\end{aligned}$$

ubi quantitates λ et μ ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_n$ sunt functionis integrae. Inde sequitur adjumento notissimi theorematis circa determinantium compositionem; ut V tanquam summam $(2n-1)^n(2n+1)$ determinantium partialium hujusce formae

---

*) Denotatio determinantium, qua utimur, explicatione vix eget.

$$(54.) \qquad \nu \det. \begin{vmatrix} u_1^{\alpha_1} & u_1^{\alpha_2} & \dots & u_1^{\alpha_n} & u_1^{\alpha_{n+1}} \\ u_2^{\alpha_1} & u_2^{\alpha_2} & \dots & u_2^{\alpha_n} & u_2^{\alpha_{n+1}} \\ & & \vdots & & \\ u_{n+1}^{\alpha_1} & u_{n+1}^{\alpha_2} & \dots & u_{n+1}^{\alpha_n} & u_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \end{vmatrix}$$

exhiberi possit, ubi ν ipsarum $a_1, a_2, \dots a_n$ functio integra sit. Quum autem determinans (54.) evanescat, quoties duo exponentium $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \alpha_{n+1}$ inter se aequales fiunt, determinans V sive (53.) respectu quantitatum $u_1, u_2, \dots u_{n+1}$ altiorem ordinem adipisci nequit, quam determinans partialis

$$\det. \begin{vmatrix} u_1^{n-1} & u_1^n & u_1^{n+1} & \dots & u_1^{2n-3} & u^{2n-2} & u_1^{2n} \\ u_2^{n-1} & u_2^n & u_2^{n+1} & \dots & u_2^{2n-3} & u_2^{2n-2} & u_2^{2n} \\ & & & \vdots & & & \\ u_{n+1}^{n-1} & u_{n+1}^n & u_{n+1}^{n+1} & \dots & u_{n+1}^{2n-3} & u_{n+1}^{2n-2} & u_{n+1}^{2n} \end{vmatrix}$$

functio V igitur $(n-1)+n+(n+1)\dots+(2n-3)+(2n-2)+2n = \frac{n(3n+1)^{\text{tum}}}{2}$ ordinem non transgreditur. Quum autem V productum ex omnibus ipsarum u differentiis conflatum contineat, scilicet productum

$$(55.) \qquad \begin{aligned} \Delta(u_1, u_2, u_3, \dots u_{n+1}) = {} & (u_1-u_2)(u_1-u_3)\dots(u_1-u_n)(u_1-u_{n+1}) \\ & (u_2-u_3)\dots(u_2-u_n)(u_2-u_{n+1}) \\ & \vdots \\ & (u_{n-1}-u_n)(u_{n-1}-u_{n+1}) \\ & (u_n-u_{n+1}) \end{aligned}$$

quod $\frac{n(n+1)^{\text{ti}}}{2}$ ordinis est, manifesto poni potest

$$(56.) \qquad V = \Delta(u_1, u_2, u_3, \dots u_{n+1}) V_1,$$

denotando per V_1 functionem, quae $n^{2\,\text{tum}}$ ordinem non transgrediatur.

Consideremus expressionem supra signo $[1, 2, 3, \dots n+1]$ notatam, scilicet summam $1.2.3\dots n+1$ terminorum qui e termino $\frac{1}{(a_1+u_1)(a_2+u_2)\dots(a_n+u_n)}$ permutatione radicum $u_1, u_2, u_3, \dots u_{n+1}$ derivantur. Quae summa manifesto in $\frac{U}{A_1 A_2 A_3 \dots A_n}$ transformari potest, ubi U est functio, respectu ipsarum $u_1, u_2, \dots u_{n+1}$ non minoris quam $n^{2\,\text{ti}}$ ordinis, quae factores u_1-u_2, $u_1-u_3, \dots u_n-u_{n+1}$ non contineat. Quum autem eliminatione quantitatum α e systemate $(n+1)$ aequationum

$$(40.) \qquad \left| \frac{\alpha_1}{(a_1+u)^2} + \frac{\alpha_2}{(a_2+u)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(a_n+u)^2} - 1 = 0 \right|_{u = u_1, = u_2, \dots, = u_{n+1}}$$

methodo nota aequatio $V=0$, sive $\Delta(u_1, u_2, \ldots u_{n+1})\, V_1 = 0$, nostra autem methodo aequatio $U=0$, obtinetur; expressiones V_1 atque U, quum posterior priorem, quae, ut facile probatur, identice non evanescit, metiri debeat, nisi factore a solis quantitatibus $a_1, a_2, \ldots a_n$ dependenti differre nequeunt. Habemus igitur formulam

$$(57.)\quad \det.\left\{\frac{1}{(a_1+u)^2}, \frac{1}{(a_2+u)^2}, \ldots \frac{1}{(a_n+u)^2}, 1\right\}_{u=u_1, =u_2, \ldots, =u_{n+1}} = \varrho[1,2,3\ldots n+1]\,\frac{\Delta(u_1, u_2, \ldots u_{n+1})}{A_1 . A_2 . A_3 \ldots A_n}$$

denotando per ϱ functionem rationalem ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_n$.

VI.

Quum quinque abhinc annis theoremata eaque demonstrandi methodos, quae in articulis praecedentibus leguntur, invenissem, a determinatione *generali* ipsius ϱ propter calculorum, in quos incideram, prolixitatem abhorrui; pro casibus autem *specialibus* $n=2$, $=3$, qui soli in illis applicationibus geometricis occurrunt, de quibus postea disseremus, valores ipsius ϱ sine magno labore erui potuerunt. Jam ut de novo quaestionem intacte relictam susciperem, theorema pulcherrimum me commovit, a cl°. *Borchardt* inventum, atque, cum luculenta demonstratione, in commentatione de functionibus symmetricis illustri Academiae Berolinensi praeterito anno tradita publicatum *). Propositio, inter elegantissimas, quae de determinantibus traduntur, formulas censenda hoc modo exhiberi potest

$$(58.)\quad \frac{\det.\left\{\frac{1}{(a_1+u)^2}, \frac{1}{(a_2+u)^2}, \ldots \frac{1}{(a_n+u)^2}\right\}}{\det.\left\{\frac{1}{a_1+u}, \frac{1}{a_2+u}, \ldots \frac{1}{a_n+u}\right\}_{u=u_1, =u_2, \ldots, =u_n}} = \Sigma\frac{1}{(a_1+u_1)(a_2+u_2)\ldots(a_n+u_n)} = (1,2,3,\ldots n)$$

(De vi characteristicae $(1,2,3,\ldots n)$ vide theorema V.).

Permagna hujus formulae atque relationis (57.) similitudo ad novas disquisitiones instituendas me induxit, et adjumento nonnullorum artificiorum, quae olim neglexeram, ad formulam illi (58.) omnino analogam perveni. Quas disquisitiones hic addere non inutile fore credo, ne articuli praecedentis evo-

*) Cf. Relat. menstr. Acad. Berol. pro anno 1855.

lutiones incompletae maneant; solutionis autem merita, si quae adsint, relationis (58.) sagacissimo auctori sunt attribuenda.

Multiplicando aequationem (57.) per productum $(a_1+u_1)^2(a_2+u_2)^2 \dots (a_n+u_n)^2$ atque ponendo deinde $u_1 = -a_1$, $u_2 = -a_2$, $\dots$ $u_n = -a_n$ valor ipsius ϱ facile eruitur. Quibus calculis enim pars laeva aequationis (57.) sive

$$\det. \begin{vmatrix} \frac{1}{(a_1+u_1)^2} & \frac{1}{(a_2+u_1)^2} & \dots & \frac{1}{(a_n+u_1)^2} & 1 \\ \frac{1}{(a_1+u_2)^2} & \frac{1}{(a_2+u_2)^2} & \dots & \frac{1}{(a_n+u_2)^2} & 1 \\ & & \vdots & & \\ \frac{1}{(a_1+u_n)^2} & \frac{1}{(a_2+u_n)^2} & \dots & \frac{1}{(a_n+u_n)^2} & 1 \\ \frac{1}{(a_1+u_{n+1})^2} & \frac{1}{(a_2+u_{n+1})^2} & \dots & \frac{1}{(a_n+u_{n+1})^2} & 1 \end{vmatrix}$$

mutatur in

$$\det. \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \frac{1}{(a_1+u_{n+1})^2} & \frac{1}{(a_2+u_{n+1})^2} & \dots & \frac{1}{(a_n+u_{n+1})^2} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

In secundo membro aequationis (57.)

$$\Delta(u_1, u_2, \dots u_{n+1}) = (u_1-u_{n+1})(u_2-u_{n+1})\dots(u_n-u_{n+1})\Delta(u_1, u_2, u_3, \dots u_n)^*)$$

transit in $(-1)^n.(a_1+u_{n+1})(a_2+u_{n+1})\dots(a_n+u_{n+1})(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta(a_1, a_2, \dots a_n)$; atque $\frac{[1, 2, 3, \dots n+1]}{A_1 A_2 A_3 \dots A_n}$, multiplicatione facta, substitutisque valoribus, quos ipsis u_1, u_2, $\dots$ u_n tribuimus, mutatur in fractionem, cujus numerator unitas, denominator autem

$$\begin{aligned} &= (a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)(a_1+u_{n+1}) \\ &\times (a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)(a_2+u_{n+1}) \\ &\times (a_3-a_1)(a_3-a_2)\dots(a_3-a_n)(a_3+u_{n+1}) \\ &\qquad\qquad\vdots \\ &\times (a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})(a_n+u_{n+1}) \end{aligned}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\Delta(a_1, a_2, \dots a_n)^2(a_1+u_{n+1})(a_2+u_{n+1})\cdots(a_n+u_{n+1})}.$$

*) In producto differentiarum, quod signo Δ denotamus, singulae differentiae $u_\alpha - u_\beta$ ita sumendae sunt ut $\alpha < \beta$.

Quibus valoribus substitutis aequatio (57.) transit in

$$1 = \varrho \frac{(-1)^n}{\Delta(a_1, a_2, \ldots a_n)}, \quad \text{unde } \varrho = (-1)^n \Delta(a_1, a_2, \ldots a_n).$$

Hinc prodit denique e (57.)

$$(59.) \quad \det. \left\{ \frac{1}{(a_1+u)^2}, \frac{1}{(a_2+u)^2}, \ldots \frac{1}{(a_n+u)^2}, 1 \right\}_{u=u_1, =u_2, \ldots =u_{n+1}}$$

$$= (-1)^n \frac{\Delta(a_1, a_2, \ldots a_n)\, \Delta(u_1, u_2, \ldots u_{n+1})}{A_1 A_2 A_3 \ldots A_n} [1, 2, 3, \ldots n+1].$$

Simili modo ut supra, videlicet comparatione dimensionum, invenitur esse

$$(60.) \quad \det. \left\{ \frac{1}{a_1+u}, \frac{1}{a_2+u}, \ldots \frac{1}{a_n+u}, 1 \right\}_{u=u_1, =u_2, \ldots =u_{n+1}} = \frac{\sigma \Delta(u_1, u_2, \ldots u_{n+1})}{A_1 A_2 A_3 \ldots A_n}$$

ubi σ ipsarum a_1, a_2, ... a_n sit functio rationalis. Multiplicando aequationem praecedentem per $(a_1+u_1)(a_2+u_2)\ldots(a_n+u_n)$, atque ponendo $u_1 = -a_1$, $u_2 = -a_2$, ... $u_n = -a_n$, obtinemus $\sigma = \varrho = (-1)^n \Delta(a_1, a_2, \ldots a_n)$, unde

$$(61.) \quad \det. \left\{ \frac{1}{a_1+u}, \frac{1}{a_2+u}, \ldots \frac{1}{a_n+u}, 1 \right\}_{u=u_1, =u_2, =u_3, \ldots =u_{n+1}}$$

$$= (-1)^n \frac{\Delta(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)\, \Delta(u_1, u_2, u_3, \ldots u_{n+1})}{A_1 A_2 A_3 \ldots A_n}.$$

E combinatione aequationum (59.) et (61.) prodit

$$(62.) \quad \frac{\det. \left\{ \frac{1}{(a_1+u)^2}, \frac{1}{(a_2+u)^2}, \ldots \frac{1}{(a_n+u)^2}, 1 \right\}}{\det. \left\{ \frac{1}{a_1+u}, \frac{1}{a_2+u}, \ldots \frac{1}{a_n+u}, 1 \right\}} = [1, 2, 3, \ldots n+1].$$
$$u=u_1, =u_2, =u_3, \ldots =u_{n+1}$$

Faciendo $u_{n+1} =$ quantitati infinite magnae, aequatio (62.) in relationem a cl. ***Borchardt*** inventam transit, scilicet in

$$(58.) \quad \frac{\det. \left\{ \frac{1}{(a_1+u)^2}, \frac{1}{(a_2+u)^2}, \ldots \frac{1}{(a_n+u)^2} \right\}}{\det. \left\{ \frac{1}{a_1+u}, \frac{1}{a_2+u}, \ldots \frac{1}{a_n+u} \right\}}$$
$$u=u_1, =u_2, \ldots =u_n$$

$$= (1, 2, 3, \ldots n) = \Sigma \frac{1}{(a_1+u_1)(a_2+u_2)\ldots(a_n+u_n)}.$$

Simili modo ut e formula (62.) relationem (58.) deduximus, a posteriori ad

priorem calculo persimplici perveniri potest. Insuper relationis (58.) demonstratio exstat directa, quae prorsus similibus, atque supra adhibita sunt, nititur ratiociniis.

VII.

Ad applicationes geometricas transeamus, quae casibus $n=2$ et $n=3$ respondent. Puncta curvae

$$(1.) \qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-1=0,$$

quorum normales per datum punctum (ξ,η) transeunt, ut supra vidimus, formulis data sunt

$$(2^*.) \qquad x_1=\frac{a\xi}{a+u_1}, \qquad y=\frac{b\eta}{b+u_1},$$

littera u_1 denotante radicem aequationis

$$(3.) \qquad \frac{a\xi^2}{(a+u)^2}+\frac{b\eta^2}{(b+u)^2}=1.$$

Statuendo porro $x_2=\frac{a\xi}{a+u_2}$, $y_2=\frac{b\eta}{b+u_2}$, etc., aequatio (14.) sive $[1,2,3]=0$, transformari potest in

$$(63.) \qquad x_2y_3+x_3y_2+x_1y_3+x_3y_1+x_1y_2+x_2y_1=0.$$

Si igitur puncta (x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3) conicae (1.) aequationi (63.) satisfaciunt, normales curvae in his tribus punctis erectae per idem punctum transeunt, sive

puncta conicae (1.), quorum normales cum normalibus punctorum conicae (x_1,y_1), (x_2,y_2) in idem punctum concurrunt, in recta

$$(64.) \qquad x(y_1+y_2)+y(x_1+x_2)+x_1y_2+x_2y_1=0$$

sita sunt.

Considerationibus geometricis ductus constructionem rectae (64.) hancce dedimus (cf. Comment. de normalibus ellipsis atque ellipsoidae, t. XXVI hujus diarii). Sit (p,q) polus rectae puncta (x_1,y_1), (x_2,y_2) jungentis; habetur

$$\frac{px_1}{a}+\frac{qy_1}{b}=1, \qquad \frac{x_1^2}{a}+\frac{y_1^2}{b}=1,$$

$$\frac{px_2}{a}+\frac{qy_2}{b}=1, \qquad \frac{x_2^2}{a}+\frac{y_2^2}{b}=1,$$

ergo

$$\frac{p}{a}=\frac{y_2-y_1}{x_1y_2-x_2y_1}, \qquad \frac{1}{a}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2}$$

unde (65.)

$$p = \frac{x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \frac{y_2 - y_1}{y_2^2 - y_1^2}$$

sive (66.)

$$p = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1 + y_2} \quad \text{atque similiter} \quad q = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2}.$$

Hinc prodit theorema sequens, quod in commentatione supra laudata invenitur:

Designando per p et q coordinatas rectangulares poli lineae rectae, quae puncta h_1, h_2 sectionis conicae $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0$ jungit, recta $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + 1 = 0$ conicam in duabus aliis punctis h_3, h_4 (sive realibus, sive imaginariis), secabit ita ut normales curvae in punctis h_1, h_2, h_3, h_4 ductae in eodem puncto concurrant.

Jam ad superficiem $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$ progrediamur.

Supponamus a puncto quodam h ad superficiem sex normales ductas esse hh_1, hh_2, hh_3, hh_4, hh_5, hh_6. Designando per ξ, η, ζ coordinatas ipsius h, per x_1, y_1, z_1 coordinatas puncti h_1, quod in superficie ipsa situm est, etc. habetur

$$x_1 = \frac{a\xi}{a+u_1}, \quad y_1 = \frac{b\eta}{b+u_1}, \quad z_1 = \frac{c\zeta}{c+u_1},$$

$$x_2 = \frac{a\xi}{a+u_2}, \quad y_2 = \frac{b\eta}{b+u_2}, \quad z_2 = \frac{c\zeta}{c+u_2}, \text{ etc.}$$

ubi u_1, u_2, ... u_6 sunt radices aequationis

$$(17.) \quad \frac{a\xi^2}{(a+u)^2} + \frac{b\eta^2}{(b+u)^2} + \frac{c\zeta^2}{(c+u)^2} - 1 = 0.$$

Quibus valoribus relatio (31.) transit in

$$\begin{aligned}(67.) \quad & x_2 y_3 z_4 + x_2 y_4 z_3 + x_3 y_4 z_2 + x_3 y_2 z_4 + x_4 y_2 z_3 + x_4 y_3 z_2 \\ & + x_1 y_3 z_4 + x_1 y_4 z_3 + x_3 y_4 z_1 + x_3 y_1 z_4 + x_4 y_1 z_3 + x_4 y_3 z_1 \\ & + x_1 y_2 z_4 + x_1 y_4 z_2 + x_2 y_4 z_1 + x_2 y_1 z_4 + x_4 y_1 z_2 + x_4 y_2 z_1 \\ & + x_1 y_2 z_3 + x_1 y_3 z_2 + x_2 y_3 z_1 + x_2 y_1 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_3 y_2 z_1 = 0,\end{aligned}$$

quae est conditio necesssaria (neutiquam autem sufficiens), si normales in punctis snperficiei (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) ductae per idem punctum h transeunt. Formula (67.) etiam hoc modo enuntiari potest:

Si normales in punctis (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) superficiei $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$ in eodem puncto h concurrunt, tria alia puncta,

quorum normales per h transeunt, in plano

$$\begin{aligned}(68.)\quad & x\{y_2z_3+y_3z_2+y_1z_3+y_3z_1+y_1z_2+y_2z_1\}\\ & +y\{z_2x_3+z_3x_2+z_1x_3+z_3x_1+z_1x_2+z_2x_1\}\\ & +z\{x_2y_3+x_3y_2+x_1y_3+x_3y_1+x_1y_2+x_2y_1\}\\ & +x_1y_2z_3+x_1y_3z_2+x_2y_1z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2+x_3y_2z_1=0\end{aligned}$$

sita sunt.

Sit (p,q,r) polus plani, tria puncta (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3) jungentis, habentur sex aequationes

$$\frac{px_1}{a}+\frac{qy_1}{b}+\frac{rz_1}{c}=1; \qquad \frac{x_1^2}{a}+\frac{y_1^2}{b}+\frac{z_1^2}{c}=1.$$

$$\frac{px_2}{a}+\frac{qy_2}{b}+\frac{rz_2}{c}=1; \qquad \frac{x_2^2}{a}+\frac{y_2^2}{b}+\frac{z_2^2}{c}=1.$$

$$\frac{px_3}{a}+\frac{qy_3}{b}+\frac{rz_3}{c}=1; \qquad \frac{x_3^2}{a}+\frac{y_3^2}{b}+\frac{z_3^2}{c}=1;$$

unde

$$\frac{p}{a}=\frac{\det\begin{vmatrix}1&y_1&z_1\\1&y_2&z_2\\1&y_3&z_3\end{vmatrix}}{\det.\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}} \qquad \frac{1}{a}=\frac{\det.\begin{vmatrix}1&y_1^2&z_1^2\\1&y_2^2&z_2^2\\1&y_3^2&z_3^2\end{vmatrix}}{\det.\begin{vmatrix}x_1^2&y_1^2&z_1^2\\x_2^2&y_2^2&z_2^2\\x_3^2&y_3^2&z_3^2\end{vmatrix}};$$ atque dividendo

$$p=\frac{\det.\begin{vmatrix}1&y_1&z_1\\1&y_2&z_2\\1&y_3&z_3\end{vmatrix}}{\det.\begin{vmatrix}1&y_1^2&z_1^2\\1&y_2^2&z_2^2\\1&y_3^2&z_3^2\end{vmatrix}} \qquad \frac{\det.\begin{vmatrix}x_1^2&y_1^2&z_1^2\\x_2^2&y_2^2&z_2^2\\x_3^2&y_3^2&z_3^2\end{vmatrix}}{\det.\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}}.$$

Generaliter loquendo hic valor ipsius p reductionem non admittit. Substitutis autem valoribus

$$x_1=\frac{a\xi}{a+u_1}, \qquad y_1=\frac{b\eta}{b+u_1}, \qquad z_1=\frac{c\zeta}{c+u_1} \text{ etc.}$$

habetur secundum formulam (62.)

$$\frac{\det.\begin{vmatrix}1 & y_1^2 & z_1^2\\ 1 & y_2^2 & z_2^2\\ 1 & y_3^2 & z_3^2\end{vmatrix}}{\det.\begin{vmatrix}1 & y_1 & z_1\\ 1 & y_2 & z_2\\ 1 & y_3 & z_3\end{vmatrix}} = bc\eta\zeta\frac{\det.\left\{1,\ \frac{1}{(b+u)^2},\ \frac{1}{(c+u)^2}\right\}}{\det.\left\{1,\ \frac{1}{(b+u)},\ \frac{1}{(c+u)}\right\}}$$

$u = u_1, = u_2, = u_3$

$$= bc\eta\zeta\left\{\frac{1}{(b+u_2)(c+u_3)} + \frac{1}{(b+u_3)(c+u_2)} + \cdots + \frac{1}{(b+u_2)(c+u_1)}\right\}$$

$$= y_2z_3 + y_3z_2 + y_3z_1 + y_1z_3 + y_1z_2 + y_2z_1;$$

atque secundum (58.),

$$\frac{\det.\begin{vmatrix}x_1^2 & y_1^2 & z_1^2\\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2\\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2\end{vmatrix}}{\det.\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}} = abc\xi\eta\zeta\frac{\det.\left\{\frac{1}{(a+u)^2},\ \frac{1}{(b+u)^2},\ \frac{1}{(c+u)^2}\right\}}{\det.\left\{\frac{1}{a+u},\ \frac{1}{b+u},\ \frac{1}{c+u}\right\}}$$

$u = u_1, = u_2, = u_3$

$$= abc\xi\eta\zeta\Sigma\frac{1}{(a+u_1)(b+u_2)(c+u_3)}$$

$$= x_1y_2z_3 + x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 + x_3y_2z_1,$$

itaque

$$p = \frac{x_1y_2z_3 + x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 + x_3y_2z_1}{y_2z_3 + y_3z_2 + y_1z_3 + y_3z_1 + y_1z_2 + y_2z_1};$$

perinde ipsarum q et r valores eruendi sunt. Ratione igitur habita aequationis (68.) hanc propositionem nacti sumus:

> Sint h_1, h_2, h_3 tria puncta superficiei $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$, quorum normales in eodem puncto h concurrunt; designando per p, q et r coordinatas poli plani $h_1h_2h_3$, tria alia puncta h_4, h_5, h_6 superficiei, quorum normales per h transeunt, in plano
>
> $$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} + 1 = 0$$
>
> sita sunt.

Permultas alias propositiones geometricas e formulis praecedentibus deducendas, quippe quae a nostro fine alienae sunt, nunc praetereamus.

Carlottae-fontibus, m. Sept. 1856.

8.

Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten.

(Von Herrn *L. Kronecker* zu Berlin.)

I. Wenn die Wurzeln einer ganzzahligen Gleichung, in welcher der erste Coefficient *Eins* ist, alle imaginär und ihre analytischen Moduln sämmtlich gleich *Eins* sind, so müssen dieselben stets Wurzeln der Einheit sein.

Beweis. Es seien $a, b, c, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung:

$$F(x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots + N = 0,$$

in welcher $A, B, C, \ldots N$ ganze Zahlen bedeuten. Da nun die Wurzeln $a, b, c, \ldots$ lauter imaginäre Gröfsen mit dem Modul *Eins* sein sollen, so setze man, indem man $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet:

$$a = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad b = \cos\beta + i\sin\beta, \quad c = \cos\gamma + i\sin\gamma, \quad \ldots$$

Alsdann erhält man, wenn die Coefficienten $A, B, C, \ldots$ durch die Wurzeln ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} A &= \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cdots \\ B &= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\alpha+\delta) + \cdots \\ C &= \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\delta) + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Also mufs A gleich einer Summe von n Gröfsen sein, deren jede gröfser als -1 und kleiner als $+1$ ist. Ebenso mufs B gleich einer Summe von $\frac{n(n-1)}{1.2}$ solchen Gröfsen sein, C gleich einer Summe von $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ solchen Gröfsen u. s. w. Da aber $A, B, C, \ldots$ ganze Zahlen sein sollen, so sieht man, dafs jeder Coefficient der Gleichung $F(x) = 0$ nur eine begrenzte Anzahl von Werthen haben kann; und das Produkt aller dieser Anzahlen giebt offenbar die Anzahl aller derjenigen Werth*systeme* an, welche den Coefficienten $A, B, C, \ldots$ überhaupt zukommen können. Hieraus geht hervor, ***dafs es für jeden bestimmten Grad n nur eine endliche Anzahl von Gleichungen geben kann, welche die im obigen Satze angegebenen Bedingungen erfüllen.***

Die Anzahl aller dieser Gleichungen $n$ten Grades sei r, und es sei ferner für irgend eine ganze Zahl k:

$$F_k(x) = (x-a^k)(x-b^k)(x-c^k)\ldots$$

Dann genügt auch die Gleichung $F_k(x)=0$ allen in dem obigen Satze gemachten Voraussetzungen. Denn erstens sind die Coefficienten dieser Gleichung als symmetrische Functionen von $a, b, c, \ldots$ offenbar ganze Zahlen, und zweitens sind die analytischen Moduln ihrer Wurzeln:

$$a^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha, \quad b^k = \cos k\beta + i\sin k\beta, \quad c^k = \cos k\gamma + i\sin k\gamma, \quad \ldots$$

sämmtlich gleich *Eins*. Folglich müssen mindestens zwei unter den Gleichungen:

$$F(x)=0, \quad F_2(x)=0, \quad F_3(x)=0, \quad \ldots \quad F_{r+1}(x)=0$$

identisch sein, d. h. es mufs zwei von einander verschiedene Zahlen h und k geben, für welche $F_h(x)=F_k(x)$ ist. Die Wurzeln der Gleichung $F_h(x)=0$, nämlich: $a^h, b^h, c^h, \ldots$ müssen daher mit den Wurzeln der Gleichung $F_k(x)=0$, nämlich mit: $a^k, b^k, c^k, \ldots$, abgesehen von der Ordnung, übereinstimmen.

Für irgend eine Gröfse der ersten Reihe z. B. a^h sei nun b^k diejenige aus der zweiten Reihe, welche derselben gleich wird, so dafs $a^h = b^k$ ist. Ebenso sei $b^h = c^k$, $c^h = d^k$, $\ldots$ Wenn man so fortfährt, mufs man offenbar auch zu einer Gleichung kommen, in welcher a^k auf der rechten Seite steht. Man erhält also ein System von Gleichungen von folgender Form:

$$a^h = b^k, \quad b^h = c^k, \quad c^h = d^k, \quad \ldots, \quad m^h = a^k.$$

Wird die Anzahl dieser Gleichungen mit μ bezeichnet, und eliminirt man aus denselben die $(\mu-1)$ Gröfsen: $b, c, d, \ldots m$, so erhält man, wie leicht zu sehen:

$$a^{h^\mu - k^\mu} = 1$$

Da nun, wie oben bemerkt, h und k von einander verschiedene ganze Zahlen sind, so zeigt diese Gleichung, dafs a in der That eine Wurzel der Einheit ist; und dieses Resultat gilt offenbar für *alle* Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$, da a ganz beliebig unter denselben gewählt worden ist.

II. Wenn eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, von denen der erste gleich *Eins* ist, lauter reelle Wurzeln hat, die in den Grenzen -2 und $+2$ liegen, die also durch $2\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $2\cos\gamma, \ldots$ dargestellt werden können, so stehen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sämmtlich in commensurablem Verhältnifs zu einem Rechten.

Beweis. Es sei $\Phi(y) = 0$ eine Gleichung von den angegebenen Eigenschaften, und $2\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $2\cos\gamma$, ... die Wurzeln derselben. Wenn man nun den Grad von $\Phi(y)$ mit ν bezeichnet, und man setzt:

$$x^{\nu}.\Phi\left(x+\frac{1}{x}\right) = F(x)$$

so ist $F(x) = 0$ offenbar eine Gleichung, in welcher alle Coefficienten ganze Zahlen sind und der erste derselben gleich ***Eins***. Ferner sieht man leicht, dafs die Wurzeln dieser Gleichung:

$$\cos\alpha \pm i\sin\alpha, \quad \cos\beta \pm i\sin\beta, \quad \cos\gamma \pm i\sin\gamma, \quad \ldots$$

sind, also lauter imaginäre Gröfsen mit dem Modul ***Eins***. Somit genügt die Gleichung $F(x) = 0$ allen in dem obigen ersten Satze aufgestellten Bedingungen, und durch Anwendung desselben ergiebt sich, dafs die Wurzeln: $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, $\cos\beta \pm i\sin\beta$, ... sämmtlich Wurzeln der Einheit sein müssen; ein Resultat, aus welchem die zu beweisende Eigenschaft der Winkelgröfsen α, β, γ, ... unmittelbar hervorgeht.

9.

Über complexe Einheiten.

(Von Herrn *Kronecker* zu Berlin.)

Es ist von Herrn ***Kummer*** zuerst gezeigt worden, dafs, wenn λ eine ungrade Primzahl ist, jede complexe Zahl, welche aus Wurzeln der Gleichung: $x^\lambda = 1$ gebildet, und deren Norm gleich ***Eins*** ist, durch Multiplication mit einer dieser Wurzeln reell gemacht werden kann. Die dabei von Herrn ***Kummer*** gegebene Beweismethode dürfte indefs kaum zu einer Anwendung auf den Fall geeignet sein, in welchem λ eine beliebige zusammengesetzte Zahl ist. Ich werde nun im Folgenden mit Hülfe ganz andrer Prinzipien die analoge Eigenschaft der complexen Einheiten für diesen allgemeineren Fall herleiten; eine Eigenschaft, die noch dadurch ein besonderes Interesse erhält, dafs die Kenntnifs derselben bei der Anwendung der Theorie der complexen Zahlen auf algebraische Untersuchungen als unumgänglich nöthig erscheint.

Bezeichnet man mit n eine ganze Zahl, welche entweder ungrade oder durch 4 theilbar ist, und mit $a, b, c, \ldots$ alle diejenigen unter den Zahlen $2, 3, 4, \ldots n-1$, welche relative Primzahlen zu n sind, so sind bekanntlich: $\omega, \omega^a, \omega^b, \omega^c, \ldots$ die ***sämmtlichen*** primitiven Wurzeln der Gleichung: $x^n = 1$, wenn ω irgend eine derselben bedeutet*). Ferner sind in der Gleichung:

$$(\mathrm{I.}) \qquad (x-\omega)(x-\omega^a)(x-\omega^b)(x-\omega^c)\ldots = 0$$

die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x sämmtlich ganze Zahlen, und es folgt hieraus, dafs jede ganze symmetrische Function der Gröfsen $\omega, \omega^a, \omega^b, \ldots$, mit ganzzahligen Coefficienten, einer ganzen Zahl gleich ist. Endlich erinnere ich noch daran, dafs die Gleichung (I.) (wie ich in einem im 19ten Bande des ***Liouville***schen Journals abgedruckten Aufsatze bewiesen habe) irreductibel ist, und dafs daher jede Gleichung, welche aufser ω nur

---

*) Der Fall, wo $n = 2m$ und m ungrade ist, wird deshalb ausgeschlossen, weil für solche Werthe von n eine primitive $n$te Wurzel der Einheit sich auf eine primitive $m$te Wurzel der Einheit, mit negativem Vorzeichen genommen, reducirt; so dafs also in diesem Falle die aus Wurzeln der Gleichung: $x^n = 1$ gebildeten complexen Zahlen stets als solche betrachtet werden können, welche aus Wurzeln der Gleichung: $x^m = 1$ zusammengesetzt sind.

ganze Zahlen enthält, noch gültig bleiben mufs, wenn für die Gröfse ω irgend eine Potenz derselben substituirt wird, deren Exponent relative Primzahl zu n ist.

Dies vorausgeschickt, können nunmehr die üblichen Benennungen und Zeichen ohne Weiteres auf die aus $n$ten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen übertragen werden. Wenn nämlich $f(\omega)$ irgend eine solche complexe Zahl d. h. eine ganze ganzzahlige Function von ω ist, so sollen: $f(\omega)$, $f(\omega^a)$, $f(\omega^b)$ ... *„die einander conjugirten complexen Zahlen"* heifsen, und das Product derselben soll *„die Norm"* von $f(\omega)$ genannt und mit: $Nf(\omega)$ bezeichnet werden. Diese Norm ist, weil sie die Wurzeln ω, ω^a, ω^b, ... symmetrisch enthält, eine ganze Zahl. Ferner sollen diejenigen ganzen complexen Zahlen, deren Norm gleich *Eins* ist, *„complexe Einheiten"*, und die einfachsten unter denselben, nämlich:

$$\pm 1, \quad \pm\omega, \quad \pm\omega^2, \quad \pm\omega^3, \quad \ldots, \quad \pm\omega^{n-1}$$

„einfache Einheiten" heifsen.

Wenn nun $E(\omega)$ irgend eine complexe Einheit bedeutet, so wird das in Bezug auf ω, ω^a, ω^b, ... symmetrische Product:

$$(\text{II.}) \qquad (x.E(\omega)-E(\omega^{-1}))(x.E(\omega^a)-E(\omega^{-a}))(x.E(\omega^b)-E(\omega^{-b}))\ldots$$

nach Potenzen von x entwickelt, offenbar eine ganze ganzzahlige Function von x ergeben, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von x die Norm von $E(\omega)$ also *Eins* ist. Bezeichnet man diese Function oder, was dasselbe ist, das Product (II.) mit $F(x)$, so sind:

$$\frac{E(\omega^{-1})}{E(\omega)}, \quad \frac{E(\omega^{-a})}{E(\omega^a)}, \quad \frac{E(\omega^{-b})}{E(\omega^b)}, \quad \ldots$$

die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung: $F(x)=0$; und da die analytischen Moduln aller dieser Wurzeln gleich *Eins* sind, so erfüllt, wie man sieht, die Gleichung: $F(x)=0$ alle Bedingungen des ersten der beiden Sätze, welche ich in der vorhergehenden Abhandlung bewiesen habe. Es mufs daher eine ganze Zahl m geben, für welche

$$\left(\frac{E(\omega^{-1})}{E(\omega)}\right)^m = 1$$

ist. — Wenn man nun mit ϱ irgend eine primitive Wurzel der Gleichung: $x^{m\cdot n}=1$ bezeichnet, so läfst sich bekanntlich jede $m$te und jede $n$te Wurzel der Einheit als Potenz von ϱ darstellen. Es sei demnach ϱ^ν diejenige $m$te Wurzel der Einheit, welcher $\frac{E(\omega^{-1})}{E(\omega)}$ gleich wird, so dafs:

$$(\text{III.}) \qquad \boldsymbol{E}(\omega^{-1}) = \varrho^{\nu}.\boldsymbol{E}(\omega)$$

und es sei ferner $\omega = \varrho^{\lambda}$ also:

$$\boldsymbol{E}(\varrho^{-\lambda}) = \varrho^{\nu}.\boldsymbol{E}(\varrho^{\lambda}).$$

In dieser Gleichung kann — wenn das, was ich oben über die Eigenschaften der Gleichung der primitiven $n$ten Wurzeln der Einheit gesagt habe, auf die primitiven Wurzeln der Gleichung: $x^{m.n} = 1$ angewendet wird — für ϱ auch ϱ^{r} gesetzt werden, sobald r relative Primzahl zu $m.n$ ist. Wenn dies geschieht, und alsdann für ϱ^{λ} wieder ω eingesetzt wird, so erhält man:

$$\boldsymbol{E}(\omega^{-r}) = \varrho^{r\cdot\nu}.\boldsymbol{E}(\omega^{r}).$$

Die Gleichung (III.), zur $r$ten Potenz erhoben, giebt aber:

$$\boldsymbol{E}(\omega^{-1})^{r} = \varrho^{r\cdot\nu}.\boldsymbol{E}(\omega)^{r}$$

und die Combination der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$(\text{IV.}) \qquad \boldsymbol{E}(\omega^{r}).\boldsymbol{E}(\omega^{-1})^{r} = \boldsymbol{E}(\omega^{-r}).\boldsymbol{E}(\omega)^{r}$$

welche Gleichung, wie ich nochmals erwähne, für *jede* Zahl r gültig sein mufs, die relative Primzahl zu $m.n$ ist.

Bezeichnet man nun mit μ den gröfsten aller derjenigen Divisoren von m, welche relative Primzahlen zu n sind (so dafs also auch $\mu = 1$ sein kann), so ist leicht zu sehen, dafs die Zahlen $\mu - n$, $\mu + n$ und, wenn n grade ist, auch $\mu + 2n$ relative Primzahlen zu m und n sind. Man kann also in der Gleichung (IV.) für r diese drei Zahlen nach einander einsetzen und erhält dann, wenn man berücksichtigt, dafs $\omega^{\mu-n}$, $\omega^{\mu+n}$, $\omega^{\mu+2n}$ sämmtlich gleich ω^{μ}, und $\omega^{-\mu+n}$, $\omega^{-\mu-n}$, $\omega^{-\mu-2n}$ sämmtlich gleich $\omega^{-\mu}$ sind:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\omega^{\mu}).\boldsymbol{E}(\omega^{-1})^{\mu-n} &= \boldsymbol{E}(\omega^{-\mu}).\boldsymbol{E}(\omega)^{\mu-n} \\
\boldsymbol{E}(\omega^{\mu}).\boldsymbol{E}(\omega^{-1})^{\mu+n} &= \boldsymbol{E}(\omega^{-\mu}).\boldsymbol{E}(\omega)^{\mu+n} \\
\boldsymbol{E}(\omega^{\mu}).\boldsymbol{E}(\omega^{-1})^{\mu+2n} &= \boldsymbol{E}(\omega^{-\mu}).\boldsymbol{E}(\omega)^{\mu+2n}
\end{aligned}$$

Die letzte dieser drei Gleichungen gilt aber nur, wenn n grade ist. Dividirt man dieselbe durch die zweite, so erhält man für diesen Fall:

$$\boldsymbol{E}(\omega^{-1})^{n} = \boldsymbol{E}(\omega)^{n}$$

und wenn man die Wurzel auszieht:

$$(\text{V.}) \qquad \boldsymbol{E}(\omega^{-1}) = \omega^{k}.\boldsymbol{E}(\omega)$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet. Ferner erhält man für den Fall, wo n ungrade ist, indem man die zweite jener drei Gleichungen durch die erste

dividirt:

$$E(\omega^{-1})^{2n} = E(\omega)^{2n}$$

und wenn man die Wurzel auszieht:

$$\text{(VI.)} \qquad E(\omega^{-1}) = \pm\omega^h . E(\omega)$$

wo h eine ganze Zahl ist. Man sieht also, *dafs, sowohl wenn n grade als wenn es ungrade ist, jede aus nten Wurzeln der Einheit gebildete complexe Einheit, durch die reciproke dividirt, als Quotient eine einfache Einheit ergiebt.*

Mit Hülfe dieses Resultats läfst sich nunmehr folgender Satz beweisen: *„Jede complexe, aus Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ gebildete Einheit „kann durch Multiplication mit einer Wurzel der Einheit reell gemacht „werden. In dem Falle, wo n die Potenz einer einfachen Primzahl ist, „sind die nten Wurzeln der Einheit selbst hierzu im Allgemeinen er- „forderlich und stets ausreichend. Enthält aber die Zahl n verschiedene „Primfactoren, so bedarf man, wenn n grade ist, noch der 2nten, und, „wenn n ungrade ist, noch der 4nten Wurzeln der Einheit."*

Ich werde *zuerst* darthun, dafs in den drei unterschiedenen Fällen die erwähnten Arten von Wurzeln der Einheit im Allgemeinen *erforderlich* sind. Zu diesem Behufe werde ich für jeden der drei Fälle eine spezielle Einheit $e(\omega)$ angeben und in Bezug auf diese zeigen, dafs eine Wurzel der Einheit v, für welche $v.e(\omega)$ reell wird, nicht zu einem kleineren Exponenten als resp. zu n, $2n$ und $4n$ gehören kann.

Im ersten Falle, wo n eine Primzahlpotenz ist, nehme man für $e(\omega)$ die complexe Einheit: $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-2}$. Wenn nun $v.e(\omega)$ reell sein soll, so mufs offenbar: $v.e(\omega) = v^{-1}.e(\omega^{-1})$ sein, also:

$$v^2 = \frac{e(\omega^{-1})}{e(\omega)}$$

Setzt man hierin für $e(\omega)$ und $e(\omega^{-1})$ ihre Werthe, so erhält man:

$$v^2 = \omega^2$$

woraus unmittelbar hervorgeht, dafs keine niedrigere Potenz von v als die $n$te gleich *Eins* werden kann.

In den andern beiden Fällen, wo n verschiedene Primzahlen enthält, ist, wie leicht zu sehen, $1-\omega$ eine Einheit. Soll diese nun durch Multiplication mit einer Wurzel der Einheit v reell werden, so mufs: $v.(1-\omega) = v^{-1}.(1-\omega^{-1})$

sein, also:

$$v^2 = -\omega^{-1}$$

Für ein *grades* n wird: $(-\omega^{-1})^n = 1$, also $v^{2n} = 1$, und es ist dies auch offenbar die *niedrigste* Potenz von v, welche gleich *Eins* wird, weil sonst auch eine niedrigere Potenz von $(-\omega^{-1})$ als die $n$te gleich *Eins* werden müfste. Wenn aber n ungrade ist, so ist klar, dafs erst die $2n$te Potenz von $(-\omega^{-1})$ gleich *Eins* wird, dafs also, da $v^2 = -\omega^{-1}$ ist, erst die $4n$te Potenz von v gleich *Eins* werden kann.

Ich werde nunmehr *zweitens* zeigen, dafs die in dem obigen Satze angegebenen Arten von Wurzeln der Einheit stets *ausreichend* sind, um durch Multiplication mit denselben jede complexe Einheit reell zu machen. Zu diesem Zwecke werde ich der Reihe nach beweisen, dafs

1, wenn n grade ist, stets Wurzeln der Gleichung: $x^{2n} = 1$, aber, wenn es eine Potenz von 2 ist, schon Wurzeln der Gleichung: $x^n = 1$ ausreichen, und dafs

2, wenn n ungrade ist, stets Wurzeln der Gleichung $x^{4n} = 1$, aber, wenn es Primzahlpotenz ist, schon Wurzeln der Gleichung: $x^n = 1$ ausreichen.

Es erschöpft dies offenbar alle in dem Texte des zu beweisenden Satzes angegebenen Resultate, die ich aber dort um der bessern Übersichtlichkeit willen theils zusammengefafst, theils anders angeordnet habe.

1. Die Gleichung (V.), welche sich für jede Einheit $E(\omega)$ als nothwendig ergeben hatte, wenn n ungrade angenommen wurde, läfst sich offenbar in folgender Form darstellen:

$$\text{(VII.)} \quad \omega^{-\frac{k}{2}} . E(\omega^{-1}) = \omega^{\frac{k}{2}} E(\omega)$$

Hieraus ersieht man sofort, dafs in dem vorliegenden Falle, wo n grade ist, stets eine Wurzel der Einheit: $\omega^{\frac{k}{2}}$ d. h. also eine gewisse Wurzel der Gleichung: $x^{2n} = 1$ ausreicht, um durch Multiplication mit derselben eine Einheit $E(\omega)$ reell zu machen. Die Gleichung (VII.) zeigt aber ferner, dafs schon eine $n$te Wurzel der Einheit ausreicht, wenn der Exponent $\frac{k}{2}$ eine ganze Zahl, also wenn k *grade* ist. Dies mufs nun stets der Fall sein, wenn n eine Potenz von 2 ist. Wäre nämlich in diesem Falle $k = 2h - 1$, so hätte man die Gleichung (VII.) in folgender Form:

$$\omega . \omega^{-h} . E(\omega^{-1}) = \omega^h . E(\omega)$$

also:

$$\omega^{-h}.\boldsymbol{E}(\omega^{-1}) - \omega^{h}.\boldsymbol{E}(\omega) = (1-\omega).\omega^{-h}.\boldsymbol{E}(\omega^{-1})$$

Diese Gleichung kann aber nicht stattfinden; denn wenn man auf beiden Seiten die Norm nimmt, so erhält man, da die linke Seite offenbar durch $(\omega^{-1}-\omega)$ theilbar ist, als Norm derselben ein ganzes Vielfaches von: $\boldsymbol{N}(\omega^{-1}-\omega)$ d. h. von 4, während die Norm der rechten Seite nur $\boldsymbol{N}(1-\omega)$ d. h. gleich 2 wird.

2. Die Gleichung (VI.) welche sich für jede Einheit $\boldsymbol{E}(\omega)$ als nothwendig ergeben hatte, wenn n ungrade angenommen wurde, lautete:

$$\boldsymbol{E}(\omega^{-1}) = \pm\omega^{h}.\boldsymbol{E}(\omega)$$

Diese Gleichung verwandelt sich, wenn man eine Zahl k durch die Congruenz $h \equiv 2k \pmod{n}$ bestimmt, in folgende:

$$\text{(VIII.)} \qquad \omega^{-k}.\boldsymbol{E}(\omega^{-1}) = \pm\omega^{k}.\boldsymbol{E}(\omega)$$

Hieraus ergiebt sich, dafs $\boldsymbol{E}(\omega)$ entweder mit ω^k oder mit $\omega^k.\sqrt{-1}$ multiplicirt reell wird, also, dafs für ein ungrades n allemal eine Wurzel der Gleichung: $x^{4n}=1$ ausreicht, um durch Multiplication mit derselben eine complexe Einheit $\boldsymbol{E}(\omega)$ reell zu machen. Die Gleichung (VIII.) zeigt ferner, dafs, wenn auf der rechten Seite das *obere* Zeichen gilt, schon eine Potenz von ω d. h. eine $n$te Wurzel der Einheit ausreichend ist. Diefs ist stets der Fall, wenn n eine Primzahlpotenz: p^ν ist. Denn wäre alsdann:

$$\omega^{-k}.\boldsymbol{E}(\omega^{-1}) = -\omega^{k}.\boldsymbol{E}(\omega)$$

so würde die Gleichung:

$$\omega^{k}.\boldsymbol{E}(\omega) - \omega^{-k}.\boldsymbol{E}(\omega^{-1}) = 2\omega^{k}.\boldsymbol{E}(\omega)$$

unmittelbar daraus folgen. Diese Gleichung kann aber nicht stattfinden; denn, wenn man auf beiden Seiten die Norm nimmt, so erhält man, da die linke Seite offenbar durch $(\omega-\omega^{-1})$ theilbar ist, als Norm derselben ein ganzes Vielfaches von $\boldsymbol{N}(\omega-\omega^{-1})$ d. h. von p, während die Norm der rechten Seite nur einer Potenz von 2 gleich wird. Da aber p eine ungrade Primzahl bedeutet, so ist dies unmöglich.

Hiermit ist der über die Realität der complexen Einheiten aufgestellte Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

10.

Extrait d'une lettre de M. *C. Hermite* à M. *Borchardt* sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés.

Permettez moi, en continuant en quelque sorte, ce que je Vous ai écrit au sujet de la détermination des racines imaginaires des équations algébriques, de Vous entretenir des questions arithmétiques aux quelles je songeais, lorsque chemin faisant, j'ai été ainsi amené aux théorèmes de M. *Cauchy* et de M. *Sturm*. Ces questions arithmétiques avaient pour objet la théorie des nombres complexes, et en particulier l'étude des formes décomposables en facteurs linéaires, lorsque les coefficients sont des entiers de l'espèce $a+b\sqrt{-1}$. Pour le cas des entiers réels, la réduction des formes quadratiques définies, avait été comme Vous savez l'instrument analytique que j'avais surtout mis en oeuvre, mais pour passer de là aux nombres complexes, il fallait à ma méthode une modification que j'ai été bien longtemps à découvrir. C'est le hazard en effet qui me l'a donnée, en traitant de la décomposition des nombres en quatre carrés, sous le point de vue que j'ai indiqué dans le tome 47 de ce journal. Je vais essayer de Vous en donner une idée précise, en démontrant ce théorême que j'ai eu déjà occasion d'énoncer dans une note de mon travail sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes, savoir: ***Les racines de toutes les équations à coefficients entiers complexes, d'un degré donné, et pour lesquelles le discriminant (déterminant de Gauss) a la même valeur, ne représentent qu'un nombre essentiellement limité d'irrationalités distinctes.*** J'aurai pour cela, deux points principaux à établir. Le premier consiste dans la théorie arithmétique de la réduction de ces formes quadratiques à indéterminées imaginaires conjuguées que j'ai fait servir à la démonstrations du théorême de M. *Cauchy*. En désignant par $x, y, z, \ldots v$, $n+1$ indéterminées imaginaires, et par $x_0, y_0, z_0, \ldots v_0$ leurs conjuguées respectives, elles sont comme Vous savez définies de cette manière:

$$\begin{aligned} f = {} & x_0(a_{0,0}x + a_{0,1}y + a_{0,2}z + \cdots + a_{0,n}v) \\ & + y_0(a_{1,0}x + a_{1,1}y + a_{1,2}z + \cdots + a_{1,n}v) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + v_0(a_{n,0}x + a_{n,1}y + a_{n,2}z + \cdots + a_{n,n}v) \end{aligned}$$

avec la condition que $a_{\mu,\nu}$ et $a_{\nu,\mu}$ seront des quantités imaginaires conjuguées. En mettant en évidence tant dans les coefficients que dans les indéterminées, les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$, la forme f, sera si l'on veut un cas particulier des formes réelles à $2n+2$ indéterminées, mais qu'on traite grace au jeu des quantités imaginaires, par les procédés essentiellement propres aux formes à $n+1$ indéterminées seulement. Sans insister d'avantage sur cette considération que j'ai développée ailleurs dans le cas de $n=1$, j'énoncerai les propositions algébriques suivantes, qui si simples qu'elles soient, doivent être au moins indiquées pour ne rien omettre dans l'enchainement des idées.

1°. En faisant dans f, la substitution:

$$S\begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y + \cdots + \alpha^{(n)} V \\ y = \beta X + \beta' Y + \cdots + \beta^{(n)} V \\ z = \gamma X + \gamma' Y + \cdots + \gamma^{(n)} V \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v = \lambda X + \lambda' Y + \cdots + \lambda^{(n)} V \end{cases} \qquad S_0\begin{cases} x_0 = \alpha_0 X_0 + \alpha'_0 Y_0 + \cdots + \alpha_0^{(n)} V_0 \\ y_0 = \beta_0 X_0 + \beta'_0 Y_0 + \cdots + \beta_0^{(n)} V_0 \\ z_0 = \gamma_0 X_0 + \gamma'_0 Y_0 + \cdots + \gamma_0^{(n)} V_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_0 = \lambda_0 X_0 + \lambda'_0 Y_0 + \cdots + \lambda_0^{(n)} V_0 \end{cases}$$

ou, α et α_0, β et β_0, etc. sont des quantités imaginaires conjuguées, on aura une transformée *de même nature:*

$$\begin{aligned} F = {} & X_0(A_{0,0}X + A_{0,1}Y + A_{0,2}Z + \cdots + A_{0,n}V) \\ & + Y_0(A_{1,0}X + A_{1,1}Y + A_{1,2}Z + \cdots + A_{1,n}V) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + V_0(A_{n,0}X + A_{n,1}Y + A_{n,2}Z + \cdots + A_{n,n}V) \end{aligned}$$

de sorte que, $A_{\mu,\nu}$ et $A_{\nu,\mu}$ seront comme $a_{\mu,\nu}$ et $a_{\nu,\mu}$ des quantités conjuguées.

2°. Soient D, d, ω, ω_0 les déterminants des systèmes suivants:

$$D = \begin{Vmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & \cdots & A_{0,n} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n,0} & A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{Vmatrix} \qquad d = \begin{Vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{Vmatrix}$$

$$\omega = \begin{Vmatrix} \alpha & \alpha' & \cdots & \alpha^{(n)} \\ \beta & \beta' & \cdots & \beta^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda & \lambda' & \cdots & \lambda^{(n)} \end{Vmatrix} \qquad \omega_0 = \begin{Vmatrix} \alpha_0 & \alpha'_0 & \cdots & \alpha_0^{(n)} \\ \beta_0 & \beta'_0 & \cdots & \beta_0^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_0 & \lambda'_0 & \cdots & \lambda_0^{(n)} \end{Vmatrix}$$

on aura l'équation $D = d\omega\omega_0$, d'où résulte que d peut être regardé comme l'invariant de la forme f.

En vue de la théorie de la réduction, j'ajouterai cette remarque, qu'en posant:

$$\begin{aligned} g = a_{0,0}f - \frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dx_0} = {} & y_0(b_{1,1}y + b_{1,2}z + \cdots + b_{1,n}v) \\ & + z_0(b_{2,1}y + b_{2,2}z + \cdots + b_{2,n}v) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + v_0(b_{n,1}y + b_{n,2}z + \cdots + b_{n,n}v) \end{aligned}$$

ou $b_{\mu,\nu} = a_{0,0}a_{\mu,\nu} - a_{\mu,0}a_{0,\nu}$ on obtient une forme aux indéterminées y et y_0, z et z_0 ... v et v_0 qui est un *covariant* de f, relativement à la substitution (S, S_0) quand on y suppose $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, ... $\lambda = 0$. Et si l'on appelle D' l'invariant de g, on aura $D' = a_{0,0}^{n-1}D$. Cela posé, je vais établir qu'étant donnée une forme f *définie*, on peut trouver pour les coefficients de la substitution S, des nombres entiers complexes, dont le déterminant ω soit un, et tels que dans la transformée F, on ait:

$$(a.) \qquad A_{0,0}A_{1,1}\ldots A_{n,n} < 2^{\frac{n(n+1)}{2}}D$$

Ce sera cette transformée que j'appellerai réduite. A cet effet, je considère l'ensemble des formes déduites de f, par toutes les substitutions (S, S_0) à coefficients entiers complexes et au déterminant 1. Je distingue ensuite dans ces transformées, celles ou le coefficient de XX_0 est le plus petit possible. Parmis ces dernières, je dis qu'il en existe une que je représenterai ainsi:

$$\begin{aligned} F = {} & X_0(A_{0,0}X + A_{0,1}Y + \cdots + A_{0,n}V) \\ & + Y_0(A_{1,0}X + A_{1,1}Y + \cdots + A_{1,n}V) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + V_0(A_{n,0}X + A_{n,1}Y + \cdots + A_{n,n}V) \end{aligned}$$

et remplissant ces deux conditions, premièrement que la forme:

$$\begin{aligned} G = A_{0,0}F - \frac{dF}{dX}\cdot\frac{dF}{dX_0} = {} & Y_0(B_{1,1}Y + B_{1,2}Z + \cdots + B_{1,n}V) \\ & + Z_0(B_{2,1}Y + B_{2,2}Z + \cdots + B_{2,n}V) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + V_0(B_{n,1}Y + B_{n,2}Z + \cdots + B_{n,n}V) \end{aligned}$$

soit réduite dans le sens propre aux formes à n paires d'indéterminées, secondement, que les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans les diverses quantités $A_{0,\mu}$ soient moindres que la moitié du coefficient minimum $A_{0,0}$.

En effet, en faisant dans F, la substitution:

$$\begin{aligned} X &= x + my + nz + \cdots + rv & X_0 &= x_0 + m_0 y_0 + n_0 z_0 + \cdots + r_0 v_0 \\ Y &= \quad m'y + n'z + \cdots + r'v & Y_0 &= \quad m'_0 y_0 + n'_0 z_0 + \cdots + r'_0 v_0 \\ Z &= \quad m''y + n''z + \cdots + r''v & Z_0 &= \quad m''_0 y_0 + n''_0 z_0 + \cdots + r''_0 v_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V &= \quad m^{(n)}y + n^{(n)}z + \cdots + r^{(n)}v & V_0 &= \quad m_0^{(n)} y_0 + n_0^{(n)} z_0 + \cdots + r_0^{(n)} v_0 \end{aligned}$$

on trouvera une transformée $\mathfrak{F}$, dans la quelle le coefficient de xx_0 sera encore $A_{0,0}$ et où la forme $\mathfrak{G}$ analogue à G, savoir $\mathfrak{G} = A_{0,0}\mathfrak{F} - \frac{d\mathfrak{F}}{dx}\frac{d\mathfrak{F}}{dx_0}$ sera (d'après ce qui a été dit tout-à-l'heure) la transformée de G par la substitution:

$$\begin{aligned} Y &= m'y + n'z + \cdots + r'v & Y_0 &= m'_0 y_0 + n'_0 z_0 + \cdots + r'_0 v_0 \\ Z &= m''y + n''z + \cdots + r''v & Z_0 &= m''_0 y_0 + n''_0 z_0 + \cdots + r''_0 v_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V &= m^{(n)}y + n^{(n)}z + \cdots + r^{(n)}v & V_0 &= m_0^{(n)} y_0 + n_0^{(n)} z + \cdots + r_0^{(n)} v_0 \end{aligned}$$

Mais cette substitution est la plus générale entre les n paires d'indéterminées conjuguées, et peut être employée à réduire la forme $\mathfrak{G}$; on voit donc bien qu'on peut admettre dans l'ensemble des formes dont j'ai parlé, l'existence d'une transformée remplissant la première des conditions énoncées. Quant à la seconde, on y satisfait à l'aide des entiers complexes m, n, ... r, qui restent jusqu'ici arbitraires; en désignant en effet pour un instant par $\mathfrak{a}_{0,\mu}$ les coefficients de $\mathfrak{F}$ qui correspondent à $A_{0,\mu}$, on a les relations:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{0,1} &= mA_{0,0} + m'A_{0,1} + m''A_{0,2} + \cdots + m^{(n)}A_{0,n} \\ \mathfrak{a}_{0,2} &= nA_{0,0} + n'A_{0,1} + n''A_{0,2} + \cdots + n^{(n)}A_{0,n} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{a}_{0,n} &= rA_{0,0} + r'A_{0,1} + r''A_{0,2} + \cdots + r^{(n)}A_{0,n} \end{aligned}$$

et on voit qu'on peut déterminer les entiers complexes, m, n, ... r, de manière que la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans $\mathfrak{a}_{0,1}, \mathfrak{a}_{0,2}, \ldots \mathfrak{a}_{0,n}$, soient au dessous de $\frac{1}{2}A_{0,0}$. Admettant donc l'existence de la forme F, remplissant les deux conditions précédentes, nous allons supposer que la relation (*a.*) soit vraie à l'égard des formes réduites contenant n paires d'indéterminées et nous en conclurons qu'elle a lieu nécessairement dans les formes qui en renferment $n+1$. Elle se trouvera ainsi établie dans toute sa généralité puisqu'elle a lieu comme je l'ai fait voir ailleurs (dans ce Journal T. 47) pour $n = 1$. A cet effet j'observe que les coefficients de la forme G, ayant pour expression générale $B_{\mu,\nu} = A_{0,0}A_{\mu,\nu} - A_{\mu,0}A_{0,\nu}$, on trouvera lorsque

les deux indices sont égaux $B_{\mu,\mu} = A_{0,0}A_{\mu,\mu} - A_{\mu,0}A_{0,\mu}$ de sorte que ces quantités peuvent alors être regardées comme les invariants de formes quadratiques à deux paires d'indéterminées $(A_{0,0}, A_{\mu,0}, A_{0,\mu}, A_{\mu,\mu})$ formes qui seront définies et réduites. Définies car nous avons supposé f et par suite F elle même définie, et réduites, par ce que le coefficient minimum $A_{0,0}$ sera au plus égal à $A_{\mu,\mu}$, et que la partie réelle comme le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans $A_{\mu,0}$ sont au dessous de la limite $\frac{1}{2}A_{0,0}$. Donc d'après ce que j'ai établi dans le mémoire précité, on aura:

$$A_{0,0}A_{\mu,\mu} < 2B_{\mu,\mu}$$

et par suite:

$$A_{0,0}^{n} A_{1,1} A_{2,2} \dots A_{n,n} < 2^{n} B_{1,1} B_{2,2} \dots B_{n,n}.$$

Mais en admettant la relation (a) pour les formes réduites G, qui contiennent n paires d'indéterminées et dont l'invariant est $A_{0,0}^{n-1}D$, on aura:

$$B_{1,1} B_{2,2} \dots B_{n,n} < 2^{\frac{n(n-1)}{2}} A_{0,0}^{n-1} D$$

or on en conclut après avoir multiplié membre à membre par l'inégalité précédente, et supprimé le facteur $A_{0,0}^{n-1}$:

$$A_{0,0} A_{1,1} A_{2,2} \dots A_{n,n} < 2^{\frac{n(n+1)}{2}} D$$

C'est ce résultat qui tout-à-l'heure me servira de base pour la théorie de la réduction des formes décomposables en facteurs linéaires, et qui sont à coefficients et indéterminées complexes. Mais j'indiquerai d'abord la conséquence suivante qui s'en tire immédiatement.

Concevons qu'en vue de la théorie des formes f telle que je l'envisage ici, on modifie l'idée arithmétique de ***classe***, de manière à désigner ainsi l'ensemble des transformées déduites d'une forme donnée, par ces substitutions spéciales, (S, S_0) lorsqu'on attribue aux coefficients, touts les systèmes de valeurs entières complexes, pour les quelles le déterminant $\omega = 1$, on aura ce théorème: ***La totalité des formes de la même expression analytique que f, lorsqu'on les suppose définies, et à coefficients entiers tant réels que complexes, ne représente pour un invariant donné, qu'un nombre essentiellement limité de classes distinctes.*** Effectivement, dans la réduite F, touts les coefficients réels $A_{\mu,\mu}$ sont limités en vertu de la relation (a) et les modules des coefficients imaginaires $A_{\mu,\nu}$, le sont par la condition

$$A_{\mu,\mu}A_{\nu,\nu} - A_{\mu,\nu}A_{\nu,\mu} > 0$$

qui résulte comme on le voit immédiatement de ce qu'on suppose F une forme

définie. On n'aura donc pour une valeur données de l'invariant qu'un nombre limité de réduites, et par conséquent un nombre limité de classes.

Je passe maintenant au second point qui me reste à traiter pour arriver à mon théorème.

Soit φ une forme à n indéterminées imaginaires, $x, y, \ldots u$, à coefficients complexes, et décomposable en n facteurs linéaires, savoir:

$$\begin{aligned} A &= ax + a'y + \cdots + a^{(n-1)}u \\ B &= bx + b'y + \cdots + b^{(n-1)}u \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L &= lx + l'y + \cdots + l^{(n-1)}u \end{aligned}$$

de sorte qu'on ait $\varphi = AB \ldots L$. Ces quantités $A, B, \ldots L$, ne se trouveront point complétement déterminées par la forme donnée φ, car il est clair qu'on peut multiplier par un facteur constant chacune d'elle, pourvu que le produit de touts ces facteurs constants soit l'unité. J'observe cependant que le déterminant Δ, relatif au système de ces fonctions linéaires, ne subira aucun changement par l'introduction de ces multiplicateurs arbitraires, car en remplaçant $A, B, \ldots L$, par $t_1 A, t_2 B, \ldots t_n L$ le déterminant relatif aux nouvelles fonctions sera $t_1 t_2 \ldots t_n \Delta$, et on doit faire comme nous l'avons dit: $t_1 t_2 \ldots t_n = 1$. Nous pouvons donc désormais, regarder Δ, comme absolument déterminé par la forme proposée φ. Cela posé, j'introduis encore les facteurs linéaires conjugués de $A, B, \ldots L$, qui seront en suivant la notation déjà employée:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 x_0 + a'_0 y_0 + \cdots + a_0^{(n-1)} u_0 \\ B_0 &= b_0 x_0 + b'_0 y_0 + \cdots + b_0^{(n-1)} u_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_0 &= l_0 x_0 + l'_0 y_0 + \cdots + l_0^{(n-1)} u_0 \end{aligned}$$

et dont le déterminant sera désigné par Δ_0. Puis je compose avec ces deux groupes de fonctions, la forme quadratique suivante, de la nature de celles qui nous ont occupé précédemment, savoir:

$$f = AA_0 + BB_0 + \cdots + LL_0$$

Cette forme dépendra essentiellement, des multiplicateurs arbitraires que l'on peut introduire dans les fonctions linéaires, A, B, etc., mais quelque soient ces multiplicateurs, son invariant D sera la quantité entièrement connue $D = \Delta\Delta_0$, de plus elle sera toujours définie, et on pourra lui appliquer la méthode de réduction exposée plus haut. Concevons donc que pour un système

déterminé, des facteurs linéaires, $A, B, \ldots L$, on ait obtenu la substitution propre à effectuer cette réduction, et que je continuerai de représenter par la notation (S, S_0). En effectuant la partie de cette substitution désignée par S, dans $A, B, \ldots L$, je supposerai qu'ils deviennent:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \mathfrak{a}X + \mathfrak{a}'Y + \cdots + \mathfrak{a}^{(n-1)}U \\
\mathfrak{B} &= \mathfrak{b}X + \mathfrak{b}'Y + \cdots + \mathfrak{b}^{(n-1)}U \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathfrak{L} &= \mathfrak{l}X + \mathfrak{l}'Y + \cdots + \mathfrak{l}^{(n-1)}U
\end{aligned}$$

tandis que par la substitution S_0, les facteurs conjugués $A_0, B_0, \ldots L_0$, se changent en:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_0 &= \mathfrak{a}_0 X_0 + \mathfrak{a}'_0 Y_0 + \cdots + \mathfrak{a}_0^{(n-1)} U_0 \\
\mathfrak{B}_0 &= \mathfrak{b}_0 X_0 + \mathfrak{b}'_0 Y_0 + \cdots + \mathfrak{b}_0^{(n-1)} U_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathfrak{L}_0 &= \mathfrak{l}_0 X_0 + \mathfrak{l}'_0 Y_0 + \cdots + \mathfrak{l}_0^{(n-1)} U_0.
\end{aligned}$$

De là résultera pour la transformée de φ, par la substitution S, l'expression: $\Phi = \mathfrak{A}.\mathfrak{B}\ldots\mathfrak{L}$, et pour la transformée réduite de f, par la substitution (S, S_0) la suivante:

$$F = \mathfrak{A}\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}\mathfrak{B}_0 + \cdots + \mathfrak{L}\mathfrak{L}_0.$$

Cela étant, je vais démontrer, qu'en supposant la forme donnée φ, à coefficients entiers complexes, et irréductible, dans ce sens que l'équation $\varphi = 0$, n'admette d'autres solutions entières que $x = 0$, $y = 0$, $\ldots$ $u = 0$, les coefficients de Φ, qui seront aussi des entiers complexes, auront tous des valeurs finies et limitées par l'invariant $D = \Delta\Delta_0$.

Soient à cet effet, σ, $\sigma_1, \ldots \sigma_{n-1}$, les coefficients de XX_0, $YY_0, \ldots UU_0$, dans la forme réduite F, à savoir:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \mathfrak{a}\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}\mathfrak{b}_0 + \cdots + \mathfrak{l}\mathfrak{l}_0 \\
\sigma_1 &= \mathfrak{a}'\mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{b}'\mathfrak{b}'_0 + \cdots + \mathfrak{l}'\mathfrak{l}'_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sigma_{n-1} &= \mathfrak{a}^{(n-1)}\mathfrak{a}_0^{(n-1)} + \mathfrak{b}^{(n-1)}\mathfrak{b}_0^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{l}^{(n-1)}\mathfrak{l}_0^{(n-1)}
\end{aligned}$$

Ces relations peuvent s'écrire de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
1 &= \mathrm{mod}^2 \frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\sigma}} + \mathrm{mod}^2 \frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{\sigma}} + \cdots + \mathrm{mod}^2 \frac{\mathfrak{l}}{\sqrt{\sigma}} \\
1 &= \mathrm{mod}^2 \frac{\mathfrak{a}'}{\sqrt{\sigma_1}} + \mathrm{mod}^2 \frac{\mathfrak{b}'}{\sqrt{\sigma_1}} + \cdots + \mathrm{mod}^2 \frac{\mathfrak{l}'}{\sqrt{\sigma_1}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1 &= \mathrm{mod}^2 \frac{\mathfrak{a}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}} + \mathrm{mod}^2 \frac{\mathfrak{b}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}} + \cdots + \mathrm{mod}^2 \frac{\mathfrak{l}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}}
\end{aligned}$$

et montrent alors que les modules des quantités $\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\sigma}}$, $\frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{\sigma}}$ etc. sont tous inférieurs à l'unité. Il en résulte qu'en représentant par Ψ, le produit des facteurs:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\sigma}}X+\frac{\mathfrak{a}'}{\sqrt{\sigma_1}}Y+\cdots+\frac{\mathfrak{a}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}}U,$$
$$\frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{\sigma}}X+\frac{\mathfrak{b}'}{\sqrt{\sigma_1}}Y+\cdots+\frac{\mathfrak{b}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}}U,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\mathfrak{l}}{\sqrt{\sigma}}X+\frac{\mathfrak{l}'}{\sqrt{\sigma_1}}Y+\cdots+\frac{\mathfrak{l}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}}U,$$

c. à d. ce que devient Φ, lorsqu'on y remplace, X, Y, ... U par: $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}X$, $\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}Y$, ... $\frac{1}{\sqrt{\sigma_{n-1}}}U$, les modules des coefficients de cette transformée sont eux mêmes limités. En effet, si pour fixer les idées, nous considérons le coefficient d'un quelconque des termes de Ψ, que nous représenterons par: $X^p Y^q \ldots U^s$, les exposants étant des entiers dont la somme est n, on trouve sans peine que la valeur *maximum* de son module est donnée par le facteur numérique qui multiplie le même terme $X^p Y^q \ldots U^s$ dans la puissance polynomiale: $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}n}}(X+Y+\cdots+U)^n$. Cela posé, convenons de désigner par les expressions symboliques suivantes: $\{X^p Y^q \ldots U^s\}$ et: $[X^p Y^q \ldots U^s]$, les modules des coefficients de $X^p Y^q \ldots U^s$ dans Φ et Ψ. Il est clair qu'on aura d'après la relation qui lie les deux formes:

$$(1.)\quad \{X^p Y^q \ldots U^s\} = [X^p Y^q \ldots U^s]\sqrt{\sigma^p \sigma_1^q \ldots \sigma_{n-1}^s}$$

et en particulier pour les coefficients des puissances les plus élevées des indéterminées:

$$(2.)\quad \begin{cases} \{X^n\} = [X^n]\sqrt{\sigma^n} \\ \{Y^n\} = [Y^n]\sqrt{\sigma_1^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{U^n\} = [U^n]\sqrt{\sigma_{n-1}^n} \end{cases}$$

Or en multipliant ces équations membre à membre, il vient:

$$\{X^n\}\{Y^n\}\cdots\{U^n\} = [X^n][Y^n]\cdots[U^n]\sqrt{(\sigma\,\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1})^n}$$

mais d'après la relation caractéristique pour les formes quadratiques réduites, et la valeur de l'invariant de F, que nous avons trouvé précédemment égal à $\Delta\Delta_0$, on a:

$$\sigma\,\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1} < 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\Delta\Delta_0$$

il en résulte donc que:

$$\{X^n\}\{Y^n\}\cdots\{U^n\} < [X^n][Y^n]\cdots[U^n]\cdot 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\Delta\Delta_0$$

et finalement, en ayant égard aux limites des quantités $[X^n]$, $[Y^n]$ etc.:

$$\{X^n\}\{Y^n\}\cdots\{U^n\} < \frac{2^{\frac{5}{4}n^2(n-1)}}{n^{\frac{1}{2}n^2}}\cdot(\Delta\Delta_0)^{\frac{1}{2}n}$$

Voiçi donc déjà les coefficients des puissances les plus élevées dans la forme Φ, limitées au moyen de l'invariant $\Delta\Delta_0$. Et c'est en ce moment que nous employons la condition d'irréductibilité de cette forme telle qu'elle a été posée plus haut, de manière qu'aûcun de ces coefficients ne puisse être supposé s'évanouir. N'ayant obtenu en effet qu'une limite de leur produit, dans le cas ou l'un d'eux serait nul, on ne pourrait plus rien conclure sur les autres. Maintennant et à l'aide des valeurs de ces quantités: $\{X^n\}$, $\{Y^n\}$ etc., nous obtiendrons des limites pour les coefficients des autres termes, en déduisant des équations (1.) et (2.), la suivante:

$$\{X^p Y^q \ldots U^s\}\{X^n\}^{1-\frac{p}{n}}\{Y^n\}^{1-\frac{q}{n}}\cdots\{U^n\}^{1-\frac{s}{n}}$$

$$= [X^p Y^q \ldots U^s][X^n]^{1-\frac{p}{n}}[Y^n]^{1-\frac{q}{n}}\cdots[U^n]^{1-\frac{s}{n}}\sqrt{(\sigma\,\sigma_1\ldots\sigma_{n-1})^n}$$

et remplaçant dans le second membre, $[X^n Y^n \ldots U^n]$, $[X^n]$, $[Y^n]$ etc. et le produit $\sigma\,\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}$ par leurs limites supérieures. Il vient ainsi en désignant par $(p, q, \ldots s)$ le coefficient de $X^p Y^q \ldots U^s$ dans la puissance $(X+Y+\cdots+U)^n$:

$$\{X^p Y^q \ldots U^s\}\{X^n\}^{1-\frac{p}{n}}\{Y^n\}^{1-\frac{q}{n}}\cdots\{U^n\}^{1-\frac{s}{n}} < (p,q,\ldots s)\frac{2^{\frac{1}{4}n^2(n-1)}}{n^{\frac{1}{2}n^2}}(\Delta\Delta_0)^{\frac{1}{2}n}.$$

Nous sommes ainsi parvenus à la proposition annoncée sur la réduction des formes décomposables en facteurs linéaires, et qui nous autorise à donner aux transformées telles que Φ, le nom de formes reduites. Mon théorème sur les racines des équations algébriques à coefficients entiers complexes, en est une conséquence immédiate comme Vous allez voir.

Soit: $Pv^n+Qv^{n-1}+\cdots+Rv+S=0$ une équation de cette nature. En désignant ses racines par $a, b, c \ldots k, l$ le discriminant, ou déterminant de *Gauſs*, sera le nombre entier complexe:

$$\mathfrak{D} = P^{2(n-1)}(a-b)^2(a-c)^2\cdots(k-l)^2$$

Cela posé, faisons dépendre de cette équation une forme φ à coefficients entiers complexes, que nous définirons de cette manière:

$$\varphi = P^{n-1}(x+ay+a^2z+\cdots+a^{n-1}u)(x+by+b^2z+\cdots+b^{n-1}u)\cdots$$
$$(x+ly+l^2z+\cdots+l^{n-1}u)$$

Nous remarquerons d'abord, que pour cette forme, la quantité Δ, est précisément $\sqrt{D}$. Soit en effet:

$$A = x+ay+\cdots+a^{n-1}u$$
$$B = x+by+\cdots+b^{n-1}u$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L = x+ly+\cdots+l^{n-1}u,$$

d'après sa définition même, Δ sera le produit de P^{n-1} multiplié par le déterminant relatif au système des facteurs linéaires $A, B, \ldots L$. Or on sait que ce déterminant, est la fonction alternée égale au produit des différences des racines $a, b, \ldots l$, de sorte qu'on a bien $\Delta = \sqrt{D}$. Je dis maintenant que les racines de deux équations différentes, aux quelles correspondent des formes φ, arithmétiquement équivalentes, doivent être regardées comme présentant les mêmes irrationalités. Soit en effet:

$$\mathfrak{P}v^n+\mathfrak{Q}v^{n-1}+\cdots+\mathfrak{R}v+\mathfrak{S} = 0$$

et:

$$\Phi = \mathfrak{P}^{n-1}(X+\mathfrak{a}Y+\cdots+\mathfrak{a}^{n-1}U)(X+\mathfrak{b}Y+\cdots+\mathfrak{b}^{n-1}U)\cdots$$
$$(X+\mathfrak{l}Y+\cdots+\mathfrak{l}^{n-1}U)$$

une seconde équation, ayant pour racines $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{l}$, avec la forme correspondante. S'il est possible de déduire Φ de φ, par une substitution à coefficients entiers complexes et au déterminant un, c. à d. d'avoir identiquement: $\varphi = \Phi$, en prenant

$$x = \alpha X+\alpha' Y+\cdots+\alpha^{(n-1)}U$$
$$y = \beta X+\beta' Y+\cdots+\beta^{(n-1)}U$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u = \varkappa X+\varkappa' Y+\cdots+\varkappa^{(n-1)}U$$

on pourra en désignant par $t_1, t_2, \ldots t_n$ des constantes poser les relations:

$$x+ay+\cdots+a^{n-1}u = t_1(X+\mathfrak{a}Y+\cdots+\mathfrak{a}^{n-1}U)$$
$$x+by+\cdots+b^{n-1}u = t_2(X+\mathfrak{b}Y+\cdots+\mathfrak{b}^{n-1}U)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x+ly+\cdots+l^{n-1}u = t_n(X+\mathfrak{l}Y+\cdots+\mathfrak{l}^{n-1}U).$$

Or en effectuant la substitution et désignant pour abréger la fonction entière à coefficients entiers complexes $\alpha^{(i)}+\beta^{(i)}v+\cdots+\varkappa^{(i)}v^{n-1}$ par $\theta_i(v)$ ces relations donneront:

$$\begin{aligned}
X\theta(a)+Y\theta_1(a)+\cdots+U\theta_{n-1}(a) &= t_1(X+\mathfrak{a}Y+\cdots+\mathfrak{a}^{n-1}U)\\
X\theta(b)+Y\theta_1(b)+\cdots+U\theta_{n-1}(b) &= t_2(X+\mathfrak{b}Y+\cdots+\mathfrak{b}^{n-1}U)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X\theta(l)+Y\theta_1(l)+\cdots+U\theta_{n-1}(l) &= t_n(X+\mathfrak{l}Y+\cdots+\mathfrak{l}^{n-1}U)
\end{aligned}$$

On en conclura les expressions suivantes des racines $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{l}$ par $a, b, \ldots l$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= \frac{\theta_1(a)}{\theta(a)} \qquad \mathfrak{a}^2 = \frac{\theta_2(a)}{\theta(a)} \qquad \ldots \qquad \mathfrak{a}^{n-1} = \frac{\theta_{n-1}(a)}{\theta(a)}\\
\mathfrak{b} &= \frac{\theta_1(b)}{\theta(b)} \qquad \mathfrak{b}^2 = \frac{\theta_2(b)}{\theta(b)} \qquad \ldots \qquad \mathfrak{b}^{n-1} = \frac{\theta_{n-1}(b)}{\theta(b)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{l} &= \frac{\theta_1(l)}{\theta(l)} \qquad \mathfrak{l}^2 = \frac{\theta_2(l)}{\theta(l)} \qquad \ldots \qquad \mathfrak{l}^{n-1} = \frac{\theta_{n-1}(l)}{\theta(l)}
\end{aligned}$$

et il est visible qu'en partant de la substitution inverse, pour déduire φ de Φ, on arrivera à des expressions toutes semblables qui donneront les racines $a, b, \ldots l$, au moyen de $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{l}$. Nous sommes donc bien autorisés par là à regarder les racines des deux équations, comme présentant les mêmes irrationalités.

Cela posé, considérons l'ensemble des équations de degré n, ayant même discriminant, avec la série des formes φ, qui correspondent à chacune d'elles. Ces formes en nombre infini, ayant toutes le même invariant $\Delta\Delta_0$, à savoir le module du discriminant, seront réductibles à un nombre limité de réduites Φ. Or les équations dont les racines pourront présenter des irrationalités distinctes seront celles là seules aux quelles correspondent des formes ayant des transformées réduites différentes.*) Elles seront donc bien essentiellement comme je l'ai annoncé, en nombre fini.

---

*) En effet, des formes ayant même réduite, sont arithmétiquement équivalentes, et il a été expliqué plus haut, comment les racines des équations dont elles dépendent offrent dèslors les mêmes irrationalités. Voyez au reste sur cette question de l'équivalence des formes décomposables en facteurs linéaires, mon premier mémoire sur la théorie des formes quadratiques, Tome 47 de ce Journal.

11.

Bestimmung der symmetrischen Verbindungen vermittelst ihrer erzeugenden Function.

(Von *C. W. Borchardt.*)

(Der physikalisch-mathematischen Klasse der Berliner Akademie vorgelegt von Herrn *Dirichlet* am 5. März 1855.)

Das von den Mathematikern des vorigen Jahrhunderts bis zur Zeit *Waring*'s angewandte Verfahren, nach welchem die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung zuerst durch die Potenzsummen der Wurzeln ausgedrückt wurden und dann diese durch die Coefficienten der Gleichung, ist in neuerer Zeit durch die von *Waring*, *Gaufs* und *Cauchy* gegebenen Methoden verdrängt worden, und zwar deshalb, weil jenes ältere Verfahren nicht im Stande war, in allen Fällen nachzuweisen, dafs die ganzen Functionen der Coefficienten, denen die symmetrischen ganzen Verbindungen der Wurzeln gleich werden, auch ganzzahlige Functionen sind, d. h. solche, welche ganze Zahlen zu ihren numerischen Coefficienten haben.

Die neue Methode, welcher ich mich bediene, ist ebenso wie die letztgenannten, geeignet, diesen Nachweis zu führen, sie unterscheidet sich aber wesentlich dadurch von ihnen, dafs sie nicht wie jene eine bestimmte Ordnung unter den Wurzeln festsetzt, sondern dieselben ebenso symmetrisch in die Rechnung eintreten läfst, wie das ältere unvollständige Verfahren. Das Prinzip dieser neuen Methode ist die Zurückführung der symmetrischen ganzen Verbindungen auf *eine* erzeugende Function, aus deren Entwicklung sie sämmtlich hervorgehen. Die Bestimmung der *erzeugenden Function* durch die Coefficienten der Gleichung ist daher das Problem, auf welches die ganze Frage zurückkommt. Die Lösung dieses Problems hängt nun, wie eine genauere Untersuchung zeigt, von der Bestimmung einer bisher nicht betrachteten Determinante ab, in deren Werth jene erzeugende Function als Factor enthalten ist, ein Resultat, welches schon an sich von allgemeinerem Interesse für die Analysis zu sein scheint. Von dieser Determinante ausgehend gelangt man ohne Schwierigkeit zur Bestimmung der erzeugenden Function, und die Form, unter welcher sie erscheint, führt dann ferner auf eine Eigenschaft derselben,

aus welcher durch einen einfachen Beweis gefolgert werden kann, dafs die Ausdrücke der ganzen symmetrischen Functionen der Wurzeln durch die Coefficienten nicht nur *ganz* sondern auch *ganzzahlig* sind.

Bildet man den Ausdruck

$$(1.) \quad T = \Sigma \frac{1}{t-\alpha} \cdot \frac{1}{t_1-\alpha_1} \cdots \frac{1}{t_n-\alpha_n}$$

welcher alle Glieder umfassen soll, die aus dem hingeschriebenen dadurch entstehen, dafs von den beiden Reihen $t, t_1, \ldots t_n$ und $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ die eine unverändert bleibt, die andere auf alle Arten permutirt wird, einen Ausdruck, der in Bezug auf jede der beiden Reihen von Gröfsen symmetrisch ist, so führt die Entwicklung von T nach fallenden Potenzen von $t, t_1, \ldots t_n$ auf jene einfachsten Typen der ganzen symmetrischen Functionen von $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, welche aus *einem* Product ganzer Potenzen dieser Gröfsen durch Permutation hervorgehen und bekanntlich fähig sind *alle* ganzen symmetrischen Functionen von $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ additiv zusammenzusetzen. T ist daher als die erzeugende Function der ganzen symmetrischen Verbindungen von $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ anzusehen, und die Bestimmung dieser Verbindungen ist auf das *eine* Problem zurückgeführt, den Ausdruck der erzeugenden Function T so zu transformiren, dafs nicht mehr die einzelnen Gröfsen $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ darin vorkommen, sondern anstatt dessen die Coefficienten derjenigen ganzen Function $n+1$ten Grades fz, welche für $z = \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ verschwindet und die Einheit zum Coefficienten der höchsten Potenz von z hat.

Die verlangte Transformation der erzeugenden Function T würde, direct angegriffen, eine ihrer Complication wegen schwer lösbare Aufgabe sein. Sie vereinfacht sich aber im höchsten Grade, wenn man sie von der Betrachtung der Determinante

$$D = \Sigma \pm \frac{1}{(t-\alpha)^2} \frac{1}{(t_1-\alpha_1)^2} \cdots \frac{1}{(t_n-\alpha_n)^2}$$

abhängig macht. Diese Determinante D, welche schon in ihrer Bildung die gröfste Aehnlichkeit mit der in der Analysis durch ihre vielfache Anwendung so bekannten Determinante

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{1}{t-\alpha} \cdot \frac{1}{t_1-\alpha_1} \cdots \frac{1}{t_n-\alpha_n}$$

zeigt, steht mit derselben überdies in der merkwürdigen Beziehung, dafs sie, durch jene dividirt, die erzeugende Function T als Quotienten giebt, so dafs

$$(2.) \quad D = T.\Delta$$

ist. Der Ausdruck $(ft, ft_1, \ldots ft_n)^2 \boldsymbol{D}$ ist nämlich eine ganze Function von $t, t_1, \ldots t_n, \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, welche ebensowohl durch das Product aller Differenzen zwischen $t, t_1, \ldots t_n$, als auch durch das Product aller Differenzen zwischen $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ theilbar ist. Es bleibt daher nach der Division durch beide Producte wiederum eine ganze Function als Quotient, und es hat keine Schwierigkeit, die Werthe zu bestimmen, welche dieser Quotient annimmt, wenn jede der Gröfsen $t, t_1 \ldots t_n$ mit irgend einer der Gröfsen $\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ zusammenfällt *). Diese $(n+1)^{n+1}$ Werthe des Quotienten sind aber gerade hinreichend, seinen allgemeinen Ausdruck vermöge der auf mehrere Variablen ausgedehnten *Lagrange*'schen Interpolationsformel zu bilden, und das Ergebnifs hiervon ist von der oben angeführten merkwürdigen Gleichung $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}.\triangle$ nur dadurch unterschieden, dafs an der Stelle der Determinante $\triangle$ ihr bekannter Werth

$$(3.) \qquad \triangle = (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} \frac{\Pi(t, t_1 \ldots t_n)\, \Pi(\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_n)}{ft\, ft_1 \ldots ft_n}$$

steht, in welchem $\Pi(t, t_1 \ldots t_n)$ das Product aller aus $t, t_1 \ldots t_n$ gebildeten Differenzen bedeutet, jede so genommen, dafs ein t mit kleinerem Index von einem t mit gröfserem Index abgezogen wird.

Indem man jetzt noch die Bemerkung hinzufügt, dafs die Determinante $\boldsymbol{D}$ aus der Determinante $\triangle$ durch successive Differentiation nach sämmtlichen Variablen $t, t_1 \ldots t_n$ hervorgeht, leitet man aus den Gleichungen (2, 3) den folgenden Ausdruck für $\boldsymbol{T}$ her:

$$(4.) \qquad (-1)^{n+1} \frac{ft\, ft_1 \ldots ft_n}{\Pi(t, t_1 \ldots t_n)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} \left(\frac{\Pi(t, t_1 \ldots t_n)}{ft\, ft_1 \ldots ft_n} \right)$$

Der Ausdruck (4.), in dem nicht mehr die einzelnen Gröfsen $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, sondern anstatt dessen die Coefficienten von fz vorkommen, und der zur Unterscheidung von dem in Gleichung (1.) gegebenen Ausdruck von $\boldsymbol{T}$ mit Θ bezeichnet werden möge, leistet die verlangte Transformation der erzeugenden Function. Diese Transformation kann als die symbolische Zusammenfassung der Rechnungsoperationen angesehen werden, welche das oben besprochene ältere Verfahren für die Bestimmung aller ganzen symmetrischen Functionen vorschrieb.

---

*) Fallen nämlich $t, t_1, \ldots t_n$ resp. mit $\alpha_i, \alpha_{i_1}, \ldots \alpha_{i_n}$ zusammen, so wird der Quotient $= (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} f'\alpha\, f'\alpha_1 \ldots f'\alpha_n$ oder $= 0$, jenachdem $i, i_1 \ldots i_n$ sämmtlich von einander verschieden sind, oder nicht.

Der in Θ vorkommende Differentialquotient $n+1$ter Ordnung enthält in seinem Zähler das aus den Differenzen von $t, t_1 \ldots t_n$ gebildete Product als Factor. Indem man sich dies Product fortgehoben denkt, überzeugt man sich leicht, dafs bei der Entwicklung von Θ nach fallenden Potenzen der Variablen $t, t_1 \ldots t_n$ die Entwicklungscoefficienten ganze und ganzzahlige Functionen der in fz vorkommenden Coefficienten sind.

Aber hiermit ist die Aufgabe noch nicht vollständig gelöst. In der That. betrachtet man die symmetrische Function

$$(5.) \qquad \Sigma \alpha^p \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_n^{p_n},$$

wo das Summenzeichen alle diejenigen durch Permutation von $\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ aus dem hingeschriebenen Gliede hervorgehenden Glieder umfassen soll, welche für gegebene Werthe der Exponenten und willkührliche Werthe von $\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ von einander verschieden sind, oder mit anderen Worten: betrachtet man einen jener einfachsten Typen der ganzen symmetrischen Functionen, von welchen oben die Rede war, so kommt derselbe in der Entwicklung von T nur dann ohne weiteren numerischen Factor als Entwicklungscoefficient vor, wenn die Exponenten $p, p_1 \ldots p_n$ sämmtlich von einander verschieden sind. Bedeuten dagegen $a, b, \ldots h$ ganze Zahlen, deren Summe $= n+1$ ist, und finden sich unter den Exponenten a welche $= p$, b welche $= q$, etc. $\ldots$ h welche $= s$ sind, so kommt in der Entwicklung von T die symmetrische Function (5.) mit dem Factor

$$N = 1.2 \ldots a \times 1.2 \ldots b \times \ldots \times 1.2 \ldots h$$

behaftet als Entwicklungscoefficient vor. Unter der Voraussetzung, dafs zwischen den Exponenten $p, p_1 \ldots p_n$ die soeben angenommenen Coincidenzen stattfinden, ist daher die symmetrische Function (5.) nur dann ein ganzzahliger Ausdruck der Coefficienten von fz, wenn in der Entwicklung von Θ der sie enthaltende Entwicklungscoefficient durch N theilbar ist. Diese Theilbarkeit bleibt also zu beweisen übrig, d. h. es bleibt zu zeigen, dafs, wenn in einem Term der Entwicklung von Θ die Variablen $t, t_1 \ldots t_n$ in irgend einer Ordnung genommen zu den Exponenten $-(p+1), -(p_1+1) \cdots -(p_n+1)$ erhoben sind, und diese Exponenten resp. zu a, zu b, $\ldots$ zu h coincidiren, dafs dann der Coefficient dieses Terms durch N theilbar ist.

Der Beweis dieser Theilbarkeit beruht nun auf folgenden beiden Punkten:

I. Anstatt die Exponenten $-(p+1)$, $-(p_1+1)$, $\cdots -(p_n+1)$ resp. zu a, zu b ... zu h coincidiren zu lassen, setze man fest, dafs die Variablen t, $t_1 \ldots t_n$ in denselben Anzahlen coincidiren, sodafs a derselben $= x$, b derselben $= y$, etc. .... endlich h derselben $= w$ werden, und stelle sich die Aufgabe, den Werth von Θ unter dieser Hypothese zu bestimmen.

Θ unterscheidet sich von dem Quotienten $\frac{D}{\Delta}$ nur dadurch, dafs der constante Factor $\Pi(\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ im Zähler und Nenner fortgehoben worden ist. Jede der Determinanten D und Δ verschwindet, sobald Coincidenzen zwischen den Variablen eintreten. Θ erscheint daher in dem vorliegenden Fall unter der Form $\frac{0}{0}$. Aber während bei Functionen von mehreren Variablen $\frac{0}{0}$ im Allgemeinen unbestimmt ist, hat es hier einen völlig bestimmten Werth, und dieser Werth kann nach denselben einfachen Regeln ermittelt werden, welche in der Differentialrechnung in Bezug auf Functionen von einer Variablen angegeben zu werden pflegen. Durch gehörige Anwendung dieser Regeln gelangt man zu dem Resultat, dafs unter Annahme der festgesetzten Coincidenzen der Variablen die erzeugende Function Θ dem Nfachen einer Function von $x, y \ldots w$ gleich wird, welche nach fallenden Potenzen dieser Variablen entwickelt, lauter ganze und ganzzahlige Ausdrücke der Coefficienten von fz zu Entwicklungscoefficienten hat. Dies kann man auch so ausdrücken: Läfst man in der Entwicklung von Θ nach fallenden Potenzen von t, $t_1 \ldots t_n$ die Variablen resp. zu a, zu b, ... zu h in die Werthe x, $y \ldots w$ coincidiren, so werden in der so reducirten, nach fallenden Potenzen von $x, y, \ldots w$ geordneten Entwicklung alle Coefficienten durch $N = 1.2 \ldots a \times 1.2 \ldots b \times \ldots$ $\ldots \times 1.2 \ldots h$ theilbar.

II. Auf dieses Resultat sich stützend beweist man die oben ausgesprochene auf den Fall coincidirender Exponenten bezügliche Theilbarkeit der Entwicklungscoefficienten von Θ, und zwar folgendermafsen. Indem man die Anzahl der Zahlen $a, b, \ldots h$ mit μ bezeichnet, nimmt man an, die behauptete Theilbarkeit finde statt, so lange μ einen der Werthe $n+1$, n, $n-1 \ldots \nu+1$ hat, und beweist, dafs unter dieser Annahme die Theilbarkeit auch für $\mu = \nu$ stattfinden mufs.

Es sei für einen bestimmten Entwicklungscoefficienten $\mu = \nu$. Man theile die Variablen t, $t_1 \ldots t_n$ in ν Gruppen, von welchen die erste die ersten a Variablen, die zweite die folgenden b Variablen etc., die letzte die letzten h Variablen in sich begreife. Hierauf theile man die Glieder der Entwicklung

von Θ in zwei Klassen. Man setze in die erste Klasse diejenigen Glieder, in welchen die Variablen je einer Gruppe zu einem und demselben Exponenten erhoben sind, in die zweite Klasse alle übrigen Glieder. Läfst man nun die Variablen der ersten Gruppe in den Werth x, der zweiten in y, etc. der letzten in w coincidiren, so reducirt sich (in Folge der für $\mu > \nu$ angenommenen Theilbarkeit) der in der ***zweiten*** Klasse vereinigte Theil der Entwicklung von Θ auf lauter Glieder, deren Coefficienten durch N theilbar sind. Da aber dasselbe unter I. von der ***ganzen*** Entwicklung von Θ bewiesen worden ist, so gilt es auch von dem in der ***ersten*** Klasse vereinigten Theil für sich. Dies Resultat ist gleichbedeutend damit, dafs die zu beweisende Theilbarkeit für $\mu = \nu$ stattfindet, vorausgesetzt, dafs sie für $\mu > \nu$ wahr ist. Für $\mu = n+1$ ist sie evident, weil dann $N = 1$ ist, folglich gilt sie auch für $\mu = n$, folglich auch für $\mu = n-1$, etc. folglich allgemein.

Schliefslich sei noch bemerkt, dafs für die speciellen symmetrischen Functionen (5.), in welchen eine gewisse Anzahl von Exponenten, z. B. p_n, $p_{n-1}, \ldots p_{m+1}$ verschwinden, eine specielle erzeugende Function aufgestellt werden kann, welche nur $m+1$ Variablen enthält. Ihr Ausdruck durch die Coefficienten von fz ist dem Ausdruck Θ ganz analog, nämlich:

$$(6.) \quad (-1)^{m+1} \frac{ft\, ft_1 \ldots ft_m}{\Pi(t, t_1 \ldots t_m)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_m} \left(\frac{\Pi(t, t_1 \ldots t_m)}{ft\, ft_1 \ldots ft_m} \right)$$

Man erhält denselben als die Grenze, welcher sich für unendlich grofse Werthe von $t_{m+1}, t_{m+2}, \ldots t_n$ der Ausdruck $t_{m+1} . t_{m+2} \ldots t_n . \Theta$ nähert. Die Functionen, welche in diesem Falle die Determinanten D und $\triangle$ vertreten, sind weniger einfach als jene Gröfsen, sie gehen aus denselben durch Anwendung des sogenannten *Laplace*'schen Determinantensatzes hervor.

Für $m = 0$ wird der Ausdruck (6.) die bekannte erzeugende Function der Potenzensummen von α, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, nämlich $\frac{1}{ft} \frac{\partial ft}{\partial t}$.

12.

Die Reduktion der elliptischen Integrale in ihre kanonische Form.

(Von Herrn *E. Heine.*)

Seit langer Zeit kennt man die Formeln, durch welche das Integral

$$H = \int_g^h \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$$

in die kanonische Form der elliptischen Integrale verwandelt werden kann, wenn aufser g und h auch die Constanten α, β, etc. reell sind. Ein besonderer Fall, in dem diese Constanten imaginär waren, — derselbe welcher §. 26 behandelt ist — wurde Veranlassung zu dieser Abhandlung, in welcher die Transformationsformeln für den Fall zusammengestellt sind, dafs α, etc. beliebige imaginäre Gröfsen bedeuten, die besonderen Fälle eingeschlossen, dafs die Constanten sämmtlich oder theilweise reell oder rein imaginär werden. Es zeigt sich, dafs dann H in die Form

$$\frac{u+iv}{M}$$

zerlegt werden kann. wo M eine gewisse, von den gegebenen Constanten einfach abhängende Gröfse bezeichnet, wo ferner u aus der Summe oder Differenz eines gewissen Vielfachen des ganzen elliptischen Integrals K und eines zweiten elliptischen Integrals in der kanonischen Form besteht, und v wie u zusammengesetzt ist, nur dafs *die* Integrale welche v ausmachen den complementären Modulus zu dem in u vorkommenden haben. Die eben erwähnten elliptischen Integrale haben sämmtlich reelle Grenzen, die positiv und kleiner als 1 sind, so dafs wenn der Modulus reell ist, unsere Aufgabe gelöst ist. Wird aber der Modulus imaginär, so kann man sie in *Abel*sche Integrale zerlegen. Die Formeln hierzu sind im §. 18 zusammengestellt; sie sind der bekannten Abhandlung von *Jacobi* entlehnt.

Der Gang der Rechnung, welche anzustellen war, ergiebt sich leicht. Es läfst sich H mit Hülfe bekannter Transformationsformeln in das Product eines Factors $\frac{1}{M}$ und eines elliptischen Integrales J in der Hauptform zer-

legen, dessen Modulus z, (oder wenn z imaginär ist, die Norm von z) kleiner als 1 ist, dessen Grenzen aber imaginär sind. Man kann die Transformation so einrichten, dafs z nicht rein imaginär, sondern entweder reell oder complex ist. Diese Umformungen findet man im zweiten Abschnitt §. 19.

Das Integral J oder

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-x^2z^2}},$$

auf welches man so geführt wird, ist ein vollständig bestimmtes, indem z ein *gegebenes* Intervall auf *gegebene* Art durchläuft, und auch die Zeichen der Quadratwurzeln bekannt sind, wenn nur das der Quadratwurzel, welche in H vorkommt, gehörig bestimmt ist. Dazu reicht im Allgemeinen aus, dafs man das Zeichen derselben für irgend einen Werth von x kennt.

Die Zerfällnng von J in $u+iv$ bildet ausschliefslich den Gegenstand der ersten Abtheilung. Nachdem im §. 1 die bekannten Additionsformeln der elliptischen Functionen zusammengestellt, und im §. 2 durch andere ersetzt sind, welche für die Rechnung bequemer zu sein schienen, wird im §. 3 zunächst darüber gehandelt, ob J einen bestimmten Werth hat. Darauf beginnt die Zerfällung und zwar zunächst für den Fall, dafs z reell ist. Diese macht zwei verschiedene Untersuchungen nöthig; *zuerst* ist es nöthig, den Werth von $\mathrm{sinam}\, u$ und $\mathrm{sinam}\, v$ zu kennen, den bereits *Richelot* für ein reelles z angegeben hat. Man findet ihn §. 6 und §. 10, vereinfacht §. 11. Die Anzahl von Vielfachen der Perioden, welche hinzuzufügen sind, die *zweitens* bestimmt werden mufs, ist §. 7—9 und §. 12—16 aufgesucht. §. 5 enthält eine häufig angewandte Transformationsformel, und §. 27 ihre Verallgemeinerung. §. 20—25 ist ein interessanter specieller Fall behandelt, aus dem die Resultate des §. 26 folgen.

I. Abtheilung.

§. 1.

Das Fundament für unsere Untersuchungen bilden die bekannten Additionsformeln der elliptischen Functionen. Bezeichnet z eine reelle oder imaginäre Gröfse, deren Modulus kleiner als 1 ist, sind ferner α, β, z reelle oder imaginäre Functionen einer reellen Gröfse x, welche durch die drei Gleichungen

$$Mz = \alpha\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-x^2\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-x^2\alpha^2}$$
$$M\sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2} - \alpha\beta\sqrt{1-x^2\alpha^2}\sqrt{1-x^2\beta^2}$$
$$M\sqrt{1-x^2z^2} = \sqrt{1-x^2\alpha^2}\sqrt{1-x^2\beta^2} - x^2\alpha\beta\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}$$

zusammenhangen, in denen man zur Abkürzung

$$M = 1-x^2\alpha^2\beta^2$$

gesetzt hat, so wird

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-x^2z^2}} = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-x^2\alpha^2}} + \frac{\frac{d\beta}{dx}}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-x^2\beta^2}}.$$

Denkt man sich z. B. α und β, so wie die Zeichen der Quadratwurzeln auf der rechten Seite gegeben, so bestimmt die erste Gleichung schon vollkommen den Werth von z, während die beiden anderen dazu dienen, *die* Zeichen von $\sqrt{1-z^2}$ und $\sqrt{1-x^2z^2}$ festzustellen, welche willkürlich angenommenen Zeichen der vier anderen Wurzelgröfsen entsprechen.

Obgleich diese Formeln unter der Voraussetzung bewiesen zu werden pflegen, dafs α, β, x reelle Gröfsen sind, so gelten sie bekanntlich noch für imaginäre Werthe derselben. Setzt man $\beta = \gamma i$, wo γ wieder imaginär sein kann, und darauf $\gamma = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}$, wählt dann für α und δ die Buchstaben a und b, so erhält man den Satz:

Sind a, b, z Functionen von x, und finden zwischen ihnen die drei Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} Nz = a\sqrt{1-x_1^2b^2} + ib\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-x^2a^2} \\ N\sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2} - iab\sqrt{1-x^2a^2}\sqrt{1-x_1^2b^2} \\ N\sqrt{1-x^2z^2} = \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-x^2a^2}\sqrt{1-x_1^2b^2} - ix^2ab\sqrt{1-a^2} \end{cases}$$

Statt, wo zur Abkürzung

$$N = 1-b^2+x^2a^2b^2$$

gesetzt ist, so wird

$$\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-x^2z^2}} = \frac{a'}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2a^2}} + \frac{ib'}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-x_1^2b^2}}.$$

Hier bedeuten a', b', z' die Differentialcoefficienten von a, b, z nach x, ferner x_1 eine $\sqrt{1-x^2}$. Die Zeichen der sechs Quadratwurzeln können beliebig genommen werden, wenn sie nur den Gleichungen (1.) genügen. Natürlich

müssen sie in den drei Gleichungen (1.) und in der Differentialgleichung dieselben Werthe haben.

Um sich von den verschiedenen Methoden, durch welche diese Gleichungen hergeleitet werden, unabhängig zu machen, kann man dieselben verificiren. Dividirt man die erste Gleichung in (1.) durch N, differentiirt sie dann nach x, und dividirt durch das Product der beiden anderen, so findet man ohne grofse Rechnung die Differentialgleichung. Eben so leicht zeigt sich, dafs wenn die rechte Seite der ersten Gleichung in (1.) gleich Nz gesetzt ist, das Quadrat der rechten Seite der zweiten und der dritten resp. $N^2(1-z^2)$ und $N^2(1-x^2z^2)$ ist.

Aus der Gleichheit zweier Functionen folgt auch *die* ihrer bestimmten Integrale zwischen beliebigen reellen Grenzen g und h. Daher läfst sich die Differentialgleichung auch durch

$$(2.)\quad \int_g^h \frac{z'dx}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-x^2z^2}} = \int_g^h \frac{a'dx}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2a^2}} + i\int_g^h \frac{b'dx}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-x_1^2b^2}}$$

ersetzen.

§. 2.

Für einen grofsen Theil der folgenden Rechnungen sind die Gleichungen (1.) nicht bequem; man kann für sie das System von drei anderen, nämlich

$$(3.)\quad \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-a^2} - iab\sqrt{1-x^2z^2}$$

$$(4.)\quad z\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-x^2a^2} = ib\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-x^2z^2}$$

$$(5.)\quad z\sqrt{1-x_1^2b^2} = a + ib\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2z^2}$$

einführen, die sich leicht aus den ersten herleiten lassen. Beide Systeme sind offenbar gleichbedeutend.

Anmerk. Ebenso wie die Gleichungen (1.) aus den bekannten Formeln für $\sin\mathrm{am}(u+v)$, $\cos\mathrm{am}(u+v)$, $\Delta\mathrm{am}(u+v)$ folgen, so lassen sich 3, 4, und 5 aus den Formeln

$$\cos\mathrm{am}(u+v) = \cos\mathrm{am}u\cos\mathrm{am}v - \sin\mathrm{am}u\sin\mathrm{am}v\,\Delta\mathrm{am}(u+v)$$

ferner aus

$$\sin\mathrm{am}(u+v)\Delta\mathrm{am}v = \sin\mathrm{am}u\cos\mathrm{am}v + \sin\mathrm{am}v\cos\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}(u+v)$$

und der Gleichung herleiten, welche aus letzterer nach Vertauschung von u mit v entsteht.

§. 3.

Das Integral

$$J = \int_g^h \frac{z' dx}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}},$$

über dessen Zerlegung in dieser ersten Abtheilung gehandelt wird, *ist ein fest bestimmtes, wenn aufser den Grenzen g und h auch die Function unter dem Integrale gegeben ist.* Zu dem Letzteren reicht es aber nicht hin, wenn aufser dem Modulus $\varkappa$ noch der Gang von z, d. h. die Art bekannt ist, auf welche z von x abhängt: es mufs auch noch *das Zeichen der Quadratwurzeln,* oder wenigstens das Zeichen ihres Productes gegeben sein.

Wir nehmen an, dafs z sich stätig ändert; alsdann kann das Zeichen der Quadratwurzeln in J so bestimmt sein, *dafs dieselben sich gleichfalls stätig ändern,* oder so, dafs sie zuweilen endliche Sprünge machen. In dem letzten Falle kann man J in eine Summe von Integralen derselben Form zerlegen, von denen jedes sich in dem ersten Falle befindet. Wir werden deshalb, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, *annehmen, dafs die Zeichen der Quadratwurzeln in J so bestimmt sind, dafs die Quadratwurzeln sich continuirlich ändern.*

Die Bestimmung, welche hier getroffen wurde, ist nicht gleichbedeutend mit der, dafs der reelle Theil der Quadratwurzeln ein bestimmtes Zeichen behalten soll. Ganz abgesehen davon, dafs bei der letzteren Festsetzung das Zeichen unbestimmt bleibt, wenn z. B. in $\sqrt{1-z^2}$ die Gröfse z reell und gröfser als 1 wird, so würde auch bei derselben die Continuität unterbrochen werden, wenn z von einem Werthe mit positivem imaginären Theile zu einem anderen mit negativem durch einen reellen Werth übergeht, der gröfser als 1 ist. Die Behandlung eines Integrals J bei solcher Bestimmung würde daher eine Zerlegung nöthig machen, wie sie oben angedeutet ist.

Kennt man das Zeichen der Wurzeln für irgend einen Werth von x, so läfst es sich nach unseren Festsetzungen *für jeden anderen Werth von x ableiten,* wenn z nicht dazwischen durch ± 1 oder $\pm\frac{1}{\varkappa}$ gegangen ist. Wir zerlegen deshalb unser Integral noch weiter in eine Summe solcher, in denen z entweder überhaupt nicht, oder nur an der unteren, oder nur an der oberen, oder an beiden Grenzen den Werth ± 1, $\pm\frac{1}{\varkappa}$, — wir fügen noch aus Gründen, die später klar werden, 0 hinzu — annimmt. Jedes von diesen

Integralen ist bestimmt, wenn man aufser den Constanten g, h, $\varkappa$ und dem Gange von z noch das Zeichen der Wurzeln für irgend einen Werth von x, z. B. für den Anfangswerth g kennt. Von nun an soll J ein solches Integral vorstellen.

§. 4.

Was oben über Continuität oder Discontinuität der Wurzeln gesagt wurde, zeigt sich leicht durch Anwendung der bekannten Formeln, welche die Ausziehung von Quadratwurzeln aus imaginären Ausdrücken betreffen. Man kann sich zu diesem Zwecke auch der nachfolgenden Transformation bedienen, die sich auf die Form $\sqrt{c^2-(m+ni)^2}$ bezieht, wenn c, m, n reelle Zahlen bezeichnen, und c positiv ist.

Man kann aus diesen Gröfsen durch die Gleichungen

$$c = \varrho \sin\theta$$
$$n = \sqrt{\varrho^2-m^2}.\cos\theta$$

die elliptischen Coordinaten ϱ und θ finden, und zwar sind ϱ, $\sin\theta$ und $\cos\theta$ vollkommen bestimmt, wenn ϱ und $\sqrt{\varrho^2-m^2}$ reell und positiv und auch θ reell genommen wird. Denn die Gleichung

$$\frac{c^2}{\varrho^2}+\frac{n^2}{\varrho^2-m^2} = 1$$

hat, da

$$\varrho^2(\varrho^2-m^2)-n^2\varrho^2-c^2(\varrho^2-m^2)$$

für ϱ^2 gleich ∞, m^2 und 0 resp. positiv, negativ und positiv wird, nur einen positiven Werth für ϱ^2, der gröfser als m^2 ist. Man findet dann

$$\sqrt{c^2-(m+ni)^2} = \pm(\sqrt{\varrho^2-m^2}-im\cos\theta).$$

Um diese Formel auf $\sqrt{1-z^2}$ und $\sqrt{1-\varkappa^2z^2}$ anzuwenden, hat man $c=1$ und z oder resp. $\varkappa z$ gleich $m+ni$ zu setzen.

§. 5.

Man zerlege nun J nach der Formel (2.) in die Summe zweier Integrale und versuche *a und b so zu bestimmen, dafs sie reell und kleiner* (nicht gröfser) *als* 1 *werden.* Eine Zerlegung von J in die Summe zweier elliptischen Integrale kann natürlich auf unendlich viele verschiedene Arten Statt finden; aber die Bedingungen, welche wir so eben hinzufügten, bestimmen vollkommen *eine* Zerlegung.

Um dieselbe zu bewerkstelligen, ist es nothwendig, ***erstens die Zahlwerthe*** von a und b, ***dann auch die Zeichen*** von a, b, $\sqrt{1-a^2}$ etc. oder wenigstens gewisser Combinationen derselben anzugeben. Zu dieser Bestimmung reichen die sechs Gleichungen aus, die man aus 3, 4 und 5 erhält, indem man ihre reellen und imaginären Theile für sich gleich setzt. Damit dies bequemer geschehen könne, bezeichnen wir die zu z, x, x_1 conjugirten Zahlen*) mit ζ, γ, γ_1, ferner die zu $\sqrt{1-z^2}$, $\sqrt{1-x^2z^2}$, $\sqrt{1-x^2a^2}$, etc. conjugirten Zahlen mit $\sqrt{1-\zeta^2}$, $\sqrt{1-\gamma^2\zeta^2}$, $\sqrt{1-\gamma^2a^2}$, etc. und führen endlich folgende häufig vorkommenden Verbindungen ein:

$$p = \sqrt{1-x^2z^2}+\sqrt{1-\gamma^2\zeta^2}$$
$$qi = \sqrt{1-z^2}-\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$r = \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\gamma^2\zeta^2}+\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{1-x^2z^2},$$

so dafs also p, q, r bekannte reelle Gröfsen sind.

Da der besondere Fall, dafs x reell also $\gamma = x$ wird, von Interesse ist und eine einfachere Behandlung gestattet, so wollen wir uns zunächst mit ihm beschäftigen.

Besonderer Fall: x ist reell.

§. 6.

Um den Werth von a zu finden, setzen wir die imaginären Theile von (3.) gleich, ebenso die reellen und erhalten

$$(\alpha.) \qquad abp = -q\sqrt{1-b^2}$$
$$ap = (z+\zeta)\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-x^2a^2}.$$

Statt der letzten Gleichung benutzen wir die folgende:

$$(\beta.) \qquad (z+\zeta)b\sqrt{1-x^2a^2} = -q.$$

Aus (α.) und (β.) eliminirt man b, indem man beide zum Quadrat erhebt, und dann eine von der andern subtrahirt. Dadurch ergiebt sich der gesuchte Werth

$$(6.) \qquad a^2 = \frac{(z+\zeta)^2-q^2}{x^2(z+\zeta)^2+p^2}.$$

Aus (5.) läfst sich b finden, indem diese Gleichung wieder in zwei zerfällt wird, von denen die eine

$$(\gamma.) \qquad (z-\zeta)\sqrt{1-x_1^2b^2} = ibp\sqrt{1-a^2}$$

*) Bekanntlich heifst $a-bi$ die zu $a+bi$ conjugirte Zahl.

ist, die andere gleichfalls linear nach $\sqrt{1-a^2}$. Eliminirt man diese Gröfse, so findet man

$$(7.) \qquad \sqrt{1-x_1^2b^2} = \frac{ap}{z\sqrt{1-x^2\zeta^2}+\zeta\sqrt{1-x^2z^2}}.$$

Anmerk. Im 45sten Bande dieses Journals giebt *Richelot* p. 227 Formeln für a und $\sqrt{1-x_1^2b^2}$, die in anderer Gestalt auftreten. Wenn wir unsere Bezeichnung beibehalten, so sind seine Ausdrücke

$$(6^*.) \qquad a = \pm\frac{\sqrt{1+z}\sqrt{1+\zeta}-\sqrt{1-z}\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{1+xz}\sqrt{1+x\zeta}+\sqrt{1-xz}\sqrt{1-x\zeta}}$$

$$(7^*.) \qquad \sqrt{1-x_1^2b^2} = \pm\frac{\sqrt{1+xz}\sqrt{1+x\zeta}+\sqrt{1-xz}\sqrt{1-x\zeta}}{\sqrt{1+z}\sqrt{1+\zeta}+\sqrt{1-z}\sqrt{1-\zeta}}.$$

Die Uebereinstimmung dieser Werthe mit den obigen ergiebt sich leicht. Multiplicirt man nämlich Zähler und Nenner in (6.) mit 2, so sind dieselben unmittelbar die Quadrate der Zähler und Nenner von (6*.). Die Gleichheit der andern Formeln zeigt sich, wenn man Zähler und Nenner in (7.) mit $\sqrt{1-x^2z^2}-\sqrt{1-x^2\zeta^2}$ multiplicirt, und die Identität

$$(\sqrt{1+xz}\sqrt{1+x\zeta}-\sqrt{1-xz}\sqrt{1-x\zeta})^2 = 2(1+x^2z\zeta-\sqrt{1-x^2z^2}\sqrt{1-x^2\zeta^2})$$

benutzt.

§. 7.

Die gefundenen Werthe von a und b sind offenbar reell, man sieht ferner leicht ein, ***dafs sie kleiner als 1 sind.*** Zunächst folgt nämlich aus (α.), dafs $\sqrt{1-b^2}$ reell, d. h. dafs $b<1$ ist. Ferner sieht man aus (γ.), dafs $\sqrt{1-a^2}$ reell, d. h. $a<1$ ist.

Ferner sind a^2 und b^2 continuirliche Functionen von x. Es könnte a^2 nur discontinuirlich werden, wenn der Nenner in (6.) verschwindet, d. h. wenn zugleich $z+\zeta$ und p gleich 0 sind. Es ist aber $z+\zeta=0$, wenn z rein imaginär $=ni$ ist; dann wird $p=2\sqrt{1+x^2n^2}$, also gewifs nicht 0. Aus (β.) folgt die Continuität von b^2; selbst wenn $z+\zeta=0$ ist, mufs b^2 continuirlich bleiben, indem selbst in diesem Falle, d. h. für ein rein imaginäres z der Ausdruck $\frac{qi}{z+\zeta}=\frac{\sqrt{1-z^2}-\sqrt{1-\zeta^2}}{z+\zeta}=\frac{\zeta+z}{\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\zeta^2}}$ continuirlich bleibt, und $\sqrt{1-x^2a^2}$ nie verschwindet.

Einfache Combinationen der Gleichungen des vorigen Paragraphen lehren, ***für welche z die Gröfsen a^2 und b^2 ihren gröfsten und kleinsten Werth***

1 *und* 0 *erreichen.* Es wird

$a^2 = 0$; wenn $\varkappa$ rein imaginär ist,

$a^2 = 1$; wenn $\varkappa$ reell ist, und dabei zwischen 1 und $\frac{1}{\varkappa}$ liegt,

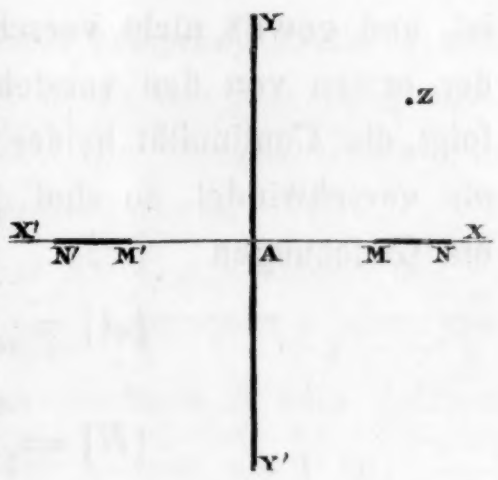
$b^2 = 0$; wenn $\varkappa$ reell und < 1,

$b^2 = 1$; wenn $\varkappa$ reell und $> \frac{1}{\varkappa}$.

Die Grenzfälle sind hier überall eingeschlossen; z. B. wird a noch gleich 0 für $\varkappa = 0$.

Stellt man die imaginären Gröfsen auf bekannte Art geometrisch dar, nimmt die Achse der X als Achse des Reellen (Fig. 1.), die der Y als Achse des rein Imaginären, sind ferner AX und AY die positiven Seiten, so kann man die Werthe 1 und $\frac{1}{\varkappa}$ durch M und N repräsentiren *(indem man $\varkappa$ die positive Wurzel aus $\varkappa^2$ nennt)*, -1 und $-\frac{1}{\varkappa}$ durch M' und N'. Es wird dann $a = 0$ für alle Puncte, die in $Y'Y$ liegen; $a^2 = 1$ für die Linien MN und $M'N'$; es wird $b = 0$ für das Stück $M'M$; $b^2 = 1$ für NX und $N'X'$.

Fig. 1.



§. 8.

Indem wir nun zur *Zeichenbestimmung* übergehen, bemerken wir vorläufig, *dafs es nur nöthig ist, die Vorzeichen der beiden Ausdrücke*

$$a\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-\varkappa^2 a^2} = A$$
$$b\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-\varkappa_1^2 b^2} = B$$

zu kennen; die Zeichen der sechs Factoren von A und B bleiben der Natur der Sache nach unbestimmt. Nachdem §. 7. gezeigt wurde, dafs a^2 und b^2 continuirliche Functionen von x sind, wird sich zunächst beweisen lassen, *dafs auch A und B continuirlich sind,* ihr Zeichen also nur für $a = 0$, $b = 0$, $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ ändern können.

Zur Abkürzung soll $[Z]$ entweder $+1$, -1 oder Null vorstellen, je nachdem Z positiv, negativ oder Null ist.

Multiplicirt man die reellen Theile der ersten und zweiten Gleichung von (1.) mit einander, und dividirt durch den reellen Theil der dritten, so findet man

$$\frac{2a\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-\varkappa^2 a^2}} = \frac{N(z+\zeta)(\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\zeta^2})}{p}$$

und auf ähnliche Art:

$$2b\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-x_1^2b^2}\,(1-x^2a^2) = N\frac{z-\zeta}{i}\frac{p}{\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Da p nur verschwindet, wenn $\sqrt{1-x^2z^2}$ rein imaginär, d. h. z reell und $>\frac{1}{x}$ ist, und in diesem Falle auch $\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\zeta^2}=0$, der Quotient

$$\frac{\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{1-x^2z^2}+\sqrt{1-x^2\zeta^2}}$$

aber gleich

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{1-z^2}-\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{1-x^2z^2}-\sqrt{1-x^2\zeta^2}}$$

ist, und gewifs nicht verschwindet, so ist die rechte also auch die linke Seite der ersten von den vorstehenden Gleichungen continuirlich. Auf ähnliche Art folgt die Continuität beider Seiten der zweiten Gleichung. Da ferner $1-x^2a^2$ nie verschwindet, so sind A und B continuirlich, und ihre Zeichen sind durch die Gleichungen

$$[A] = \left[(z+\zeta)\frac{\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{1-x^2z^2}+\sqrt{1-x^2\zeta^2}}\right]$$

$$[B] = \left[\frac{z-\zeta}{i}\,\frac{\sqrt{1-x^2z^2}+\sqrt{1-x^2\zeta^2}}{\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$$

gegeben. Will man also den Zeichen von A für den ganzen Lauf von z folgen, so wird man zunächst aus den Anfangswerthen von z das Anfangszeichen von A berechnen; dasselbe Zeichen von A bleibt sicher so lange, bis a gleich 0 oder ± 1 wird, d. h. (§. 7.) bis z rein imaginär oder reell, gröfser als 1 und kleiner als $\frac{1}{x}$ ist. Erst dann hat man eine neue Rechnung für $[A]$ anzustellen. Ähnlich ist es mit $[B]$.

Diese neue Rechnung, oder vielmehr die jedesmalige Wiederholung derselben Rechnung an den kritischen Stellen kann man jedoch ersparen. Wird z wie oben gleich $m+ni$ gesetzt, so sind jene kritischen Stellen *die,* an denen m oder n verschwindet; je nachdem die verschwindende Gröfse ihr Zeichen behält oder wechselt, wird auch A oder B sein Zeichen behalten oder wechseln.

Um dies zu zeigen, kann man auf die Formeln des §. 4. zurückgehen. *Verschwindet zunächst* m an einer Stelle, so wird $\sqrt{1-z^2}$ eine reelle Gröfse, die dasselbe Zeichen hat wie der reelle Theil dieser Wurzel für das unmittelbar vorhergehende oder folgende z. Es folgt ferner daraus, dafs der imaginäre Theil der Wurzel sein Zeichen behält oder wechselt, je nachdem m es behält oder wechselt. Das Gleiche gilt von $\sqrt{1-x^2z^2}$.

Verschwindet n an einer Stelle, so sind bei Betrachtung von $\sqrt{1-z^2}$ zwei Fälle zu unterscheiden. Ist erstens $m<1$, so wird der reelle Theil der Wurzel sein Zeichen behalten, der imäginäre es mit n zugleich wechseln. Ist zweitens $m>1$, so wird der imaginäre Theil sein Zeichen behalten, der reelle es mit n wechseln. Hieraus folgt ferner für $\sqrt{1-x^2z^2}$, dafs wenn $m<\frac{1}{x}$ ist, der reelle Theil sein Zeichen behält, der imaginäre es mit n wechselt; wenn $m>\frac{1}{x}$, so behält es der imaginäre, während der reelle es mit n wechselt.

Unter Anfangswerth von $[A]$ und $[B]$ verstehen wir den, welcher zuerst nicht Null ist.

Es läfst sich nun leicht erkennen, ob an einer kritischen Stelle A und B ihr Zeichen ändern. Wird $a=0$ d. h. geht z durch das rein Imaginäre, so wird $z+\zeta=2m$ sein Zeichen mit m wechseln. Die übrigen Gröfsen in $[A]$ behalten ihr Zeichen; also wechselt A sein Zeichen mit m. Wird $a^2=1$ so geht z durch den reellen Werth m, der gröfser als 1 und kleiner als $\frac{1}{x}$ ist. Also behält $z+\zeta=2m$ sein Zeichen, ebenso $\sqrt{1-x^2z^2}+\sqrt{1-x^2\zeta^2}$, während $\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\zeta^2}$ es mit n wechselt; also wechselt A sein Zeichen mit n. Ist $b=0$ so erhält z einen Werth m, der kleiner als 1 ist; $\frac{z-\zeta}{i}$ ist $2n$ und wechselt daher sein Zeichen mit n. Es wechselt also B sein Zeichen mit n. Wird $b^2=1$, so ist z und xz gröfser als 1; es wechselt also B sein Zeichen mit n. Wir haben also folgende Resultate: Wechselt der reelle Theil von z sein Zeichen, oder wechselt der imaginäre Theil von z sein Zeichen, während hierbei der reelle zwischen 1 und $\frac{1}{x}$ liegt, so wechselt es auch, und nur in diesen Fällen, A; es ist dann der Werth von a^2 resp. 0 oder 1. Wechselt der imaginäre Theil von z sein Zeichen, und ist der reelle dabei <1 oder $>\frac{1}{x}$, und nur dann wechselt B sein Zeichen; es ist dann b^2 resp. 0 oder 1. Geometrisch genommen wechselt A sein Zeichen, wenn die Curve z die stärker gezogenen, B wenn sie die schwächeren Theile der Achsen in Fig. 1. ***durchschneidet***, und zwar bedeuten der Reihe nach die obigen vier Fälle, dafs die Curve z die Achse $Y'Y$, das Stück MN oder $M'N'$, drittens $M'M$ und viertens NX oder $N'X'$ durchschneidet.

Fig. 1.

Solange $[A]=0$ oder $[B]=0$ behält a und resp. b denselben Werth; z bleibt dann auf einer der Achsen.

Wir folgen nun dem Laufe von z und bezeichnen der Reihe nach die Werthe von a und b, bei denen eine solche Zeichenänderung Statt findet, oder vielmehr ihre Zahlwerthe mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, resp. mit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$. Die α und β sind also 0 und $+1$. Es seien ferner α_0, $\mathfrak{A}$, β_0, $\mathfrak{B}$ die Zahlwerthe von den Anfangs- und Endwerthen von a und b, die also aus (6.) und (7.) berechnet werden, indem man in diese Formeln *das* z einsetzt, welches $x=g$ und $x=h$ entspricht. Die Anfangswerthe von $[A]$ und $[B]$ seien endlich $[A_0]$ und $[B_0]$.

§. 9.

Nach diesen Vorbereitungen hat die Zerlegung von J, d. h. also von

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}},$$

wo z auf gegebenem Wege von einem gegebnen Anfangswerthe zu einem gleichfalls gegebnen Endwerthe wächst, keine Schwierigkeiten. In die Formel (2.) hat man für a und b die Werthe zu setzen, die ihnen nach §. 6. zukommen. Sind nun α und β die Zahlenwerthe von a und b, und verstehen wir unter $\sqrt{1-\alpha^2}$, $\sqrt{1-\varkappa^2\alpha^2}$, $\sqrt{1-\beta^2}$, $\sqrt{1-\varkappa_1^2\beta^2}$ die positiven Wurzeln, so wird für das Glied

$$\frac{a'}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-\varkappa^2 a^2}}, \qquad \frac{b'}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-\varkappa_1^2 b^2}}$$

in (2.) jetzt

$$[A]\frac{\alpha'}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\varkappa^2\alpha^2}}, \qquad [B]\frac{\beta'}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\varkappa_1^2\beta^2}}$$

selbst an den Stellen zu setzen sein, an welchen $[A]$ und $[B]$ Null sind (weil für diese a und b constant sind). Zerlegen wir die beiden Integrale auf der rechten Seite in eine Summe solcher, in denen A und B ihre Zeichen nicht ändern, so wird schliefslich

$$(8.)\quad J = [A_0]\left\{\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\varkappa^2\alpha^2}} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \cdots + (-1)^m\int_{\alpha_m}^{\mathfrak{A}}\right\}$$
$$+ i[B_0]\left\{\int_{\beta_0}^{\beta_1}\frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\varkappa_1^2\beta^2}} - \int_{\beta_1}^{\beta_2} + \cdots + (-1)^n\int_{\beta_n}^{\mathfrak{B}}\right\}.$$

Die Function, welche unter dem Integrale steht, ist in der ersten Zeile

$\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\varkappa^2\alpha^2}}$, in der zweiten $\frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\varkappa_1^2\beta^2}}$, und der Werth eines jeden Integrales, mit Ausnahme des ersten und letzten jeder Zeile, in der ersten 0 oder K, in der zweiten 0 oder K'. Man wird also die Zerlegung leicht vornehmen können, es mag z analytisch gegeben oder als Curve gezeichnet sein.

Als Beispiel wählen wir einen besonders wichtigen Fall, nämlich den, wo z in J von 0 zu einem gegebnen Werthe Z geht, ohne jemals rein reell oder imaginär zu werden. Für $z=0$ mögen $\sqrt{1-z^2}$ und $\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}$ gleich $+1$ sein. Es ist also z eine beliebige Curve oder Gerade, die A mit Z verbindet, ohne die Achsen zu schneiden. Es ist dann $[A_0]$ offenbar $+1$, wenn Z im ersten oder vierten Quadranten liegt, sonst -1; $[B_0]$ gleich $+1$, für ein Z im ersten oder zweiten Quadranten, sonst -1. Ferner ist $\alpha_0=\beta_0=0$. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden nach (6.) und (7.) für $z=Z$ berechnet, und dann ist J die Summe der *zwei* Integrale

$$[A_0]\int_0^{\mathfrak{A}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\varkappa^2\alpha^2}} + i[B_0]\int_0^{\mathfrak{B}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\varkappa_1^2\beta^2}}.$$

Man wird übrigens leicht bemerken, dafs durch (8.) die Eigenschaft der Periodicität für die elliptischen *Integrale* streng bewiesen ist.

Allgemeiner Fall: $\varkappa$ ist imaginär.

§. 10.

Die Untersuchungen der vorigen Paragraphen lassen sich leicht auf den Fall ausdehnen, dafs $\varkappa$ eine imaginäre Zahl ist; der Fall, dafs $\varkappa$ rein imaginär wird, der sich auf den eines reellen $\varkappa$ ohne Mühe zurückführen läfst, soll hier ausgeschlossen werden. Den reellen Theil von $\varkappa$ denken wir uns positiv, $\varkappa\gamma$ wie früher (§. 1.) kleiner als 1.

Entsprechend dem §. 6. werden hier die Formeln für a und b entwickelt. Dazu bedienen wir uns der Gleichung

$$(\delta.) \qquad abp = -q\sqrt{1-b^2}$$

und einer zweiten, die aus Gleichsetzung der reellen Theile von (3.) entsteht; diese geht mit Hülfe von (δ.) in

$$(\varepsilon.) \qquad abr = -q\sqrt{1-a^2}$$

über. Die Elimination von a oder b aus (δ.) und (ε.) giebt

$$(9.) \qquad p^2a^4 - a^2(p^2-q^2-r^2) - q^2 = 0$$

$$(10.) \qquad r^2b^4 - b^2(r^2-p^2-q^2) - q^2 = 0,$$

so dafs a und b aus bekannten Stücken p, q und r gefunden werden können. Es ergeben sich nämlich für a^2 und b^2 die zwei Werthe

$$(11.) \qquad a^2 = \frac{p^2 - q^2 - r^2 \pm \sqrt{D}}{2p^2}$$

$$(12.) \qquad b^2 = \frac{r^2 - p^2 - q^2 \pm \sqrt{D}}{2r^2}$$

wenn D gleich $(q^2 + r^2 - p^2)^2 + 4p^2q^2$ gesetzt ist. Es läfst sich übrigens D auch als Product

$$(r + p + qi)(r + p - qi)(r - p + qi)(r - p - qi)$$

darstellen.

§. 11.

Die gefundenen Werthe genügen zwar den ursprünglichen Gleichungen, lösen unsere Aufgabe aber nur dann, wenn a und b reell und kleiner als 1 werden. Man wird deshalb in (11.) und (12.) nur die oberen Zeichen nehmen dürfen; die zweite Lösung ist zu verwerfen. In der That wird die linke Seite von (9.) für $a^2 = 1,\ 0,\ -\infty$ resp. positiv, negativ, positiv, also liegt eine und nur eine Wurzel a^2 zwischen 0 und 1, die andre ist negativ. Ebenso verhält es sich mit b^2. Wenn wir von nun an über die Wurzeln a^2 und b^2 der Gleichungen (9.) und (10.) handeln, so sind diese allein hierher gehörigen mit den oberen Zeichen gemeint. Zur bequemeren Berechnung derselben kann man nach Anleitung des §. 4.

$$r = \varrho \sin\theta$$

$$q = \sqrt{\varrho^2 - p^2}\cos\theta$$

setzen, wodurch man

$$(13.) \qquad \begin{cases} a = \pm\cos\theta \\ b = \pm\dfrac{\sqrt{\varrho^2 - p^2}}{\varrho} \end{cases}$$

erhält. Die Vorzeichen bleiben natürlich unbestimmt.

Im Folgenden werden a und b für besondere Werthe von z zu betrachten sein; dabei wird man oft bequemer auf (9.) und (10.) als auf die *aufgelösten* Gleichungen zurückgehen. In einem Fall ist besondere Vorsicht hierbei anzuwenden, nämlich wenn man findet, einem z entspreche $a = 0$ oder $b = 0$. In diesem Falle ist nämlich zu untersuchen, ob die zweite Wurzel für a^2 resp. b^2 positiv, Null oder negativ ist, und nur in den letzten beiden Fällen ist 0 wirklich die hierher gehörige Wurzel, während sie im ersten Falle nur die Grenze der negativen Wurzel a^2 oder b^2 ist.

§. 12.

Die gefundenen Werthe von a^2 und b^2 sind continuirlich. Für keinen Werth von z können p und q zugleich verschwinden, da $p=0$ voraussetzt dafs zz reell und gröfser als 1, $q=0$ dafs z reell und kleiner als 1 ist. Ist $p=0$, so kann im Allgemeinen nicht $r=0$ sein; denn für $p=0$ wird

$$r = -\sqrt{1-x^2z^2}(\sqrt{1-z^2}-\sqrt{1-\zeta^2})$$
$$= -qi.\sqrt{1-x^2z^2}.$$

Da aber q mit p nicht zugleich verschwindet, so mufs $xz=1$ sein, ein Fall, der nur am Anfang oder Ende des Laufes von z vorkommen kann.

Es kann a^2 nach (11.) nur discontinuirlich sein, wenn es für $p=0$ unendlich wird. Aus (9.) ergiebt sich aber für $p=0$

$$a^2 = \frac{q^2}{q^2+r^2}$$

also ein endlicher Werth, der auch positiv ist (da, wie wir eben zeigten, q nicht Null sein kann), also hierher gehört. Auch b^2 ist continuirlich; eine Discontinuität kann nämlich nur für $r=0$ eintreten, für welchen Fall nach (10.)

$$b^2 = \frac{q^2}{p^2+q^2}$$

wird, also positiv und endlich bleibt, wenn nicht auch q verschwindet, d. h. wenn nicht z gerade gleich ± 1 wird. Für diesen Fall wird p sicher nicht Null, also der obige Ausdruck für b^2 gleich Null. Dieser Werth gehört aber wirklich der positiven Wurzel als Grenzfall an, indem für $r=0$ und $q=0$ aus (9.) unser a^2 gleich 1, daher aus (δ.) das hierzugehörige $b=0$ folgt.

Auch hier mufs man untersuchen, an welchen Stellen a^2 und b^2 ihre gröfsten und kleinsten Werthe 1 und 0 annehmen. Damit $a^2=0$ sei, mufs nach (9.) zunächst $q=0$ werden. Dann reducirt sich diese Gleichung auf $a^2(a^2p^2-p^2+r^2)=0$, so dafs, wenn 0 der Werth der hierher gehörigen Wurzel sein soll, p^2-r^2 negativ sein mufs. Für $q=0$ ist aber $r=p.\sqrt{1-z^2}$, und daher mufs $-p^2z^2$ negativ, d. h. z rein imaginär sein. Die Bedingung $q=0$ wird dann von selbst erfüllt.

Auch wenn $b=0$ sein soll, mufs q verschwinden, aufserdem aber $\frac{r^2-p^2}{r^2} = -\frac{z^2}{1-z^2}$ negativ sein. Es wird aber q nur Null für ein rein imaginäres z, und dann wäre jener Ausdruck positiv; oder wenn z reell und <1, und dann wird er wirklich negativ. Es wird also $b=0$ für $z<1$.

Soll $a^2 = 1$ sein, so mufs nach (9.) nothwendig $r^2 = 0$ sein; b^2 wird 1 für $p = 0$. Wir haben demnach folgende Resultate: Es ist

$a^2 = 0$; wenn z rein imaginär wird. Dann ist $q = 0$.

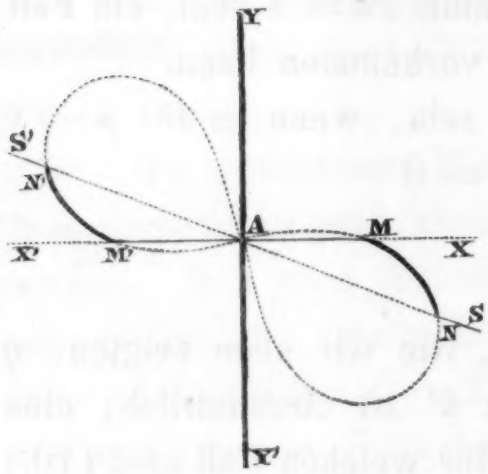
$b^2 = 0$; wenn $z < 1$. Auch dann ist $q = 0$.

$a^2 = 1$; wenn $r = 0$.

$b^2 = 1$; wenn $p = 0$.

§. 13.

Fig. 2.



Diese Resultate lassen sich leicht geometrisch deuten (Fig. 2.). Es wird $a^2 = 0$ auf der ganzen Achse des Imaginären $Y'Y$; $b^2 = 0$ auf dem Stücke $M'M$ der reellen Achse, wenn M und M' wieder die Repräsentanten von ± 1 sind. Es mögen N und N' wieder $\pm\frac{1}{z}$ vorstellen, dann wird $b^2 = 1$ für die Geraden NS und $N'S'$, d. h. für die Verlängerung der Geraden $N'AN$ in's Unendliche, indem für alle Puncte dieser Geraden zz reell und > 1 ist. Es wird endlich $a^2 = 1$ für ein Curvenstück, welches in der Figur M mit N und M' mit N' verbindet, und welches einer Lemniscate angehört.

Dafs die Bedingung $r = 0$ wirklich eine Lemniscate giebt, läfst sich leicht auf folgende Art darthun. Setzt man

$$s = \sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{1-z^2z^2} - \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\gamma^2\zeta^2}$$

und bezeichnet die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes z, auf die Achsen $X'X$ und $Y'Y$ bezogen mit m und n, so dafs $z = m + ni$ und $\zeta = m - ni$, macht man ferner $z^2 = g + hi$, so wird

$$rs = z^2 - \zeta^2 + \gamma^2\zeta^2 - z^2z^2 + z^2\zeta^2(z^2 - \gamma^2)$$

also

$$2mn(1-g) + h((m^2+n^2)^2 - (m^2-n^2)) = 0.$$

Führt man Polarcoordinaten ein

$$h = c^2\cos 2\eta$$
$$1-g = c^2\sin 2\eta$$
$$m = \varrho\cos\theta$$
$$n = \varrho\sin\theta,$$

so entsteht die bekannte Polargleichung der Lemniscate

$$\varrho = \sqrt{\frac{\cos 2(\eta+\theta)}{\cos 2\eta}}.$$

Da der reelle Theil von x positiv ist, so liegt x im ersten oder vierten Quadranten. Im ersten Falle ist h positiv, also $\sin 2\eta$ und $\cos 2\eta$ positiv. Es ist daher die Länge des gröfsten Radius-Vector $= \frac{1}{\sqrt{\cos 2\eta}}$. Da ferner $\eta < \frac{\pi}{4}$, so durchschneidet diese Achse den 2ten und 4ten Quadranten und bildet mit der Achse der X im vierten Quadranten einen Winkel, der kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist. Lag x im zweiten Quadranten, so ist jene Länge der halben Achse $\frac{1}{\sqrt{-\cos 2\eta}}$; sie geht durch den ersten und dritten Quadranten; η liegt zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$, und die Achse bildet mit der Achse der X im ersten Quadranten den Winkel $\frac{\pi}{2} - \eta$.

Diese Lemniscate genügt aber nicht der Gleichung $r = 0$ sondern $rs = 0$; es bleibt daher zu untersuchen, auf welchem Stücke $r = 0$ ist, indem nur für die vier Puncte M, N, M', N' zugleich $r = 0$ und $s = 0$ wird, weil für $r = 0$ und $s = 0$ auch $r \pm s = 0$ wäre. Soll $r = 0$ sein, so mufs $\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{1-x^2z^2}$ rein imaginär sein; macht man daher für den Augenblick

$$\sqrt{1-\zeta^2} = a + bi$$
$$\sqrt{1-x^2z^2} = e + fi,$$

so folgt daraus $ae - bf = 0$, oder $e : f = b : a$. Bezeichnet m eine reelle Zahl, so hat $\sqrt{1-x^2z^2}$ die Form $\frac{b+ai}{m}$; es ist aber $\sqrt{1-z^2} = a - bi$, also

$$1 - z^2 = -(1-x^2z^2)m^2,$$

folglich

$$z^2 = \frac{1+m^2}{1+x^2m^2}.$$

Setzt man umgekehrt z^2 gleich diesem Werthe, so wird für jedes reelle m auch $r = 0$. Während m von 0 bis ∞ wächst, geht offenbar z^2 von 1 continuirlich zu $\frac{1}{x^2}$, ohne je gleich 0 zu werden: es wird daher $r = 0$ für jene Stücke der Lemniscate, die M mit N und M' mit N' verbinden, ohne dazwischen durch den Anfangspunct zu gehen.

Ein ähnlicher Ausdruck, den man im Folgenden finden wird, nämlich

$$u = \zeta\sqrt{1-x^2z^2} + z\sqrt{1-\gamma^2\zeta^2} = 0$$

stellt gleichfalls ein Lemniscatenstück dar. Behandelt man ihn wie den früheren, setzt also

$$v = \zeta\sqrt{1-x^2z^2} \quad z\sqrt{1-\gamma^2z^2},$$

so findet man

$$\frac{uvi}{2} = 2mn + h(m^2+n^2)^2 = 0$$

oder die Polargleichung

$$\varrho = \sqrt{\frac{-\sin 2\theta}{h}}.$$

Lag $\varkappa$ im ersten Quadranten, so durchschneidet die Hauptaxe den zweiten und vierten Quadranten, sonst den ersten und dritten. Sie bildet mit einer Richtung der X Axe den Winkel $\frac{\pi}{4}$. Die z desjenigen Theiles der *Lemniscate,* welcher $u = 0$ entspricht, werden durch die Gleichung

$$z^2 = \frac{1}{\varkappa^2 - \mu^2}$$

gegeben, wo μ irgend eine reelle Gröfse vorstellt, so dafs wieder zwei *Lemniscaten*-Stücke hierhergehören, welche in dem Punkte $\frac{1}{\varkappa}$ und $-\frac{1}{\varkappa}$ endigen, die aber in A beginnen. Es ist auch leicht zu sehen, welche von diesen Stücken zu nehmen sind. Es ist klar, dafs nicht für dasselbe z zugleich u und r verschwinden, weil nicht ein reelles m und μ existirt, für welche

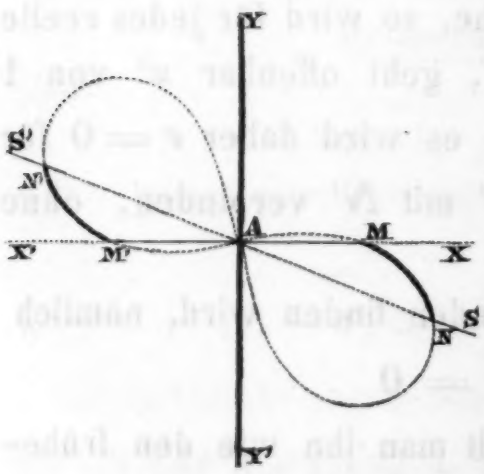
$$\frac{1+m^2}{1+\varkappa^2 m^2} = \frac{1}{\varkappa^2 - \mu^2}$$

ist, weil sonst $\varkappa^2$ gleich der reellen Gröfse $1+\mu^2(1+m^2)$ wäre.

§. 14.

Wird an einer Stelle p, q oder r gleich 0, so können sie dann ihr Zeichen ändern. Offenbar ändert q sein Zeichen unter denselben Bedingungen wie im §. 8, nämlich wenn z die Achse $Y'Y$ schneidet, d. h. wenn z rein imaginär wird, und der reelle Theil von z sein Zeichen ändert; ferner auch wenn z das Stück $M'M$ durchschneidet, d. h. reell und <1 wird, und dabei sein imaginärer Theil das Zeichen wechselt. Es ändert p sein Zeichen, wenn z die Linien NS oder $N'S'$ durchschneidet, d. h. wenn der imaginäre Theil von $\varkappa z$ das Zeichen wechselt, und dabei $\varkappa z$ reell und >1 wird. Endlich wird r sein Zeichen ändern, wenn z eines der *Lemniscaten*-Stücke MN oder $M'N'$ durchschneidet, was man vermittelst der Polargleichung des §. 13 analytisch ausdrücken kann.

Fig. 2.



Die letztere Behauptung erweist man durch Betrachtung des Productes

$$-\frac{rsi}{2} = 2mn(1-g)+h((m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)),$$

das für m und n gleich ∞, also auch für jeden Punct aufserhalb der *Lemniscate* das Zeichen von h hat; für jeden Punct der Linie selbst 0 ist; für den Punct im Innern $m=\frac{1}{2}$, $n=0$, also für alle innern Puncte das Zeichen von $-h$ hat. Es ändert also rs sein Zeichen, wenn z die Stücke MN und $M'N'$ durchschneidet und zwar dadurch, dafs r durch Null geht, nicht dadurch dafs s verschwindet. Es hat also r das Zeichen geändert.

§. 15.

Auf ganz ähnliche Art wie im §. 8. untersuchen wir hier die Zeichen von

$$A = a\sqrt{1-a^2}(\sqrt{1-x^2a^2}+\sqrt{1-\gamma^2a^2})$$
$$B = b\sqrt{1-b^2}(\sqrt{1-x_1^2b^2}+\sqrt{1-\gamma_1^2b^2})$$

und bilden deshalb Ausdrücke, die mit A und B gleiche Zeichen haben; die Gleichungen (δ.) und (ε.) des §. 10 werden hierzu jedoch nicht ausreichen, da in ihnen $\sqrt{1-x^2a^2}$ und $\sqrt{1-x_1^2b^2}$ nicht vorkommen. Man gehe deshalb auf (4.) zurück, dividire beide Seiten durch z, und nehme die reellen Theile. Benutzt man dann die Gleichung

$$\sqrt{1-b^2} = \frac{p}{r}\sqrt{1-a^2},$$

die aus (δ.) und (ε.) folgt, so wird

$$Az\zeta = \frac{qi(z-\zeta)(1-a^2)+a^2r(\zeta\sqrt{1-x^2z^2}+z\sqrt{1-x^2\zeta^2})}{p}$$

erhalten. Eine zweite Formel, die wir hier anwenden, folgt aus (3.) und (4.) durch Elimination von $\sqrt{1-x^2z^2}$; daraus entsteht

$$b\sqrt{1-x^2a^2} = \frac{i\sqrt{1-z^2}}{z} - \frac{i\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}}{z}.$$

Der reelle Theil der vorstehenden Gleichung giebt

$$\frac{b^2z\zeta(\sqrt{1-x^2a^2}+\sqrt{1-\gamma_1^2a^2})a}{\sqrt{1-a^2}}$$
$$= -\frac{qi}{r}(\zeta\sqrt{1-z^2}-z\sqrt{1-\zeta^2}+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}(z-\zeta)).$$

Die obere Formel lehrt, dafs, da a^2 continuirlich ist, dasselbe für A gilt, vielleicht mit Ausnahme des Werthes $p=0$, für den (s. oben) b nicht Null ist. Da für keinen Werth, der im Laufe von z vorkommt, r zugleich Null wird, so sieht man aus der letzten Formel, dafs A auch dann noch con-

tinuirlich bleibt; es bleibt sogar noch continuirlich für $p=r=0$; d. h. für $xz=1$. ***Es kann daher A wiederum sein Zeichen nur bei*** $a^2=1$ ***oder*** 0 ***ändern.*** Da nun a^2 eine continuirliche Function von $z=m+ni$, oder von m und n ist, und 0 und 1 ihre kleinsten und gröfsten Werthe sind, so ist, auch ohne dafs die Rechnung ausgeführt wird, klar, dafs eine unendlich kleine Aenderung der ersten Ordnung von z — sie sei ε — an den betreffenden Stellen, eine Aenderung zweiter Ordnung, also von der Ordnung ε^2 für a^2 giebt. ***Es ist nun*** $a=0$ wenn z rein imaginär $=ni$ wird; für diesen Fall hat man $A=0$. Aendert sich z dann um ε, so ändert sich q um ein Glied der Ordnung ε; $z-\zeta$ und $1-a^2$ sind endliche Gröfsen, d. h. nicht 0; a^2 ist von der Ordnung ε^2, so dafs $\frac{qi(z-\zeta)}{p}$ das Zeichen des neuen A bestimmt. Es ändert daher (§. 14.) A sein Zeichen, wenn z die Achse des Imaginären durchschneidet. ***Wird*** $a^2=1$ also $r=0$, so ist $1-a^2=0$, aber weder q noch $z-\zeta$ verschwindet. Da nun die Lemniscate $r=0$ die zweite

$$\zeta\sqrt{1-x^2z^2}+z\sqrt{1-\gamma^2\zeta^2}=0$$

(s. §. 13.) nicht schneidet, der letzte Ausdruck daher für $r=0$ nicht verschwindet, so bestimmt das Zeichen von

$$\frac{a^2r(\zeta\sqrt{1-x^2z^2}+z\sqrt{1-\gamma^2\zeta^2})}{p}$$

das Zeichen von A, so dafs A sein Zeichen wechselt, wenn z die Lemniscaten-Stücke MN und $M'N'$ durchschneidet.

Um das Zeichen von B zu finden, dividire man (5.) durch z, und multiplicire mit $\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}$; die Gleichsetzung der reellen Theile giebt dann

$$z\zeta.b.\frac{\sqrt{1-x_1^2b^2}+\sqrt{1-\gamma_1^2b^2}}{\sqrt{1-b^2}}=-\frac{(z+\zeta)q}{p}+\frac{ib^2r}{p}(\zeta\sqrt{1-x^2z^2}-z\sqrt{1-\gamma^2\zeta^2}),$$

und nach Multiplication mit $1-b^2=\frac{a^2b^2p^2}{q^2}$ einen zweiten Ausdruck:

$$z\zeta B=\frac{a^2b^2p}{q}(-q(z+\zeta)+ib^2r(\zeta\sqrt{1-x^2z^2}-z\sqrt{1-\gamma^2\zeta^2})).$$

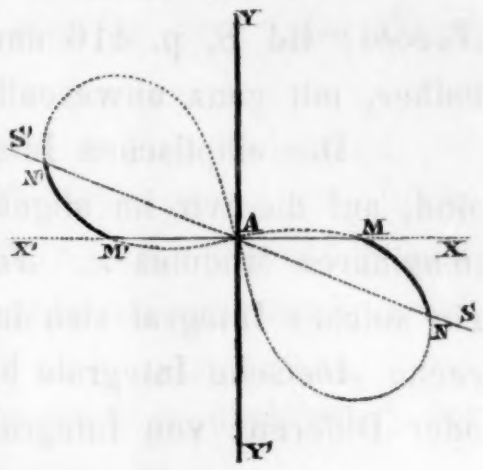
Es bleibt daher auch B continuirlich, ändert folglich sein Zeichen nur für $b^2=0$ und $b^2=1$, und zwar nur und immer, wenn z die Stücke $M'M$ oder NS oder $N'S'$ durchschneidet.

§. 16.

Wie im §. 9. seien jetzt $[A_0]$ und $[B_0]$ die Anfangszeichen von A und B; wir folgen dem Laufe von z und nennen den Zahlwerth des an-

fänglichen a wieder α_0, des letzten a gleichfalls $\mathfrak{A}$, die entsprechenden Stücke für b, β_0 und $\mathfrak{B}$. Die Zahlenwerthe der a an den Stellen, an welchen die Curve z die in der Figur stärker gezogenen Linien schneidet, heifsen der Reihe nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, so dafs beim Durchschnitt mit der Achse $Y'Y$ immer $\alpha = 0$, wenn MN oder $M'N'$ durchschnitten wird, $\alpha = 1$ gesetzt wird. Ähnlich setzen wir $\beta = 0$ beim Durchschnitt mit $M'M$, $\beta = 1$ beim Durchschnitt mit NS oder $N'S'$, und haben dann wieder für J die Formel (8.), in der $\sqrt{1-\alpha^2}$, $\sqrt{1-\beta^2}$ die positiven Wurzeln, $\sqrt{1-\varkappa^2\alpha^2}$, $\sqrt{1-\varkappa_1^2\beta^2}$ die mit positivem reellen Theile vorstellen.

Fig. 2.



Dem besondern, am Ende des §. 9. angegebenen Falle entspricht das Resultat, welches bereits im Monatsbericht der Berliner Akademie 1855 p. 306 mitgetheilt wurde.

§. 17.

Wird $\varkappa$ reell, so mufs (9.) und (10.) dieselben Werthe für a und b geben, welche man §. 6. findet. Da es einige Mühe zu machen scheint, dieses zu zeigen, so soll die Rechnung wenigstens für die eine Formel hier ausgeführt werden.

Es ist offenbar $2p$ das Product der beiden Factoren

$$f = \sqrt{1+\varkappa z}\sqrt{1+\gamma\zeta} + \sqrt{1-\varkappa z}\sqrt{1-\gamma\zeta}$$
$$f_1 = \sqrt{1-\varkappa z}\sqrt{1+\gamma\zeta} + \sqrt{1+\varkappa z}\sqrt{1-\gamma\zeta}$$

und

$$2(\sqrt{1-z^2} - \sqrt{1-\zeta^2}) = gg_1$$

wenn

$$g = \sqrt{1+z}\sqrt{1+\zeta} - \sqrt{1-z}\sqrt{1-\zeta}$$
$$g_1 = \sqrt{1-z}\sqrt{1+\zeta} - \sqrt{1+z}\sqrt{1\quad\zeta};$$

endlich

$$4(p^2 - q^2 - r^2) = f^2g_1^2 + f_1^2g^2 - 4z^2\zeta^2(x-\gamma)^2,$$

so dafs (9.) in

$$f^2f_1^2a^4 - a^2(fg_1^2 + f_1^2g^2 - 4z^2\zeta^2(x-\gamma)^2) + g^2g_1^2 = 0$$

also für $x = \gamma$ in

$$(a^2f^2 - g^2)(a^2f_1^2 - g_1^2) = 0$$

übergeht. Es ist daher $a^2 = \frac{g^2}{f^2}$ oder $a^2 = \frac{g_1^2}{f_1^2}$, von welchen Werthen aus naheliegenden Gründen jedoch nur der erste zu nehmen ist.

§. 18.

Wir schliefsen diesen Theil mit einer Stelle aus einer Arbeit von *Jacobi*, Bd. 8, p. 416 und 417 dieses Journals, die wir der Vollständigkeit halber, mit ganz unwesentlichen Veränderungen hinzufügen.

Die elliptischen Integrale mit reellen Grenzen, welche kleiner als 1 sind, auf die wir im allgemeinen Falle J zurückgeführt haben, enthalten einen imaginären Modulus $\varkappa$. *Jacobi* hat die Substitution angegeben, durch welche ein solches Integral sich in die Form $M+Ni$ zerlegen läfst, wenn M und N reelle *Abel*sche Integrale bezeichnen. Nach dem Obigen ist J auf eine Summe oder Differenz von Integralen

$$L = \int_0^\eta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\varkappa^2x^2}}$$

zurückgeführt, wo η, $\sqrt{1-x^2}$ und der reelle Theil von $\sqrt{1-\varkappa^2x^2}$ so wie von $\varkappa$ positiv sind. Setzt man

$$(14.) \qquad \lambda = \left(\frac{\varkappa+\gamma}{\varkappa_1+\gamma_1}\right)^2$$

$$(15.) \qquad \mu = -\left(\frac{\varkappa-\gamma}{\varkappa_1+\gamma_1}\right)^2,$$

so dafs sowohl λ als μ positiv sind, ferner $\varkappa = e+fi$, so ist $\mu < 1$. Wendet man nämlich die Substitution des §. 4. an, macht also

$$1 = \varrho \sin\theta$$

$$f = \sqrt{\varrho^2-e^2}\cos\theta,$$

so wird

$$\varkappa = e+i\cos\theta\sqrt{\varrho^2-e^2}$$

$$\varkappa_1 = \sqrt{\varrho^2-e^2}-ie\cos\theta,$$

also

$$\lambda = \frac{e^2}{\varrho^2-e^2} \qquad \mu = \cos^2\theta$$

d. h. $\mu < 1$. Führt man durch die Substition

$$x = \sqrt{\frac{(1+\lambda)(1-\mu)z}{(1+\lambda z)(1-\mu z)}}$$

statt x die Gröfse z ein, indem man die Wurzel positiv nimmt, so wird z reell und <1 sein. Man findet nämlich für z die Gleichung

$$\lambda\mu z^2 - z\left(\lambda-\mu-\frac{(1+\lambda)(1-\mu)}{x^2}\right)-1 = 0;$$

für $z = 0$ und $z = 1$ ist aber die linke Seite resp. -1 und positiv, weil sie selbst im schlimmsten Falle, d. h. für $x = 1$ nicht negativ wird. Ein Werth von z ist also positiv und kleiner als 1; es mag für $x = \eta$ der Werth von z gleich ζ sein.

Es wird nun

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\frac{(1-z)(1+\lambda\mu z)}{(1+\lambda z)(1-\mu z)}}$$

$$\sqrt{1-z^2x^2} = \frac{1 \mp iz\sqrt{\lambda\mu}}{\sqrt{(1+\lambda z)(1-\mu z)}},$$

wo die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem f, der imaginäre Theil von z, positiv oder negativ ist. Ferner ist

$$dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\lambda}\,\sqrt{1-\mu}\,\frac{(1-\lambda\mu z)\,dz}{\sqrt{z}\,(1+\lambda z)^{\frac{3}{2}}(1-\mu z)^{\frac{3}{2}}}$$

also

$$L = M \pm Ni,$$

wenn

$$M = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\lambda}\,\sqrt{1-\mu}\int_0^{\zeta} \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}\sqrt{1+\lambda z}\sqrt{1-\mu z}\sqrt{1+\lambda\mu z}}$$

$$N = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\lambda}\,\sqrt{1-\mu}\,\sqrt{\lambda\mu}\int_0^{\zeta} \frac{\sqrt{z}.dz}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+\lambda z}\sqrt{1-\mu z}\sqrt{1+\lambda\mu z}}$$

gesetzt wird.

II. Abtheilung.

§. 19.

Nach den Untersuchungen im ersten Theile ist es leicht, das Integral

$$H = \int_g^h \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}}$$

in die Summe eines reellen und imaginären Theiles zu zerlegen. Es bezeichnen hier a, b, α, β reelle oder imaginäre Constante; unter g und h sollen reelle Grenzen verstanden werden, zwischen denen x sich reell bewegt. Würde x auf gegebne Art zwischen irgend welchen Grenzen sich bewegen, ohne dafs es fortwährend reell zu sein brauchte, so würde unsere Methode sich unmittelbar auf diesen Fall übertragen lassen. Wir denken uns, dafs die Quadratwurzeln sich continuirlich ändern, und dafs die Zeichen derselben für eine Anzahl von Werthen von x gegeben sind, die hinreichend ist, um sie für

jedes x zu bestimmen. Verschwindet z. B. keine Wurzel, so genügt die Angabe der Zeichen für *ein* x. (M. vergl. §. 3.)

Man setze nun

$$\varkappa = \sqrt{\frac{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}{(a-\alpha)^2+(b+\beta)^2}}$$

indem man unter b und β solche Wurzeln aus b^2 und β^2 versteht, welche den Modulus von $\varkappa$ kleiner als 1 machen, und die Wurzel so nimmt, dafs ihr reeller Theil positiv ist. Ferner setze man

$$M = \sqrt{(a-\alpha)^2+(b+\beta)^2},$$

das Zeichen der Wurzel beliebig genommen, und führe durch die Gleichung

$$\frac{1-\varkappa z}{1+\varkappa z} = \frac{b}{\beta}\,\frac{(x-\alpha)^2+\beta^2}{(x-a)^2+b^2}$$

oder, was dasselbe ist, durch

$$\varkappa z = \frac{\beta((x-a)^2+b^2)-b((x-\alpha)^2+\beta^2)}{\beta((x-a)^2+b^2)+b((x-\alpha)^2+\beta^2)}$$

eine neue Veränderliche z ein. Hierdurch ist z, ebenso $1-z^2$ und $1-\varkappa^2z^2$ bestimmt; unter den Wurzeln aus den letzten Gröfsen sollen folgende Ausdrücke mit bekanntem Zeichen verstanden werden:

$$\sqrt{1-z^2} = \frac{2\sqrt{b\beta}}{\varkappa M}\,\frac{((x-\alpha)^2+\beta^2)(x-a)-((x-a)^2+b^2)(x-\alpha)}{\beta((x-a)^2+b^2)+b((x-\alpha)^2+\beta^2)}$$

$$\sqrt{1-\varkappa^2z^2} = \frac{2\sqrt{b\beta}\,\sqrt{(x-a)^2+b^2}\,\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}}{\beta((x-a)^2+b^2)+b((x-\alpha)^2+\beta^2)},$$

wenn $\sqrt{b\beta}$ eine willkürliche, aber feste Quadratwurzel aus $b\beta$ ist, und die übrigen Quadratwurzeln die früher bestimmten Zeichen haben. Dann wird

$$H = \frac{1}{M}\int_g^h \frac{z'dx}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1-\varkappa^2z^2}} = \frac{1}{M}\cdot J.$$

Sollte $\varkappa$ eine rein imaginäre Gröfse geworden sein, so kann man durch die Substitution

$$y = \sqrt{1-z^2}$$

J auf ein ähnliches Integral mit einem neuen Modulus $\varkappa$ zurückführen, der reell und <1 ist; natürlich ist es nicht nöthig, zweimal zu substituiren; man kann gleich für x die Gröfse y einführen. J zerlegt man nun nach den Regeln des ersten Abschnittes.

§. 20.

So lange a, b, α, β, allgemein bleiben, gelang es uns nicht, in den Endformeln wesentliche Vereinfachungen vorzunehmen; die Berechnung aller hierher gehörigen Werthe bietet offenbar keine anderen Schwierigkeiten dar, als die Länge der Rechnung. Ein besonderer Fall, auf den ich bei der Lösung einer Aufgabe aus der Theorie der Anziehung geführt wurde, läfst eine wesentliche Vereinfachung zu, und soll hier als Beispiel behandelt werden; es ist dies der Fall

$$(16.) \qquad H = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x-mi)^2-n^2}\sqrt{(x-\mu i)^2-\nu^2}},$$

wenn m, n, μ, ν reelle, n und ν positive Gröfsen bezeichnen. Die Wurzeln sollen sich continuirlich ändern, und so beschaffen sein, dafs ihr reeller Theil, wo ein solcher zuerst auftritt, positiv ist, woraus zugleich folgt, dafs der reelle Theil für jedes x aufser 0 positiv bleibt.

In Folge des §. 19. setzen wir

$$\mathfrak{M} = \sqrt{(m-\mu)^2+(n+\nu)^2},$$

die Wurzel positiv genommen, und $M = i\mathfrak{M}$, ferner die positive, reelle Gröfse $\varkappa$

$$(17.) \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{(m-\mu)^2+(n-\nu)^2}{(m-\mu)^2+(n+\nu)^2}},$$

dann

$$(18.) \qquad \varkappa z = \frac{\nu((x-mi)^2-n^2)-n((x-\mu i)^2-\nu^2)}{\nu((x-mi)^2-n^2)+n((x-\mu i)^2-\nu^2)}$$

$$(19.) \qquad \sqrt{1-z^2} = \frac{2i\sqrt{n\nu}}{\varkappa\mathfrak{M}} \frac{((x-mi)^2-n^2)(x-\mu i)-((x-\mu i)^2-\nu^2)(x-mi)}{\nu((x-mi)^2-n^2)+n((x-\mu i)^2-\nu^2)}$$

$$(20.) \qquad \sqrt{1-\varkappa^2 z^2} = 2\sqrt{n\nu}\,\frac{\sqrt{(x-mi)^2-n^2}\sqrt{(x-\mu i)^2-\nu^2}}{\nu((x-mi)^2-n^2)+n((x-\mu i)^2-\nu^2)}$$

wo die $\sqrt{n\nu}$ positiv genommen wird. Wir fügen noch die zwei Formeln

$$(21.) \qquad \frac{1-\varkappa z}{1+\varkappa z} = \frac{n}{\nu}\,\frac{(x-\mu i)^2-\nu^2}{(x-mi)^2-n^2}$$

und

$$(22.) \qquad \varkappa z' = -4n\nu\,\frac{((x-mi)^2-n^2)(x-\mu i)-((x-\mu i)^2-\nu^2)(x-mi)}{\nu((x-mi)^2-n^2)+n((x-\mu i)^2-\nu^2)}$$

hinzu. Es wird dann endlich

$$(23.) \qquad H = -\frac{i}{\mathfrak{M}}\cdot\int_0^1 \frac{z'\,dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}} = -\frac{i}{\mathfrak{M}}J.$$

§. 21.

Um J zu zerlegen, führe man nach §. 4. Polarcoordinaten ϱ, σ, η, θ durch die Gleichungen

$$m = \sqrt{\varrho^2-1}\cos\eta \qquad \mu = \sqrt{\sigma^2-1}\cos\theta$$
$$n = \varrho\sin\eta \qquad \nu = \sigma\sin\theta$$

ein; der Kürze halber sollen jedoch neben ϱ, σ, etc. auch m, n, etc. in den Formeln gebraucht werden. Ferner sollen ε und ζ gleich $+1$ oder -1 sein, je nachdem resp. m oder μ positiv oder negativ sind. Dann wird

$$\sqrt{(1-im)^2-n^2} = \varepsilon(\cos\eta - i\sqrt{\varrho^2-1})$$
$$\sqrt{(1-i\mu)^2-\nu^2} = \zeta(\cos\theta - i\sqrt{\sigma^2-1}).$$

Die ziemlich mühsame Berechnung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ soll hier nicht ausgeführt werden (§. 9.); wir drückten zunächst $\frac{\mathfrak{B}^2}{1-\mathfrak{B}^2}$ durch die bekannten Gröfsen nach §. 6. aus, und führten in dem Zähler erst an einer gewissen Stelle, nachdem ein Factor desselben sich gehoben hatte, die Polarcoordinaten ein. Ist $\mathfrak{B}$ gefunden, so ergiebt sich $\mathfrak{A}$ ohne Wiederholung der Rechnung indem $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-x_1^2\mathfrak{B}^2}}$ gleich dem Werthe von

$$\frac{1}{x}\,\frac{\sqrt{1+xz}\sqrt{1+x\zeta}-\sqrt{1-xz}\sqrt{1-x\zeta}}{\sqrt{1+xz}\sqrt{1+x\zeta}+\sqrt{1-xz}\sqrt{1-x\zeta}}$$

für $x=1$ ist. So findet man

$$(24.) \qquad x\mathfrak{A} = v.n.\left(\frac{\varrho\sin\theta-\sigma\sin\eta}{\varrho\sin\theta+\sigma\sin\eta}\right)$$

$$(25.) \qquad \mathfrak{B} = \frac{\sqrt{(m-\mu)^2+(n+\nu)^2}}{\varrho\sigma+\sin\theta\sin\eta}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{1-\mathfrak{B}^2}} = \frac{\sqrt{(m-\mu)^2+(n+\nu)^2}}{\sqrt{\varrho^2-1}\sqrt{\sigma^2-1}+\cos\theta\cos\eta}.$$

Endlich ist

$$(26.) \qquad x\alpha_0 = v.n.\left(\frac{\nu(m^2+n^2)-n(\mu^2+\nu^2)}{\nu(m^2+n^2)+n(\mu^2+\nu^2)}\right); \qquad \beta_0 = 0.$$

Die Buchstaben $v.n.$ bedeuten hier, dafs der Zahlwerth des betreffenden Ausdrucks genommen werden soll.

§. 22.

Um die Anfangszeichen $[A_0]$ und $[B_0]$ zu finden, setzen wir in die betreffenden Formeln des §. 8. den Werth $z = 0$. Für $[A_0]$ hat diese Rechnung keine Schwierigkeit, während die Untersuchung für $[B_0]$ die Kenntnifs des Anfangszeichens von $\frac{z-\zeta}{i}$ erfordert, das man jedoch leicht mit Benutzung der Formel (22.) für z' erkennt. Setzt man zur Abkürzung

$$R = \mu(m^2+n^2) - m(\mu^2+\nu^2)$$
$$S = \nu(m^2+n^2) - n(\mu^2+\nu^2),$$

so wird

$$[A_0] = \varepsilon\zeta[RS]$$
$$[B_0] = -\varepsilon\zeta.$$

§. 23.

Es sind endlich die Stellen aufzusuchen, an denen z ***reell*** oder ***rein imaginär*** wird, um zu erfahren, wo A oder B sein Zeichen ändert.

Es ist z mit $\frac{1-xz}{1+xz}$ also nach (21.) mit

$$\frac{(x-\mu i)^2-\nu^2}{(x-mi)^2-n^2}$$

zugleich reell. Setzt man den letzten Ausdruck $= v$, so findet man zwei Gleichungen, die stattfinden müssen, wenn v reell sein soll, von denen die eine den Werth von v, die andere den entsprechenden von x liefert, nämlich

$$x^2 = \frac{R}{\mu-m}.$$

Ist also $\frac{R}{\mu-m}$ positiv und <1, so wird, während x von 0 bis 1 wächst, z für einen und nur einen Werth von x reell sein. Man weifs aus §. 8, dafs es nothwendig ist zu untersuchen, ob dieses reelle z zwischen 0 und 1, zwischen 1 und $\frac{1}{x}$ oder über $\frac{1}{x}$ hinaus liegt. Man findet aber für dasselbe die Gleichung

$$xz = \frac{m\nu-\mu n}{m\nu+\mu n},$$

so dafs

$$1-x^2z^2 = \frac{4mn\mu\nu}{(m\nu+\mu n)^2}$$

also positiv wird, wenn $\varepsilon = \zeta$, sonst negativ; d. h. es ist $z > \frac{1}{x}$ wenn $\varepsilon = -\zeta$. Man wird unten sehen, dafs für $\varepsilon = -\zeta$ immer $\frac{R}{\mu - m}$ gröfser als 1 ist, so dafs niemals $z > \frac{1}{x}$ werden kann. Ist $\varepsilon = \zeta$, so wird jedenfalls $z > 1$, weil nach (19.)

$$\sqrt{1 - z^2} = \frac{2i\sqrt{n\nu}\, x(m-\mu)}{x\mathfrak{M}(m\nu + n\mu)}$$

also imaginär ist.

Soll zweitens z rein imaginär sein, so mufs die rechte Seite von (21.) durch Vertauschung von i mit $-i$ in $\frac{1+xz}{1-xz}$ übergehen, woraus sich der betreffende Werth von x, nämlich

$$x^2 = \frac{S}{n-\nu}$$

berechnen läfst. Denkt man sich $n > \nu$, so wird also x reell, wenn S positiv ist, und z wird innerhalb der Integrationsgrenzen rein imaginär, wenn aufserdem $\frac{S}{n-\nu} < 1$.

§. 24.

Über die Zeichen und Werthe der hier vorkommenden Gröfsen kann man noch Folgendes bemerken:

1. Da $n > \nu$ sein sollte, so ist $\left[\frac{S}{n-\nu}\right] = [S]$.

2. Ist $\varepsilon = -\zeta$, so ist $\left[\frac{R}{\mu - m}\right] = +1$; $[R] = \zeta$.

3. Führt man die Polarcoordinaten ein, so ist

$$\frac{R}{\mu - m} = 1 + \frac{\sqrt{\sigma^2-1}\cos\eta - \sqrt{\varrho^2-1}\cos\theta}{\sqrt{\varrho^2-1}\cos\eta - \sqrt{\sigma^2-1}\cos\theta}\left(\sqrt{\varrho^2-1}\sqrt{\sigma^2-1} + \cos\eta\cos\theta\right)$$

also sicher gröfser als 1, wenn $\varepsilon = -\zeta$ ist.

4. Ebenso findet man

$$\frac{S}{n-\nu} = 1 + \frac{\varrho\sin\theta - \sigma\sin\eta}{\varrho\sin\eta - \sigma\sin\theta}(\varrho\sigma - \sin\theta\sin\eta);$$

wird der Ausdruck, dessen Zahlwerth $\mathfrak{A}$ ist, positiv, so ist also sicher zugleich $\frac{S}{n-\nu} > 1$ und positiv; soll $\frac{S}{n-\nu} < 1$ sein, so ist jene Gröfse negativ.

5. Jene Gröfse, deren Zahlwerth α_0 ist, hat das Zeichen von S.

§. 25.

Man kann nun $J = u + iv$ setzen, und findet nach (8.) folgende Ausdrücke für u und v, die sich übrigens durch die Bemerkungen des vorigen Paragraphen noch etwas vereinfachen lassen:

$$v = -\varepsilon\zeta\int_0^{\mathfrak{B}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\varkappa_1^2\beta^2}}.$$

Zweitens geht u, je nach den verschiedenen unten aufgezeichneten Fällen, in nachstehende Ausdrücke über, in denen die Function unter dem Integralzeichen immer

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\varkappa^2\alpha^2}}$$

ist.

1. Es sei $\frac{S}{n-\nu}$ nicht zugleich positiv und <1; $\frac{R}{\mu-m}$ ebenso, so wird

$$u = \varepsilon\zeta[RS]\int_{\alpha_0}^{\mathfrak{A}}.$$

2. $\frac{S}{n-\nu}$ positiv und <1; $\frac{R}{\mu-m}$ wie ad 1.

$$u = \varepsilon\zeta[RS]\left(\int_{\alpha_0}^{0} - \int_0^{\mathfrak{A}}\right).$$

3. $\frac{S}{n-\nu}$ wie ad 1; $\frac{R}{\mu-m}$ positiv und <1, (also auch $\varepsilon = \zeta$)

$$u = \varepsilon\zeta[RS]\left(\int_{\alpha_0}^{1} - \int_1^{\mathfrak{A}}\right).$$

4. $\frac{S}{n-\nu}$ sowohl wie $\frac{R}{\mu-m}$ positiv und <1, (also auch $\varepsilon = \zeta$)

α. $\frac{S}{n-\nu}$ ist kleiner als $\frac{R}{\mu-m}$

$$u = \varepsilon\zeta[RS]\left(\int_{\alpha_0}^{0} - \int_0^{1} + \int_1^{\mathfrak{A}}\right).$$

β. $\frac{S}{n-\nu}$ ist gröfser als $\frac{R}{\mu-m}$

$$u = \varepsilon\zeta[RS]\left(\int_{\alpha_0}^{1} - \int_1^{0} + \int_0^{\mathfrak{A}}\right).$$

Es ist endlich

$$H = \frac{v}{\mathfrak{M}} - \frac{iu}{\mathfrak{M}}.$$

§. 26.

Im Monatsberichte der Berliner Akademie 1854 S. 570 war die Aufgabe zu lösen,

$$H_1 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{NP\sqrt{1-\frac{n^2}{N^2}}\sqrt{1-\frac{\nu^2}{P^2}}}$$

in die kanonische Form der elliptischen Integrale zu bringen, wenn

$$N = (x - im)$$
$$P = (x - i\mu)$$

ist, und die Quadratwurzeln so genommen werden, dafs ihr reeller Theil positiv bleibt. Zunächst ist klar, dafs dies Integral gleich dem doppelten reellen Theile des Integrales ist, welches sich von H_1 nur dadurch unterscheidet, dafs seine Grenzen 0 und 1 sind. Um dieses auf die Form von H in §. 20. zu bringen, hat man zu untersuchen, ob

$$N\sqrt{1-\frac{n^2}{N^2}} = \pm\sqrt{N^2-n^2},$$

wenn hier wie in dem ganzen Paragraphen die Wurzelzeichen so zu verstehen sind, dafs der reelle Theil positiv ist. Macht man für diese Untersuchung

$$m = \sqrt{\varrho^2 - x^2}\cos\eta$$
$$n = \varrho\sin\eta$$

(wo also ϱ und η für jedes x andere werden), und setzt $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem m positiv oder negativ ist, so wird

$$\sqrt{N^2-n^2} = \varepsilon(x\cos\eta - i\sqrt{\varrho^2-x^2}).$$

Ferner ist

$$\frac{1}{x-mi} = \frac{x+i\sqrt{\varrho^2-x^2}\cos\eta}{x^2\sin^2\eta+\varrho^2}$$

also der reelle Theil von $\frac{\sqrt{N^2-n^2}}{x-mi}$ gleich

$$\frac{\varepsilon\varrho^2\cos\eta}{x^2\sin^2\eta+\varrho^2}$$

also positiv, folglich $\frac{\sqrt{N^2-n^2}}{x-mi} = \sqrt{1-\frac{n^2}{N^2}}$. Es wird daher H_1 gleich dem doppelten reellen Theile von H, also

$$H_1 = -\frac{2\varepsilon\zeta}{\mathfrak{M}}\int_0^{\mathfrak{B}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\varkappa^2\beta^2}}$$

wenn ε, ζ, $\mathfrak{M}$, $\varkappa$ dieselben Gröfsen wie im §. 21 sind; d. h. es ist

$$m = \sqrt{\varrho^2 - 1}\cos\eta \qquad \mu = \sqrt{\sigma^2 - 1}\cos\theta$$
$$n = \varrho\sin\eta \qquad \nu = \sigma\sin\theta$$
$$\varepsilon.m = v.n.(m) \qquad \zeta.\mu = v.n.(\mu)$$
$$\mathfrak{M} = \sqrt{(m-\mu)^2 + (n+\nu)^2}$$
$$\varkappa = \frac{\sqrt{(m-\mu)^2 + (n-\nu)^2}}{\mathfrak{M}}$$
$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho\sigma + \sin\theta\sin\eta}.$$

§. 27.

In den allgemeinen Ausdrücken des §. 19. kommen Quadratwurzeln aus Gröfsen wie $(x-a)^2 + b^2$ vor, wo a und b selbst imaginär sind, während x eine reelle Gröfse bezeichnet. Durch eine Transformationsformel, welche den im Vorhergehenden angewandten ähnlich ist, kann man auch solche Quadratwurzeln darstellen. Denkt man sich nämlich a und b in die Form

$$a = e + fi$$
$$b = g + hi$$

zerlegt, so setze man

$$e = \varrho\sigma\cos\varphi\cos\psi + \sqrt{\varrho^2 - x^2}\sqrt{\sigma^2 - 1}\sin\varphi\sin\psi$$
$$f = \sigma\sqrt{\varrho^2 - x^2}\sin\psi\cos\varphi - \varrho\sqrt{\sigma^2 - 1}\sin\varphi\cos\psi$$
$$g = \sigma\sqrt{\varrho^2 - x^2}\sin\varphi\cos\psi - \varrho\sqrt{\sigma^2 - 1}\sin\psi\cos\varphi$$
$$h = \varrho\sigma\sin\varphi\sin\psi + \sqrt{\varrho^2 - x^2}\sqrt{\sigma^2 - 1}\cos\varphi\cos\psi$$

und findet dann

$$\sqrt{(x-a)^2 + b^2} = \pm\{\varrho\cos\psi - \sigma x\cos\varphi + i(\sqrt{\varrho^2 - x^2}\sin\psi + x\sqrt{\sigma^2 - 1}\sin\varphi)\}.$$

Nimmt man ϱ, σ, $\sqrt{\varrho^2 - x^2}$, $\sqrt{\sigma^2 - 1}$ positiv, $\varrho > x$, $\sigma > 1$, so sind alle Gröfsen bestimmt. Man hat nämlich:

$$e + h = (\varrho\sigma + \sqrt{\varrho^2 - x^2}\sqrt{\sigma^2 - 1})\cos(\psi - \varphi)$$
$$e - h = (\varrho\sigma - \sqrt{\varrho^2 - x^2}\sqrt{\sigma^2 - 1})\cos(\psi + \varphi)$$
$$f + g = (\sigma\sqrt{\varrho^2 - x^2} - \varrho\sqrt{\sigma^2 - 1})\sin(\psi + \varphi)$$
$$f - g = (\sigma\sqrt{\varrho^2 - x^2} + \varrho\sqrt{\sigma^2 - 1})\sin(\psi - \varphi),$$

woraus z. B. für $\cos(\psi-\varphi)$ und $\cos(\psi+\varphi)$ die Bestimmung

$$\frac{(e+h)^2}{\cos^2(\psi-\varphi)} - \frac{(f-g)^2}{\sin^2(\psi-\varphi)} = x^2$$

$$\frac{(e-h)^2}{\cos^2(\psi+\varphi)} - \frac{(f+g)^2}{\sin^2(\psi+\varphi)} = x^2$$

folgt, so dafs sich $x\cos(\psi-\varphi)$ und $x\cos(\psi+\varphi)$ geometrisch als Achsen von Hyperbeln ergeben. Ihre Zeichen findet man aus den vorstehenden Beziehungen zu $e\pm h$ etc., indem $\varrho\sigma+\sqrt{\varrho^2-x^2}\sqrt{\sigma^2-1}$, $\sigma\sqrt{\varrho^2-x^2}+\varrho\sqrt{\sigma^2-1}$ positiv zu nehmen sind. Auf ähnliche Weise sind ϱ und σ Achsen von Ellipsen.

Bonn, im December 1855.

13.

Über eine besondere Curve dritter Klasse (und vierten Grades).

(Von Herrn *J. Steiner*.)

(Vorgetragen in der physikalisch-mathematischen Klasse der Akademie zu Berlin am 7. Januar 1856.)

Die Curve tritt schon beim geradlinigen Dreieck ein. ***Fället man aus jedem Punkte in der dem Dreieck umschriebenen Kreislinie auf die Seiten Perpendikel, so liegen die je drei Fufspunkte allemal in irgend einer Geraden G, und die Enveloppe aller dieser Geraden ist eine Curve dritter Klasse, G^3, und vierten Grades, welche die im Unendlichen liegende Gerade, G_∞, zur ideellen Doppeltangente hat; ferner hat sie drei Rückkehrpunkte und die drei Rückkehrtangenten schneiden sich in einem und demselben Punkt.*** Die Curve berührt namentlich auch die Seiten des Dreiecks, so wie dessen drei Höhen, d. h. die aus den Ecken auf die Gegenseiten gefällten Lothe.

Sei *abc* das gegebene Dreieck; δ der Mittelpunkt des ihm umschriebenen Kreises δ^2; ferner $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$ seine drei Höhen und d der gemeinsame Schnittpunkt derselben; seien ferner α, β, γ die Mitten der Seiten und m der Mittelpunkt des durch diese Mitten und zugleich auch durch die Fufspunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Höhen gehenden Kreises m^2; endlich sei r der Radius dieses Kreises, derselbe ist halb so grofs als der Radius des Kreises δ^2. Da der Punkt m in der Mitte zwischen δ und d liegt, so ist d der äufsere Ähnlichkeitspunkt beider Kreise. ***Wird von den über den Seiten des Dreiecks liegenden Bogen des Kreises m^2, $\alpha\mathfrak{a}$, $\beta\mathfrak{b}$, $\gamma\mathfrak{c}$, von den Mitten der Seiten aus, mittels der Punkte u, v, w, je ein Drittel abgeschnitten, so dafs Bogen $\alpha u = \frac{1}{3}\alpha\mathfrak{a}$, $\beta v = \frac{1}{3}\beta\mathfrak{b}$, $\gamma w = \frac{1}{3}\gamma\mathfrak{c}$, so theilen diese Punkte die ganze Kreislinie in drei gleiche Theile, so dafs sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks uvw sind.***

Ist p ein beliebiger Punkt in der Kreislinie δ^2 und G die ihm zugehörige Fufspunkten-Linie, ***so hat der aus dem Höhenschnitt d nach p gezogene Strahl dp seine Mitte, etwa μ, allemal in G und zugleich auch im Kreise m^2***; dieser Kreis werde von G zum zweiten Mal in s geschnitten;

der Punkt μ wird ***Mittelpunkt*** und s ***Scheitel*** der Fufspunkten-Linie G genannt. Im Kreise δ^2 sei p_1 der Gegenpunkt von p, ***so steht dessen Fufspunkten-Linie G_1 jedesmal auf G senkrecht,*** und zwar haben beide den Scheitel s gemein und ihre Mittelpunkte μ und μ_1 sind gleicherweise Gegenpunkte im Kreise m^2, und die Durchmesser pp_1 und $\mu\mu_1$ sind parallel. ***Demnach sind die Fufspunkten-Linien, oder die Tangenten der Curve G^3, paarweise zu einander rechtwinklig, auf jeder steht eine — aber nur eine einzige — bestimmte andere rechtwinklig, und der Ort der Scheitel s aller dieser rechten Winkel ist die Kreislinie m^2.*** Diese Eigenschaft hat also die Curve mit den Kegelschnitten gemein. Solche rechtwinklige Tangenten-Paare sind namentlich auch die Seiten und zugehörigen Höhen des gegebenen Dreiecks. Jede zwei zu einander rechtwinklige Fufspunkten-Linien heifsen schlechthin ein ***Paar***.

Jede Fufspunkten-Linie G_2 $(= G)$ wird von jedem Paar in zwei solchen Punkten geschnitten, welche gleich weit von ihrem Mittelpunkte μ_2 abstehen, eine Folge davon ist: dafs G_2 von der Curve G^3 in demjenigen Punkte t_2 berührt wird, welcher von ihrem Mittelpunkt eben so weit absteht, als ihr Scheitel s_2, also $\mu_2 t_2 = \mu_2 s_2$. Es folgen ferner nachstehende interessante Eigenschaften. ***Die Gerade, welche durch die Berührungspunkte t, t_1 irgend eines Paars GG_1 geht, ist stets auch eine Fufspunkten-Linie G_2, und diejenige, die mit ihr ein Paar bildet, geht jedesmal durch den Scheitel jenes Paars; zudem hat die Berührungs-Sehne tt_1 constante Länge, nämlich sie ist dem vierfachen Radius des Kreises m^2 gleich, $tt_1 = 4r$.*** Oder umgekehrt: ***die Curve G^3 schneidet jede ihrer Tangenten G_2 in zwei solchen Punkten t und t_1, deren Abstand von einander constant, und zwar dem Durchmesser des Kreises δ^2, oder dem doppelten Durchmesser des Kreises m^2 gleich ist; und die Tangenten in solchen zwei Schnittpunkten sind je ein Paar GG_1. Die in den Schnitten t, t_1 und in dem Berührungspunkte t_2 jeder Tangente G_2 auf die Curve G^3 errichteten drei Normalen treffen sich allemal in irgend einem Punkte q und der Ort dieses Punktes ist ein Kreis $[m]^2$, der mit dem Kreise m^2 concentrisch ist, und einen dreimal so grofsen Radius hat, als dieser. Die Curve G^3 berührt den Kreis m^2 in den oben genannten drei Punkten u, v, w und hat dieselben zu Scheiteln. In diesen Punkten bilden die zugehörigen Tangenten, etwa U, V, W, und die Kreisdurchmesser U_1, V_1, W_1 mit einander Paare; jene sind***

die einzigen drei Fufspunkten-Linien, bei welchen der Scheitel (s), *Mittelpunkt* (μ) *und Berührungspunkt* (t) *vereint sind, die anderen haben die Punkte* u, v, w *zu Scheiteln, deren Gegenpunkte* u_1, v_1, w_1 *(im Kreise* m^2*) zu Mittelpunkten, und um die Länge des Durchmessers über diese hinaus ihre Berührungspunkte* u_2, v_2, w_2. *Diese letztern Punkte sind die drei Rückkehrpunkte der Curve* G^3 *und* U_1, V_1, W_1 *sind die Rückkehrtangenten, die also alle drei durch den Mittelpunkt* m *des Kreises gehen, gleich lang sind, nämlich* $mu_2 = mv_2 = mw_2 = 3r$, *und mit einander gleiche Winkel* $(= 120^0)$ *bilden, so dafs die drei Rückkehrpunkte* u_2, v_2, w_2 *im oben genannten Kreise* $[m]^2$ *liegen und die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind, das* m *zum Schwerpunkt hat; auch sind die drei Rückkehrtangenten zugleich Normalen der Curve in ihren Scheiteln* u, v, w *und es ist* $uu_2 = vv_2 = ww_2 = 4r$. Der reelle Theil der Curve G^3 besteht nur aus einem regelmäfsigen Curvendreieck $u_2v_2w_2$, das innerhalb des geradlinigen Dreiecks $u_2v_2w_2$ liegt, aber den Kreis m^2 umschliefst; seine drei gleichen Seiten u_2wv_2, v_2uw_2, w_2vu_2 sind nach Innen convex und *berühren den Kreis mit ihren Mitten (Scheiteln)* u, v, w; *die Länge jeder Seite ist* $= 5\frac{1}{3}r$, *somit der ganze Umfang* $= 16r$; *der Inhalt des Curvendreiecks ist* $= 2\pi r^2$, *also gerade zweimal so grofs, als die Kreisfläche* m^2, *so dafs jeder der drei gleichen, zwischen dem Kreise und der Curve liegenden Arbelen,* $= \frac{1}{3}\pi r^2$ *ist. Jede Tangente der Curve* G^3 *berührt je einen ihrer drei Zweige und schneidet die beiden andern; ein Paar* GG_1, *d. h. die Schenkel eines ihr umschriebenen rechten Winkels berühren immer verschiedene Zweige.*

Sind GG_1 und HH_1 irgend zwei Paare, wird G von H und H_1 beziehlich in a_1, d_1 und G_1 von denselben in b_1, c_1 geschnitten, so sind die Geraden a_1c_1, b_1d_1 allemal ein drittes Paar, etwa JJ_1, d. h. sie sind auch zu einander rechtwinklige Fufspunkten-Linien oder Tangenten der Curve G^3. Ein eben solches Trippel von drei Paaren GG_1, HH_1, JJ_1 mit einem Quadrupel von vier Schnittpunkten a, b, c, d bilden auch die Seiten und zugehörigen Höhen des gegebenen Dreiecks; beiderseits hat man ein vollständiges Viereck ($a_1b_1c_1d_1$ oder $abcd$), dessen drei Paar Gegenseiten zu einander senkrecht sind, oder vier solche Punkte, von denen jeder der Höhenschnitt des durch die drei übrigen bestimmten Dreiecks ist. *Bei allen diesen Vierecken ist die Summe der Quadrate der Gegenseiten constant, und zwar* $= 16r^2$; *also* $ad^2 + bc^2 = ac^2 + bd^2 = ab^2 + cd^2 = 16r^2$. *Alle Quadrupel* $abcd$,

deren vier Punkte sämmtlich reell sind, liegen innerhalb des Curvendreiecks G^3*;* und umgekehrt, *durch jeden innerhalb dieses Dreiecks liegenden Punkt d ist ein reelles Quadrupel bestimmt,* denn es gehen immer drei reelle Tangenten G_1, H_1, I_1 durch denselben, und die zu diesen senkrechten Tangenten G, H, I, sind ihre Gegenseiten in einem vollständigen Viereck $abcd$. *Liegt hingegen der gegebene Punkt d ausserhalb des Curvendreiecks* G^3, *so geht nur eine reelle Tangente, etwa G, durch ihn, und alsdann ist von den andern drei Punkten nur einer, etwa a, reell, der gleichfalls in G und auf der andern Seite aufserhalb der Curve liegt; die conjugirte Tangente* G_1 *ist auch reell und enthält die zwei imaginären Punkte b und c; die beiden andern Paare* HH_1 *und* II_1 *sind imaginär. Die den vier Dreiecken abc, abd, acd, bcd umschriebenen Kreise, deren Mittelpunkte beziehlich* δ, γ, β, α *heifsen sollen, sind gleich, und bei allen Quadrupeln von gleicher Gröfse, nämlich der Radius eines jeden ist dem Durchmesser des Kreises* m^2 *gleich, also* $= 2r$. *Das Viereck* $\alpha\beta\gamma\delta$ *ist dem Viereck abcd gleich und liegt so, dafs die vier Geraden* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ *alle durch den Mittelpunkt m gehen und durch ihn gehälftet werden; daher haben umgekehrt die den vier Dreiecken* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$, $\alpha\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta$ *umschriebenen Kreise ihre Mittelpunkte in d, c, b, a, und ihre Radien sind ebenfalls* $= 2r$*; und ferner sind die Gegenseiten* $\alpha\delta$ *und* $\beta\gamma$, $a\gamma$ *und* $\beta\delta$, $\alpha\beta$ *und* $\gamma\delta$ *zu einander rechtwinklig, oder bilden drei Paare* $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1$, *deren Scheitel im nämlichen Kreise* m^2 *liegen, und deren Enveloppe eine der vorigen,* G^3, *gleiche Curve* $\mathfrak{G}^3$ *ist, aber um den Mittelpunkt m um* 180^0 *herumbewegt, so dafs sie den Kreis in den oben erwähnten Punkten* u_1, v_1, w_1 *berührt. Alle reellen Quadrupel* $\alpha\beta\gamma\delta$ *liegen innerhalb des Curvendreiecks* $\mathfrak{G}^3$. *Enthält das Quadrupel abcd zwei imaginäre Punkte b und c, so sind die den Dreiecken adc und adb umschriebenen Kreise* β^2 *und* γ^2, *so wie ihre Mittelpunkte* β *und* γ *imaginär, wogegen die den Dreiecken abc und bcd umschriebenen Kreise* δ^2 *und* α^2 *sammt ihren Mittelpunkten* δ *und* α *reell bleiben, diese letztern jedoch jetzt aufserhalb des Curvendreiecks* $\mathfrak{G}^3$ *liegen.*

Durch jedes Quadrupel $abcd$ geht ein Büschel gleichseitige Hyperbeln, $B(H^2)$; *die verschiedenen Paare Asymptoten derselben bestehen aus den gesammten vorgenannten Paaren* GG_1 *und sind somit Tangenten der nämlichen Curve* G^3. Oder in Bezug auf das Dreieck abc kann man sagen: *jede Fufspunkten-Linie G sei Asymptote einer ihm umschriebenen gleich-*

seitigen Hyperbel H^2, welche nothwendig auch durch den Höhenschnitt d geht und den Scheitel s von G zum Mittelpunkt hat. In Betracht aller Quadrupel *abcd* hat man auf diese Weise eine Schaar-Schaar gleichseitige Hyperbeln, $SS(H^2)$. Denkt man sich in Bezug auf jedes Paar GG_1 alle Hyperbeln, welche dasselbe zu Asymptoten haben, so hat man die nämliche $SS(H^2)$. *Je zwei dieser Hyperbeln schneiden sich in irgend einem Quadrupel, also nur innerhalb des Curvendreiecks G^3, wofern ihre Schnittpunkte alle vier reell sind; berühren sich dieselben, indem etwa a und d sich vereinen, so berühren sie zugleich auch die Gerade $ad = G$ in deren Mittelpunkt μ, und alsdann liegen die beiden andern Schnitte b und c in der Curve G^3 selbst und sind die Berührungspunkte eines Paars HH_1, dessen Scheitel in jenem Punkte μ liegt. Je zwei Quadrupel liegen in einer und derselben Hyperbel H^2, oder insbesondere in einem und demselben Paar GG_1.* Die Rechtecke unter den je zwei Perpendikeln, welche aus den einzelnen Punkten irgend eines Quadrupels auf ein beliebiges Paar GG_1 gefället werden, haben jedesmal unter sich gleichen Inhalt. *Sind in einer Ebene zwei rechte Winkel GG_1 und HH_1 gegeben, und sollen zwei Hyperbeln die Schenkel derselben beziehlich zu Asymptoten haben und einander berühren, so ist der Ort ihres Berührungspunktes μ ein bestimmter Kreis m^2, welcher durch die Scheitel der Winkel und durch die Mitten der Strecken geht, welche auf den Schenkeln jedes Winkels durch die Schenkel des andern begrenzt werden.*

Das System Paare GG_1 kann insbesondere auch wie folgt bestimmt werden. Wird in der Kreislinie m^2 irgend ein Punkt p und nebstdem eine beliebige Gerade $\mathfrak{D}$ angenommen, und werden sodann aus jedem Punkte s des Kreises zwei unbegrenzte Gerade P und Q beziehlich durch p und parallel $\mathfrak{D}$ gezogen und die von denselben gebildeten Nebenwinkel mittels zweier Geraden G und G_1 gehälftet, *so sind alle diese Geraden-Paare GG_1 ein dem obigen gleiches System, so dafs sie eine gleiche Curve G^3 umhüllen.*

In dem Kreise m^2 ziehe man eine fortlaufende Reihe Sehnen unter folgender Bedingung. Aus dem Anfangspunkt s ziehe man die erste Sehne ss_1 willkührlich; sodann aus s_1 die zweite Sehne s_1s_2 senkrecht auf den durch s gehenden Durchmesser; ferner aus s_2 die dritte Sehne s_2s_3 senkrecht zu dem durch s_1 gehenden Durchmesser, und so durch jeden neuen Punkt diejenige Sehne, welche zu dem durch den vorhergehenden Punkt gezogenen Durchmesser senkrecht ist, so entsteht — wenn nicht zufällig der über der ersten

Sehne liegende Bogen mit dem Kreisumfange commensurabel ist — eine unbegrenzte Reihe von Sehnen, welche sämmtlich eine der obigen gleiche Curve G^3 berühren. Wird auf jede Sehne in ihrem zweiten Endpunkte eine Senkrechte errichtet, so berühren auch diese Senkrechten alle die nämliche Curve und bilden mit den respectiven Sehnen die obigen Paare GG_1. Ist dagegen der Bogen über der ersten Sehne mit dem Kreisumfange commensurabel, verhält er sich zu diesem, wie $n:m$, wo n und m ganze und relative Primzahlen sind, *so schliefst sich die Reihe Sehnen jedesmal, so dafs ein geschlossenes Polygon entsteht;* jedoch kehrt die Reihe nicht immer in den Anfangspunkt s zurück, sondern sie kann auch in $s_1, s_2, \ldots$ zurückkehren, je nachdem die Zahl m beschaffen ist. Ferner sind in diesem Falle die Endpunkte $s, s_1, s_2, \ldots$ der Sehnen immer Ecken eines regelmäfsigen mEcks, und die Sehnen selbst sind Seiten verschiedener Ordnung desselben (oder Seiten und Diagonalen). *Das Sehnen-Polygon nimmt nur dann alle Ecken des mEcks in Anspruch und ist selbst ein mEck, wenn m eine Potenz der Zahl* 3 *ist; seine Seiten sind alsdann zu drei und drei einander gleich, und zwar sind sie Seiten des regelmäfsigen vollständigen mEcks von allen denjenigen Ordnungen, welche nicht durch* 3 *theilbar sind.* Nämlich bei einem regelmäfsigen vollständigen $(2\mu+1)$Eck hat man (nach Gröfse) Seiten von 1ster, 2ter, 3ter, ... bis $(\mu-1)$ter Ordnung zu unterscheiden. — *Hierbei berühren alle Sehnen gleicherweise eine Curve G^3, so dafs das Sehnen-Polygon dieser Curve um- und zugleich dem Kreise eingeschrieben ist.* Es folgen daraus noch mehrere specielle Sätze, die hier übergangen werden.

In Bezug auf das Obige ist die Curve G^3, unter andern, auch noch wie folgt bestimmt. Denkt man sich rücksichtlich irgend eines der oben beschriebenen Quadrupel *abcd* die Schaar Kegelschnitte, welche durch einen der vier Punkte, etwa durch *d,* gehen und dem durch die drei übrigen bestimmten Dreieck *abc* eingeschrieben sind, ferner in jedem Kegelschnitt den durch den Punkt d gehenden Durchmesser dd_1 und in dessen anderem Endpunkte d_1 die Tangente G des Kegelschnitts, *so ist die Enveloppe aller dieser Tangenten die dort betrachtete Curve G^3, und zwar für alle unzähligen Quadrupel stets die nämliche Curve.* Auf diese Eigenschaft wurde der Verfasser durch seinen Freund, den Professor *Schläfli* in Bern, aufmerksam gemacht. — Die Curve G^3 wird ferner auch durch rollende Bewegung erzeugt.

Analogerweise gelangt man zu etwas allgemeineren Sätzen, wobei der obige Kreis m^2 durch einen beliebigen Kegelschnitt vertreten wird, und wobei

die Gegenseiten der vollständigen Vierecke *abcd* nicht mehr zu einander rechtwinklig sind. Folgendes Beispiel möge hier genügen.

Sind ms und mμ zwei beliebige Halbmesser einer gegebenen Ellipse m^2 und bewegen sich dieselben gleichzeitig um den Mittelpunkt m nach entgegengesetzten Richtungen so, dafs der vom Halbmesser ms beschriebene Sektor in jedem Moment doppelt so grofs ist, als der vom andern, mμ, beschriebene Sektor, so ist die Enveloppe der durch die Endpunkte der Halbmesser gehenden Geraden, $s\mu = G$, eine Curve dritter Klasse G^3 und vierten Grades, welche die Gerade G_∞ zur ideellen Doppeltangente hat, und deren reeller Theil nur aus einem krummlinigen Dreieck $u_2 v_2 w_2$ besteht, welches die Ellipse umschliefst und sie mit seinen drei Seiten (Bogen) in drei solchen Punkten u, v, w berührt, welche die Ecken eines der Ellipse eingeschriebenen gröfsten Dreiecks sind; die Ecken jenes Dreiecks $u_2 v_2 w_2$ sind Rückkehrpunkte der Curve G^3, die Rückkehrtangenten gehen alle drei durch den Mittelpunkt der Ellipse und respective durch die genannten Berührungspunkte u, v, w; bis zu diesen Punkten genommen sind sie gerade doppelt so grofs, als die auf ihnen liegenden Durchmesser der Ellipse. Der Inhalt des Curvendreiecks ist zweimal so grofs, als die Fläche der Ellipse, und jeder der drei Arbelen zwischen beiden Curven ist einem Drittheil der Ellipsen-Fläche gleich.

14.

Einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen.

(Von Herrn *R. Lipschitz* zu Königsberg in Pr.)

§. 1.

Gaufs hat in seinen „Disquisitiones arithmeticae" den Zusammenhang untersucht, welcher zwischen der Anzahl der binären quadratischen Formen einer gegebenen Determinante, und der Anzahl der Formen einer andern besteht, die aus der ersten durch Multiplication mit dem Quadrat einer ganzen Zahl gebildet ist, und zwar durch Anwendung der Composition der Formen (S. art. 253 — 256). Nachdem *Gaufs* bewiesen hat, dafs die eine Anzahl zur andern in einem rationalen Verhältniss steht, bestimmt er dasselbe für den Fall *negativer* Determinanten, für den Fall *positiver* Determinanten aber nicht. Als darauf *Dirichlet* die Anzahl der quadratischen Formen für eine gegebene Determinante durch Bildung unendlicher Reihen ermittelte, ergab sich jene von *Gaufs* gegebene Relation, und die entsprechende für *positive* Determinanten sehr einfach aus der Betrachtung der Reihen (S. Applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, Band XXI. dieses Journals). Indem ich mir nun die Aufgabe stellte, diese Sätze, sowohl für *negative* als für *positive* Determinanten, rein arithmetisch aus einer und derselben Quelle abzuleiten, wurde ich auf die Betrachtung der linearen Substitutionen geführt, deren sich *Gaufs* bedient hat, um entscheiden zu lehren, ob eine gegebene quadratische Form unter einer andern Form von verschiedener Determinante enthalten sei (S. Disq. arith. art. 213, 214), und ich gelangte so zur Lösung derselben. Da diese Anwendung der *Gaufs*ischen Untersuchung, so viel mir bekannt, noch nicht gemacht worden, so theile ich sie im Folgenden mit.

Es ist vortheilhaft, den besondern Fall zu untersuchen, in welchem der Quotient der verglichenen Determinanten das Quadrat einer *Primzahl* ist; denn während dadurch die Behandlung sehr vereinfacht wird, sind die Resultate so beschaffen, dafs die Sätze für den allgemeinen Fall sich sofort aus demselben ableiten lassen. Ich beginne daher mit der Betrachtung der speciellen Gattung linearer Substitutionen, welche diesem Falle entsprechen.

Es sei p eine Primzahl, und die ganzen Zahlen α, β, γ, δ mögen der Gleichung

$$(1.) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = p$$

genügen. Bedient man sich derselben, um zwei Variabeln x, y durch zwei neue Variabeln x', y' mittelst der Gleichungen

$$x = \alpha x' + \beta y',$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

auszudrücken, so werden sie bekanntlich Substitutionscoefficienten genannt, ihr Complex heifst eine Substitution, und wird durch das Symbol $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ bezeichnet. Aus diesem Gesichtspunkt betrachte man die Lösungen der Gleichung (1.), und nenne jede Lösung eine ***Substitution.***

Es seien α', β', γ', δ' ganze Zahlen, die der Gleichung

$$(2.) \qquad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$$

genügen. Bildet man aus denselben, und den Coefficienten der Substitution $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ die Gleichungen

$$(3.) \quad \begin{cases} \alpha\alpha' + \beta\gamma' = A, & \alpha\beta' + \beta\delta' = B, \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' = \Gamma, & \gamma\beta' + \delta\delta' = \Delta, \end{cases}$$

so erfüllen A, B, Γ, Δ die Gleichung (1.), und wir sagen: Die Substitution $\binom{A, B}{\Gamma, \Delta}$ ist der Substitution $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ *aequivalent.*

Es ist oft wichtig, wenn zwei Substitutionen $\binom{A, B}{\Gamma, \Delta}$ und $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ gegeben sind, zu beurtheilen, ob sie *aequivalent* sind, oder nicht. Um ein Criterium zu finden, bemerke man, dafs die Aequivalenz derselben die Existenz von 4 ganzen Zahlen α', β', γ', δ' voraussetzt, welche den Gleichungen (2.) und (3.) genügen. Aus den Gleichungen (3.) erhält man für dieselben die Werthe

$$(4.) \quad \begin{cases} \alpha' = \dfrac{\delta A - \beta\Gamma}{p}, & \beta' = \dfrac{\delta B - \beta\Delta}{p}, \\ \gamma' = \dfrac{-\gamma A + \alpha\Gamma}{p}, & \delta' = \dfrac{-\gamma B + \alpha\Delta}{p}, \end{cases}$$

an denen leicht zu sehen ist, dafs sie die Gleichung (2.) befriedigen. Es sind daher die gegebenen Substitutionen *aequivalent* oder nicht, je nachdem jene Werthe sämmtlich ganze Zahlen werden, oder nicht.

Wir machen jetzt die specielle Annahme, dafs in jeder der beiden gegebenen Substitutionen der erste und dritte Coefficient ohne gemeinschaft-

lichen Theiler seien. Dann läfst sich beweisen, dafs, wenn der Werth von γ' eine ganze Zahl ist, oder die Congruenz

$$(5.) \qquad \alpha\Gamma - \gamma A \equiv 0 \pmod{p}$$

befriedigt wird, auch die Werthe von α', β', δ' ganze Zahlen sein müssen. Denn, verbindet man diese Congruenz mit der, aus der Beschaffenheit obiger Substitutionen folgenden

$$\alpha\delta - \gamma\beta \equiv 0 \pmod{p},$$

so folgt

$$\alpha(\delta A - \beta\Gamma) \equiv 0, \qquad \gamma(\delta A - \beta\Gamma) \equiv 0 \pmod{p},$$

und da α und γ nicht beide durch p aufgehn dürfen, so mufs

$$\delta A - \beta\Gamma \equiv 0 \pmod{p},$$

das heifst, α' eine *ganze* Zahl sein. Ebenso schliefst man aus der Voraussetzung, dafs A und Γ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, dafs die Werthe von β' und δ' *ganze* Zahlen werden. Es entscheidet daher die Congruenz (5.) über die *Aequivalenz* der gegebenen Substitutionen, und man kann hievon sogleich die Anwendung machen, dafs dieselben stets aequivalent sind, wenn $A = \alpha$, $\Gamma = \gamma$ ist, was auch β, δ, B, Δ sein mögen. Doch ist nicht zu vergessen, dafs α und γ ohne gemeinschaftlichen Theiler vorausgesetzt sind.

Denkt man sich die sämmtlichen Substitutionen, die der Gleichung (1.) genügen, in Classen getheilt, so dafs zwei Substitutionen in dieselbe Classe kommen, oder in verschiedene, je nachdem sie aequivalent sind, oder nicht, und wählt man aus jeder Classe ein Individuum, so hat man ein System von Substitutionen, das die doppelte Eigenschaft besitzt, immer *eine* und *nur eine* Substitution zu enthalten, die irgend einer gegebenen aequivalent ist. Nun enthält jede Classe Substitutionen, deren erster und dritter Coefficient ohne gemeinschaftlichen Theiler sind. Denn es sei $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ eine Substitution, in welcher α und γ einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so kann derselbe nur die Primzahl p sein, weil er vermöge der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = p$ in p aufgehn mufs. Dann aber müssen β und δ ohne gemeinschaftlichen Theiler sein, da $\frac{\alpha}{p}\delta - \beta\frac{\gamma}{p} = 1$ ist. Nun zeigen die Gleichungen (4.), dafs die Substitution $\binom{\beta, -\alpha}{\delta, -\gamma}$ der Substitution $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ aequivalent ist; also ist die obige Behauptung erwiesen. Aus diesem Grunde ist es gestattet, bei der Eintheilung der sämmtlichen Substitutionen in Classen, die Betrachtung auf diejenigen zu beschränken,

in welchen der erste und dritte Coefficient keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Da ferner unter dieser Voraussetzung alle Substitutionen, die denselben ersten und dritten Coefficienten haben, nach einer oben gemachten Bemerkung, aequivalent sind, was auch der zweite und vierte Coefficient sein mögen, so ist es ausreichend, jetzt nur den *ersten* und *dritten* Coefficienten der Substitutionen zu betrachten. Man darf endlich fordern, dafs der erste und dritte Coefficient der repräsentirenden Substitution einer Classe *nicht negativ* sei, da ganz allgemein die Substitutionen $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ und $\binom{-\alpha, -\beta}{-\gamma, -\delta}$ aequivalent sind. Man erhält daher für irgend eine Classe einen ganz bestimmten Repräsentanten, wenn man, mit Ausschliefsung der Substitutionen, deren erster und dritter Coefficient einen gemeinschaftlichen Theiler haben, untersucht, für welche Individuen derselben der dritte Coefficient den kleinsten *nicht negativen* Werth hat, und aus diesen diejenige wählt, in welcher der erste Coefficient den kleinsten nicht negativen Werth hat.

Die Lösung dieser Aufgabe erfordert nur eine sehr einfache Discussion der Congruenz (5.); dieselbe zeigt, dafs $p+1$ Classen existiren, und giebt folgendes System repräsentirender Substitutionen:

$$\binom{1, 0}{0, p}, \binom{0, -p}{1, 0}, \binom{1, -p}{1, 0}, \binom{2, -p}{1, 0} \ldots \binom{p-1, -p}{1, 0}.$$

§. 2.

Die Transformation der binären quadratischen Formen durch lineare Substitution hat bekanntlich zu der Bemerkung geführt, dafs die Determinante der *enthaltenen* Form gleich dem Product der Determinante der *enthaltenden* Form in ein *Quadrat* ist. Es gehe die Form (a, b, c), deren Determinante $b^2 - ac = D$ ist, durch die Substitution $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ in die Form (a', b', c') über, so hat man für die Coefficienten die Gleichungen

$$(1.) \quad \begin{cases} a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, \\ c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2, \end{cases}$$

und es wird die Determinante

$$D' = b'^2 - a'c' = D(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Man nehme nun an, dafs $\alpha\delta - \beta\gamma = p$, eine Primzahl sei und setze ferner voraus, dafs die ganzen Zahlen a, b, c, wie auch $a, 2b, c$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so dafs die Form (a, b, c) nach der von

Dirichlet eingeführten Benennung eine Form der ersten Art ist*). Dann läfst sich zeigen, dafs der gröfste Theiler der Form (a', b', c') entweder die Einheit, oder p, oder p^2 sein mufs. Denn bildet man aus den Gleichungen (1.) die folgenden

$$(2.)\quad \begin{cases} p^2a = a'\delta^2 - 2b'\delta\gamma + c'\gamma^2, \\ p^2b = -a'\delta\beta + b'(\delta\alpha + \gamma\beta) - c'\gamma\alpha, \\ p^2c = a'\beta^2 - 2b'\beta\alpha + c'\alpha^2, \end{cases}$$

so zeigen dieselben, dafs der gröfste gemeinschaftliche Theiler von a', b', c' in p^2a, p^2b, p^2c, mithin in p^2 aufgehen mufs. Es hat aber p^2 nur die Theiler $1, p, p^2$; also ist die obige Behauptung erwiesen.

Die Substitution $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$, mittelst deren die Form (a, b, c) in die Form (a', b', c') transformirt wird, gehört unter diejenigen, mit welchen wir uns oben beschäftigten, und es ist leicht zu beweisen, dafs aequivalente Substitutionen, auf die Form (a, b, c) angewandt, aequivalente Formen erzeugen.

Man denke sich nun die sämmtlichen Substitutionen $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$, für die $\alpha\delta - \beta\gamma = p$ ist, auf die Form (a, b, c) angewandt, und die hervorgehenden Formen in Classen geordnet. Dann ist es ausreichend, das System repräsentirender Substitutionen zu benutzen, um für jede Classe mindestens ***einen*** Repräsentanten zu erhalten. Die so entstehenden Formen sollen zunächst untersucht werden; und zwar wird gefragt, welche derselben den Theiler p haben.

Um dies zu entscheiden, stelle man die $p+1$ Formen wie folgt auf:

1) Durch $\binom{1, 0}{0, p}$, $\quad a' = a, \quad b' = bp, \quad c' = cp^2,$

2) Durch $\binom{\alpha, -p}{1, 0}$, $\quad a' = a\alpha^2 + 2b\alpha + c,$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b' = -(a\alpha + b)p,$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad c' = ap^2,$

wo α der Reihe nach $= 0, 1, 2, \ldots p-1$ zu setzen ist.

Man stelle sich die Form (a, b, c) so eingerichtet vor, dafs ihr erster Coefficient durch p nicht theilbar sei, was immer möglich ist. Dann kann die erste Form (a, bp, cp^2) nicht den Theiler p haben. Um die andern p Formen zu beurtheilen, erwäge man, dafs b' und c' durch p aufgehn, mithin alles davon abhängt, ob a' durch p theilbar ist oder nicht. Statt a' zu untersuchen,

*) oder nach *Gaufs* eine forma *proprie primitiva* (S. *Dirichlet* applications etc. Bd. XXI p. 2 dieses Journals und disq. arith. art. 226).

betrachte man, da a relative Primzahl zu p ist, aa'. Es wird also eine Form (a', b', c') nur dann den Theiler p haben, wenn aa' durch p aufgeht, oder wenn

$$aa' = (a\alpha + b)^2 - D \equiv 0 \pmod{p}$$

ist. Da a relative Primzahl zu p ist, so reproducirt der Ausdruck $a\alpha + b$, wenn man α der Reihe nach $= 0, 1, \ldots p-1$ setzt, das System der Reste nach dem Modul p. Um also die quadratische Congruenz

$$(a\alpha + b)^2 - D \equiv 0 \pmod{p}$$

zu untersuchen, ist es zweckmäfsig, zu unterscheiden, ob p eine ungerade Primzahl, oder die Zahl Zwei ist.

Ist p eine ungerade Primzahl, so zeigen die Gleichungen (2.), dafs der gröfste gemeinschaftliche Theiler von a', $2b'$, c' auch in p^2 aufgehen mufs, dafs mithin die Form (a', b', c') nur von der *ersten* Art, oder aus einer Form der ersten Art abgeleitet sein kann. Es sind übrigens hier wieder drei Fälle zu sondern.

Geht die ungerade Primzahl p in D auf, so giebt die Congruenz (3.) für α einen Werth, der durch

$$a\alpha + b \equiv 0 \pmod{p}$$

bestimmt wird. Geht p^2 in D auf, so ist leicht zu sehen, dafs a', wenn es durch p aufgehen soll, auch durch p^2 theilbar sein mufs. Dann wird gleichfalls

$$b' = -(a\alpha + b)p \equiv 0 \pmod{p^2},$$
$$c' = ap^2 \equiv 0 \pmod{p^2},$$

mithin hat die Form (a', b', c') den gröfsten gemeinsamen Theiler p^2.

Ist D durch p *nicht* theilbar, und quadratischer *Rest* davon, so hat die Congruenz (3.) zwei Wurzeln, welche, wenn man

$$\zeta^2 \equiv D \pmod{p}$$

setzt, sich so definiren lassen:

$$a\alpha_1 + b - \zeta \equiv 0 \pmod{p},$$
$$a\alpha_2 + b + \zeta \equiv 0 \pmod{p}.$$

Es ist übrigens klar, dafs die beiden Formen, welche diesen Werthen von α entsprechen, den Theiler p^2 nicht haben können, da Dp^2 nicht durch p^4 aufgeht.

Ist D durch p *nicht* theilbar, und quadratischer *Nichtrest* von p, so hat die Congruenz (3.) keine Wurzel; sie ist unmöglich.

Beachtet man jetzt, dafs jede Form (a', b', c'), die nicht den Theiler p hat, ohne Theiler ist, so läfst sich folgendes für Formen der ersten Art gültige Resultat aussprechen:

Wenn die ungerade Primzahl p in D aufgeht, so giebt das System der $p+1$ Substitutionen p Formen ohne Theiler, und *eine* Form, deren gröfster gemeinschaftlicher Theiler p^2 oder p ist, je nachdem p^2 in D aufgeht, oder nicht.

Wenn D durch p nicht theilbar und quadratischer *Rest* von p ist, so giebt das System $p-1$ Formen ohne Theiler, und zwei Formen, deren gröfster gemeinschaftlicher Theiler p ist.

Wenn D durch p nicht theilbar und quadratischer *Nichtrest* von p ist, so giebt das System $p+1$ Formen ohne Theiler.

Wir kommen jetzt zu dem Fall, wo $p=2$ ist.

Da hier der erste Coefficient der Form (a, b, c) ungerade angenommen wird, so ist die Form $(a, 2b, 4c)$, welche der Substitution $\begin{pmatrix}1,0\\0,2\end{pmatrix}$ entspricht, von der *ersten* Art. Diese Bezeichnung soll nämlich schon ausdrücken, dafs die betreffende Form ohne Theiler ist. Um ferner zu untersuchen, wann a' *gerade* ist, bedient man sich wie oben der Congruenz

$$(4.) \qquad aa' = (a\alpha+b)^2 - D \equiv 0 \pmod 2.$$

Denn ist a' *ungerade,* so ist die Form (a', b', c') nothwendig von der *ersten* Art.

Es sind hier wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Ist D *gerade,* so giebt die Congruenz (4.) für ihre Wurzel die Bestimmung

$$a\alpha+b \equiv 0 \pmod 2,$$

und es ist leicht zu sehen, dafs die entsprechende Form (a', b', c') aus einer Form der ersten Art durch Multiplication mit dem Factor 2 oder 4 abgeleitet ist, je nachdem $D \equiv 2$, oder $D \equiv 0 \pmod 4$ ist. Ist D *ungerade,* so hat die Congruenz (4.) auch nur *eine* Wurzel, die durch

$$a\alpha+b \equiv 1 \pmod 2$$

bestimmt wird. Erwägt man jetzt, dafs das Quadrat einer ungeraden Zahl, durch 4 getheilt, den Rest 1 läfst, so folgt für $D \equiv 3 \pmod 4$: $a' \equiv 2$, $b' \equiv 2$, $c' \equiv 0 \pmod 4$, also (a', b', c') aus einer Form von der ersten Art durch

Multiplication mit dem Factor 2 abgeleitet; dagegen für $D \equiv 1 \pmod 4$: $a' \equiv 0$, $b' \equiv 2$, $c' \equiv 0 \pmod 4$, also (a', b', c') aus einer Form von der zweiten Art durch Multiplication mit dem Factor 2 abgeleitet. Es ergiebt sich also folgendes für Formen der ersten Art und $p = 2$ gültige Resultat:

Ist $D \equiv 2$, oder $\equiv 0 \pmod 4$, so giebt das hier aus dreien bestehende System der Substitutionen zwei Formen der ersten Art von der Determinante $4D$, und *eine* Form, die respective aus einer Form der ersten Art von der Determinante D durch Multiplication mit 2, oder aus einer Form der ersten Art von der Determinante $\frac{1}{4}D$ durch Multiplication mit 4 abgeleitet ist.

Ist $D \equiv 3$, oder $\equiv 1 \pmod 4$, so giebt das System zwei Formen der ersten Art von der Determinante $4D$, und *eine* Form, die respective aus einer Form der ersten oder zweiten Art von der Determinante D durch Multiplication mit dem Factor 2 abgeleitet ist.

Die für eine Form der ersten Art durchgeführte Untersuchung könnte man auch auf Formen der zweiten Art*) ausdehnen. Es ist aber hier nur von Interesse, den Fall zu betrachten, wo (a, b, c) eine Form der zweiten Art, und $\alpha\delta - \beta\gamma = 2$ ist.

Es sei diese Form, deren Determinante $D \equiv 1 \pmod 4$ sein mufs**), so eingerichtet, dafs a das Doppelte einer ungeraden Zahl wird. Eine Form, die durch Anwendung der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ aus der gegebenen abgeleitet wird, gehört zur Determinante $4D$. Der gröfste gemeinschaftliche Theiler, den a', b', c' haben können, ist 2; der gröfste gemeinschaftliche Theiler, den $a', 2b', c'$ haben können, ist 4. Das System, welches hier aus drei Substitutionen besteht, giebt

1) für $\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 2 \end{pmatrix}$, $\quad a' = a, \quad b' = 2b, \quad c' = 4c,$

2) für $\begin{pmatrix} \alpha, -2 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$, $\quad a' = a\alpha^2 + 2b\alpha + c, \quad b' = -2(a\alpha + b), \quad c' = 4a,$

wo $\alpha = 0, 1$ zu setzen ist.

Man sieht, dafs die erste Form das Doppelte einer Form der ersten Art wird, da $\frac{1}{2}a'$ ungerade ist. Um zu beurtheilen, ob in den andern beiden Formen

---

*) d. h. Formen, in welchen die Zahl 2 der gröfste gemeinschaftliche Theiler von $a, 2b, c$ ist; nach *Gaufs* formae *improprie primitivae* (disq. arith. art. 226).

**) Siehe ebendaselbst.

a', welches immer *gerade* ist, durch 4 aufgeht oder nicht, untersuche man, ob aa' nach dem Modul 8 den Rest 0 oder 4 läfst.

Da b *ungerade*, a *gerade* ist, so ist auch $a\alpha + b$ *ungerade*, folglich $(a\alpha + b)^2 \equiv 1 \pmod 8$; mithin ist,

für $D \equiv 5 \pmod 8$, $aa' = (a\alpha + b)^2 - D \equiv 4 \pmod 8$,

für $D \equiv 1 \pmod 8$, $aa' = (a\alpha + b)^2 - D \equiv 0 \pmod 8$.

Hieraus sieht man, dafs die beiden Formen, welche den Werthen $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ entsprechen, sich gleich verhalten.

Ist $D \equiv 5 \pmod 8$, so wird

$$a' \equiv 2 \pmod 4$$

also jede das Doppelte einer Form der ersten Art; ist $D \equiv 1 \pmod 8$, so wird

$$a' \equiv 0 \pmod 4, \quad b' \equiv 2 \pmod 4, \quad c' \equiv 0 \pmod 4,$$

also jede das Doppelte einer Form der zweiten Art. — Man hat demnach folgendes für Formen der zweiten Art und $p = 2$ gültige Resultat:

Ist $D \equiv 5 \pmod 8$, so giebt das aus dreien bestehende System der Substitutionen drei Formen, die aus Formen der ersten Art von der Determinante D durch Multiplication mit dem Factor 2 abgeleitet sind.

Ist $D \equiv 1 \pmod 8$, so giebt das System *eine* Form, die aus einer Form der ersten Art von der Determinante D, und zwei Formen, die aus Formen der zweiten Art von der Determinante D, durch Multiplication mit dem Factor 2 abgeleitet sind.

§. 3.

Nach diesen Vorbereitungen kann man den folgenden Satz beweisen:

Es sei (a', b', c') eine Form der ersten Art von der Determinante $D' = Dp^2$, wo D eine ganze Zahl, p irgend eine Primzahl bedeutet. Dann läfst sich immer eine Form der ersten Art von der Determinante D angeben, unter welcher die Form (a', b', c') eigentlich enthalten ist. Es sei (a, b, c) eine solche Form, so genügt jede Form derselben Classe der gestellten Forderung, jedoch keine Form einer anderen Classe.

Denn es sei die Substitution, vermöge deren die Form (a', b', c') unter der Form (a, b, c) enthalten ist, $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$, so hat man

$$(1.) \quad \begin{cases} a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, \\ c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2, \end{cases}$$

und hieraus leitet man ab

$$(2.)\quad \begin{cases} ap^2 = a'\delta^2 - 2b'\delta\gamma + c'\gamma^2, \\ bp^2 = a'\delta\beta + b'(\alpha\delta + \beta\gamma) - c'\gamma\alpha, \\ cp^2 = a'\beta^2 - 2b'\beta\alpha + c'\alpha^2. \end{cases}$$

Wenn also eine Form (a, b, c) existirt, aus welcher mittelst einer Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{smallmatrix}\right)$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = p$, die gegebene Form (a', b', c') hergeleitet werden kann, so mufs aus der Form (a', b', c') mittelst der Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\delta, & -\beta\\ -\gamma, & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ die Form (ap^2, bp^2, cp^2) hergeleitet werden können.

Nun ist oben gezeigt worden, dafs das System der $p+1$ Substitutionen, auf eine Form der ersten Art von der Determinante $D' = Dp^2$ angewandt, p Formen ohne Theiler, und *eine* Form vom gröfsten Theiler p^2 giebt. Da aber eine Form ohne Theiler einer Form vom Theiler p^2 nie aequivalent werden kann, so ist klar, dafs die sämmtlichen Substitutionen $\left(\begin{smallmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{smallmatrix}\right)$, auf die genannte Form angewandt, immer eine und nur *eine* Classe von Formen erzeugen, die den Theiler p^2 haben. Es sei also (A, B, C) eine Form, die den Theiler p^2 hat, und sie sei aus der Form (a', b', c') durch die Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\delta, & -\beta\\ -\gamma, & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ erzeugt worden. Dann setze man

$$a = \frac{A}{p^2}, \quad b = \frac{B}{p^2}, \quad c = \frac{C}{p^2},$$

so ist (a, b, c) eine Form, unter welcher (a', b', c') enthalten ist. Denn nach der Herleitung gelten die Gleichungen (2.), von welchen die Gleichungen (1.) eine Folge sind.

Man sieht leicht, dafs jede der Form (a, b, c) aequivalente Form derselben Forderung genügt. Und umgekehrt, soll eine Form (h, i, k) jener Forderung genügen, so mufs sie mit (a, b, c) in dieselbe Classe gehören. Denn es folgt aus den Gleichungen (2.), dafs die Form (hp^2, ip^2, kp^2) zu der einfach bestimmten Classe von Formen gehört, welche aus der Form (a', b', c') erzeugt werden, und den Theiler p^2 haben, mithin der Form (ap^2, bp^2, cp^2) aequivalent ist. Es ist daher auch (h, i, k) aequivalent (a, b, c). Ganz auf dieselbe Weise beweist man den folgenden Satz:

Es sei (a', b', c') eine Form der ersten Art von der Determinante D, die $\equiv 1 \pmod 4$ ist; so läfst sich immer eine Form der zweiten Art von der Determinante D angeben, unter welcher die Form $(2a', 2b', 2c')$ eigentlich enthalten ist. Es sei (a, b, c) eine solche Form, so genügt der

gestellten Forderung jede Form derselben Classe, jedoch keine Form einer anderen.

Denn es sei die Substitution, vermöge deren die Form $(2a', 2b', 2c')$ unter der Form (a, b, c) enthalten ist, $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 2$ ist, so hat man

$$(3.)\quad \begin{cases} 2a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ 2b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, \\ 2c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2, \end{cases}$$

woraus die Gleichungen

$$(4.)\quad \begin{cases} 2a = a'\delta^2 - 2b'\delta\gamma + c'\gamma^2, \\ 2b = -a'\delta\beta + b'(\alpha\delta + \beta\gamma) - c'\gamma\alpha, \\ 2c = a'\beta^2 - 2b'\beta\alpha + c'\alpha^2 \end{cases}$$

folgen. Es ist jetzt nur von dem Satze Gebrauch zu machen *), dafs sämmtliche Substitutionen $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 2$ ist, auf eine Form der ersten Art, deren Determinante $D \equiv 1 \pmod 4$ ist, angewendet, immer eine und *nur eine* Classe von Formen geben, die aus einer Form der zweiten Art von der Determinante D, durch Multiplication mit dem Factor 2 abgeleitet sind. Dann folgt Alles, wie vorhin.

§. 4.

Es sei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_h$ das vollständige System der Formen erster Art von der Determinante D; es sei p irgend eine Primzahl; man wende auf die Form φ_1 die sämmtlichen Substitutionen $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ an, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = p$ ist, und unterwerfe die daraus hervorgehenden Formen der Bedingung, ohne Theiler zu sein. Diese Formen, zur Determinante $D' = Dp^2$ gehörig, und von der ersten Art, ordne man in Classen, und wähle für jede Classe einen Repräsentanten; ebenso verfahre man der Reihe nach mit den Formen $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_h$: so behaupte ich, dafs die respräsentirenden Formen ein vollständiges System der Formen erster Art, von der Determinante D', bilden.

Denn wollte man annehmen, dafs dieselbe Form zwei Mal erscheint, so müfste sie unter zwei verschiedenen Formen des Systems $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_h$ enthalten sein, was nach dem ersten in §. 3 aufgestellten Satz unmöglich ist.

*) Derselbe bildet einen Theil des zweiten in §. 2 ausgesprochenen Resultats.

Oder wollte man annehmen, dafs eine Form fehlt, so müfste diese Form nach demselben Satz dennoch unter einer ganz bestimmten Form des Systems φ_1, φ_2, ... φ_h enthalten sein; was einen Widerspruch giebt.

Auf ganz analogen Gründen beruht der folgende Satz:

Es sei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{h'}$ das vollständige System der Formen zweiter Art von der Determinante D. Man wende auf die Form φ_1 die sämmtlichen Substitutionen $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ an, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 2$ ist, und unterwerfe die daraus hervorgehenden Formen der Bedingung, aus Formen der ersten Art durch Multiplication mit dem Factor 2 abgeleitet zu sein. Diese Formen, zur Determinante $4D$ gehörig, ordne man in Classen, und wähle für jede Classe einen Repräsentanten; ebenso verfahre man der Reihe nach mit den Formen $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{h'}$: so behaupte ich, dafs die repräsentirenden Formen ein vollständiges System der Formen erster Art von der Determinante D bilden, jede Form mit dem Factor 2 multiplicirt.

§. 5.

Um aus den Sätzen des vorigen Paragraphen weitere Schlüsse zu ziehen, ist es nöthig, folgende Aufgabe zu lösen:

Es sei $\varphi = (a, b, c)$ eine Form der ersten Art von der Determinante D: man soll die sämmtlichen Formen (a', b', c'), die aus derselben durch alle Substitutionen $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = p$, abgeleitet werden können und die ohne Theiler sind, in Classen ordnen, und die Anzahl der Classen angeben.

Wie oben bemerkt, ist es nur nöthig das System der $p+1$ Substitutionen*) anzuwenden, um sicher zu sein, dafs keine Classe unvertreten bleibe; auch hat sich gezeigt, dafs unter diesen $p+1$ Formen diejenigen, welche ohne Theiler sind, Formen der ersten Art werden, d. h. dafs sobald a', b', c' ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, dasselbe auch für a', $2b'$, c' der Fall ist. Die Substitutionen, welche solche Formen geben, sind in §. 2 bestimmt worden und das für ihre Anzahl k daselbst gefundene Ergebnifs kann wie folgt in Zeichen zusammengefafst werden:

Wenn p eine ***ungerade*** Primzahl ist, die in D nicht aufgeht, und das Zeichen $\left(\frac{D}{p}\right)$ die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem D

*) Siehe §. 1 zu Ende.

quadraticher Rest oder Nichtrest von p ist, so erhält man

$$k = p - \left(\frac{D}{p}\right).$$

Ist dagegen p eine *ungerade* Primzahl, die in D aufgeht, oder die Zahl 2, so ist

$$k = p.$$

Es sei nun aus der gegebenen Form $\varphi = (a, b, c)$ die Reihe der k Formen ohne Theiler, von der Determinante $D' = Dp^2$ abgeleitet:

$$(1.) \quad f_1, \quad f_2, \quad \ldots \quad f_k,$$

so bedarf es eines Mittels zu beurtheilen, welche von diesen Formen einer bestimmten Form f unter denselben aequivalent sind.

Gesetzt es sei die Form f_1 der Form f aequivalent, so dafs f_1 durch die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha', \beta' \\ \gamma', \delta'\end{pmatrix}$, wo $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$, in f übergeht; es sei ferner f aus φ durch die zu dem oben aufgestellten System gehörige Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$, f_1 aus φ durch die ebenfalls zum oben aufgestellten System gehörige Substitution $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$ entstanden. Da durch die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$ die Form φ in die Form f_1, durch die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha', \beta' \\ \gamma', \delta'\end{pmatrix}$ die Form f_1 in f transformirt wird, so bilde man die Ausdrücke:

$$\alpha_1\alpha' + \beta_1\gamma' = A, \qquad \alpha_1\beta' + \beta_1\delta' = B,$$
$$\gamma_1\alpha' + \delta_1\gamma' = \Gamma, \qquad \gamma_1\beta' + \delta_1\delta' = \Delta,$$

und die Substitution $\begin{pmatrix}A, B \\ \Gamma, \Delta\end{pmatrix}$ transformirt die Form φ in die Form f. Diese Substitution ist aequivalent der Substitution $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$, durch welche die Form φ in f_1 übergeht. Denkt man sich also die sämmtlichen Substitutionen aufgestellt, durch welche die Form φ in f übergeht, so mufs sich die Substitution $\begin{pmatrix}A, B \\ \Gamma, \Delta\end{pmatrix}$, welche der Substitution $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$ aequivalent ist, unter denselben befinden.

Diese Betrachtung führt zu folgendem Verfahren:

Es ist gezeigt worden, dafs aus *einer* gegebenen Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$, die von der Form φ zur Form f führt, die sämmtlichen ähnlichen Substitutionen abgeleitet werden können (*Gauſs* disq. arith. art. 162). Nachdem dieselben aufgestellt worden, ordne man sie in Classen, und wähle die Repräs-

sentanten aus dem System der $p+1$ Substitutionen. Es sei z. B. der Repräsentant einer dieser Classen $\binom{\alpha_\lambda, \beta_\lambda}{\gamma_\lambda, \delta_\lambda}$, so ist leicht zu sehen, dafs die Form f_λ der Form f aequivalent ist; und so ergiebt jede Substitutions-Classe eine Form aus der Reihe

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots \quad f_k$$

mit der die betrachtete Form f aequivalent ist. Nähme man an, dafs aufser den so gefundenen Formen noch eine Form der Form f aequivalent werde, so würde ein Widerspruch entstehen. Denn es sei diese Form f_1, so ist oben gezeigt worden, dafs unter den sämmtlichen Substitutionen, die φ in f transformiren, *eine* Substitution $\binom{A, B}{\Gamma, \Delta}$ sich finden mufs, deren aus dem System der $p+1$ Substitutionen genommener Repräsentant $\binom{\alpha_1, \beta_1}{\gamma_1, \delta_1}$ ist.

Es ist jetzt zunächst folgende Untersuchung anzustellen:

Die Form $\varphi = (a, b, c)$ gehe durch die Substitution unseres Systems $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ in die Form $f = (a', b', c')$ über, welche zur Determinante $D' = Dp^2$ gehört, ohne Theiler und von der ersten Art ist. Dann erhält man die sämmtlichen ähnlichen Substitutionen durch die Ausdrücke *)

$$(2.) \quad \begin{cases} A = \alpha t - (\alpha b + \gamma c) u, \\ B = \beta t - (\beta b + \delta c) u, \\ \Gamma = \gamma t + (\alpha a + \gamma b) u, \\ \Delta = \delta t + (\beta a + \delta b) u, \end{cases}$$

wo t, u alle ganzen Zahlen sind, die der unbestimmten Gleichung

$$(3.) \quad t^2 - Du^2 = 1$$

genügen. Diese Substitutionen $\binom{A, B}{\Gamma, \Delta}$ sollen in Classen geordnet, und die Anzahl der Classen soll angegeben werden.

Um jetzt für die Aequivalenz zweier Substitutionen das Criterium (5.) des §. 1 anwenden zu können, ist es nöthig zu zeigen, dafs im gegenwärtigen Falle der erste und dritte Substitutionscoefficient nicht gleichzeitig durch p aufgehen. Es ist aber in unserm System von Substitutionen $\beta \equiv 0$, $\delta \equiv 0 \pmod{p}$, folglich vermöge der Gleichungen (2.), auch $B \equiv 0$,

*) Sie sind in den von *Gaufs* (disq. arith. art. 162 pag. 181) gegebenen als specieller Fall enthalten, da hier der gröfste gemeinschaftliche Theiler von a', $2b'$, c', also nach *Gaufs* die mit m bezeichnete Zahl, $= 1$ ist.

$\Delta \equiv 0 \pmod{p}$. Daher hat man die Gleichung

$$A\frac{\Delta}{p} - \frac{B}{p}\Gamma = 1,$$

so dafs A und Γ ohne gemeinschaftlichen Theiler sein müssen.

Es seien nun $\begin{pmatrix} A, B \\ \Gamma, \Delta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} A', B' \\ \Gamma', \Delta' \end{pmatrix}$ Substitutionen, die respective den Lösungen t, u und t', u' der unbestimmten Gleichung (3.) entsprechen. Dieselben werden (nach §. 1 Gl. (5.)) aequivalent sein, oder nicht, je nachdem die Congruenz

$$A\Gamma' - A'\Gamma \equiv 0 \pmod{p}$$

befriedigt wird, oder nicht. Setzt man für A, Γ, A', Γ' ihre Werthe aus den Gleichungen (2.), so geht dieselbe in

$$a'(tu' - t'u) \equiv 0 \pmod{p}$$

über, und, da die Form (a', b', c') so beschaffen ist, dafs a' durch p nicht aufgeht *), so läfst sich die Congruenz ersetzen durch

$$(4.) \quad tu' - t'u \equiv 0 \pmod{p}.$$

Man sieht sogleich, dafs entgegengesetzte Lösungen, wie t, u und $-t$, $-u$ aequivalente Substitutionen geben. Für das Weitere ist es aber nöthig zu unterscheiden, ob die Determinante *negativ* oder *positiv* ist.

I. Die Determinante D sei *negativ*, und ihr absoluter Werth gröfser als die Einheit; dann hat die Gleichung (3.) nur die beiden Lösungen $t = \pm 1$, $u = 0$, welche *eine* Classe von Substitutionen geben.

Ist die Determinante $D = -1$, so hat die unbestimmte Gleichung

$$t^2 + u^2 = 1,$$

aufser den Lösungen $t = \pm 1$, $u = 0$, welche eine Classe von Substitutionen geben, die beiden $t = 0$, $u = \pm 1$, welche auch *nur eine* Classe geben. Die entscheidende Congruenz (4.) zeigt aber, dafs diese beiden Classen von einander verschieden sind.

II. Die Determinante D sei *positiv*, so sind die sämmtlichen Lösungen der Gleichung (3.) in der Formel

$$t_n + u_n\sqrt{D} = \pm(T + U\sqrt{D})^n$$

*) Es hat sich nämlich (§. 2, zu Anfang) gezeigt, dafs sämmtliche aus der Anwendung des Systems der $p+1$ Substitutionen hergeleiteten Werthe von b', c' durch p theilbar sind, sodafs, in den hier betrachteten k Formen ohne Theiler, a' zu p relative Primzahl sein mufs.

enthalten, wo T, U die kleinsten positiven Werthe sind, welche derselben genügen, n aber alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ bedeutet. Zu Folge einer oben gemachten Bemerkung genügt es für den gegenwärtigen Zweck diejenigen Lösungen zu betrachten, für welche in dieser Gleichung das Pluszeichen zu nehmen ist.

Die Determinante der Form $f=(a', b', c')$ ist $D'=Dp^2$. Bezeichnet man die kleinsten positiven Werthe, die der unbestimmten Gleichung

$$t'^2 - D'u'^2 = 1$$

genügen, durch T', U', so sind T', pU' Lösungen der unbestimmten Gleichung (3.); und da pU' *positiv* ist, so mufs ein positiver Index ϱ existiren, für welchen

$$(T+U\sqrt{D})^{\varrho} = T'+U'\sqrt{D'}$$

ist. Man sieht leicht, dafs ϱ der kleinste positive Exponent ist, für welchen der Werth u durch p theilbar wird, und dafs, wenn $m\varrho$ irgend ein Vielfaches von ϱ bedeutet,

$$t_{m\varrho}+u_{m\varrho}\sqrt{D} = (T+U\sqrt{D})^{m\varrho} = (T'+U'\sqrt{D'})^{m},$$

mithin $u_{m\varrho}$ auch durch p theilbar ist.

Ich behaupte jetzt, dafs wenn man in der Formel

$$t_{\mu}+u_{\mu}\sqrt{D} = (T+U\sqrt{D})^{\mu}$$

der Reihe nach $\mu = 0, 1, 2, \ldots \varrho-1$ setzt, die daraus entstehenden ϱ Lösungen der unbestimmten Gleichung (3.) die doppelte Eigenschaft haben, dafs nicht zwei verschiedene unter ihnen vorkommen, für welche

$$tu' - t'u \equiv 0 \pmod{p}$$

würde, und dafs für jede beliebige Lösung $t_{\mu'}$, $u_{\mu'}$ eine Lösung t_{μ}, u_{μ} aus jener Reihe der ϱ Lösungen angegeben werden kann, so dafs

$$t_{\mu}u_{\mu'} - t_{\mu'}u_{\mu} \equiv 0 \pmod{p}$$

ist.

Um den zweiten Punct zuerst zu erledigen, nehme man für das gegebene μ' den Werth μ als seinen Rest nach dem Modul ϱ, aus dem System $0, 1, 2, \ldots \varrho-1$. Dann ist also $\mu'-\mu$ ein Vielfaches von ϱ, und $u_{\mu'-\mu}\equiv 0 \pmod{p}$. Bildet man nun die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} t_{\mu'-\mu}+u_{\mu'-\mu}\sqrt{D} &= (T+U\sqrt{D})^{\mu'}(T+U\sqrt{D})^{-\mu} \\ &= (t_{\mu'}+u_{\mu'}\sqrt{D})(t_{\mu}-u_{\mu}\sqrt{D}) \\ &= t_{\mu'}t_{\mu} - Du_{\mu'}u_{\mu} + (t_{\mu}u_{\mu'} - t_{\mu'}u_{\mu})\sqrt{D}, \end{aligned}$$

so erhält man

$$u_{\mu'-\mu} = t_\mu u_{\mu'} - t_{\mu'} u_\mu \equiv 0 \pmod{p};$$

was gezeigt werden sollte.

Wollte man aber annehmen, dafs es unter den aufgestellten ϱ Lösungen zwei gäbe, die der Congruenz (4.) genügen, und es seien die beiden Indices derselben μ' und μ, wo $\mu' \geqq \mu$, so würde man zu dem Schlufs gelangen, dafs

$$u_{\mu'-\mu} \equiv 0 \pmod{p}$$

sein mufs. Da aber der Annahme gemäfs ϱ der kleinste positive Index ist, für welchen $u \equiv 0 \pmod{p}$ wird, und sowohl μ' als μ positiv und $< \varrho$ sein sollen, so mufs $\mu' - \mu = 0$ sein, d. h. die beiden Lösungen sind identisch.

Man hat demnach das Resultat, dafs die aufgestellten ϱ Lösungen ϱ von einander verschiedene Substitutionen der Form φ in die Form f geben, welche die sämmtlichen Substitutionen dieser Art repräsentiren; oder, die Anzahl der Classen von Substitutionen, welche man erhält, ist

$$\varrho = \frac{\log(T' + U'\sqrt{D'})}{\log(T + U\sqrt{D})}.$$

Man sieht, dafs die Anzahl der Classen, in welche die sämmtlichen Substitutionen $\begin{pmatrix} A, B \\ I, \Delta \end{pmatrix}$, vermöge deren eine Form φ in eine Form f übergeht, zerfallen, nur von der Determinante D und der Primzahl p abhängt. Diese Anzahl bestimmt aber, wieviel Formen aus der Reihe

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3, \quad \ldots \quad f_k$$

einer derselben f aequivalent sind. Es müssen also, da D und p in allen dieselben Werthe haben, jeder Form gleichviel Formen aequivalent sein, oder: die oben bestimmte Anzahl der aequivalenten Formen mufs in k aufgehn. Es läfst sich daher die Anzahl der wesentlich verschiedenen Formen aus jener Reihe, die mit l bezeichnet werden möge, angeben.

I. Wenn die Determinante D *negativ* ist, so wird, wenn sie numerisch gröfser als 1 ist,

$$l = k;$$

für den besondern Fall $D = -1$,

$$l = \frac{k}{2}.$$

II. Wenn die Determinante D *positiv* ist, so wird

$$l = \frac{\log(T + U\sqrt{D})}{\log(T' + U'\sqrt{D'})}\, k.$$

Um diese Sätze mit dem ersten Satze in diesem §. verbinden zu können, bemerke man, dafs der Werth k auch nur von der Determinante D und der Primzahl p abhängt, und nicht individuell von der Form $\varphi = (a, b, c)$. Es wird also aus jeder der Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_h$ dieselbe Anzahl von Formen ohne Theiler von der Determinante $D' = Dp^2$ erzeugt. Ist daher h die Anzahl der Formen erster Art von der Determinante D, h' die Anzahl der Formen erster Art von der Determinante $D' = Dp^2$, so ergiebt sich die Beziehung, dafs h' und h in einem angebbaren Verhältnifs stehen, und zwar dafs

$$h' = hl$$

ist. Durch successive Anwendung dieses Satzes ist man im Stande, folgendes allgemeine Resultat herzuleiten:

Es sei h die Anzahl der Formen erster Art von der Determinante D, ferner h' die Anzahl der Formen erster Art von der Determinante $D' = DS^2$, wo S irgend eine Zahl bedeutet, es seien $r, r', r'' \ldots$ die ungeraden Primzahlen, die in D' aufgehen, ohne D zu theilen, und es bezeichne das Symbol $\Pi F(r)$ die Bildung eines auf die Primzahlen $r, r', r'' \ldots$ auszudehnenden Products, so ist für eine *negative* Determinante:

$$h' = hS\Pi\left(1-\left(\frac{D}{r}\right)\frac{1}{r}\right).$$

In dem Fall, wo $D = -1$, ist indefs die linke Seite zu verdoppeln.

Für eine *positive* Determinante dagegen hat man, wenn T, U und T', U' die kleinsten positiven Werthe sind, die resp. den Gleichungen $t^2 - Du^2 = 1$, $t'^2 - D'u'^2 = 1$ genügen:

$$h' = hS\,\frac{\log(T+U\sqrt{D})}{\log(T'+U'\sqrt{D'})}\,\Pi\left(1-\left(\frac{D}{r}\right)\frac{1}{r}\right).$$

(Man vergleiche die in §. 1 angeführte *Dirichlet*sche Abhandlung, Bd. XXI pag. 12 dieses Journals.)

§. 6

Um aus dem zweiten Satze des §. 4 ähnliche Resultate zu erhalten, ist folgende Aufgabe zu lösen:

Es sei $\varphi = (a, b, c)$ eine Form der zweiten Art, von der Determinante D: man soll die Formen, welche durch Anwendung der sämmtlichen Substitutionen $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 2$ ist, erzeugt werden, und der Bedingung genügen, aus Formen der ersten Art von der Determinante D durch Multiplication mit

dem Factor 2 abgeleitet zu sein, in Classen ordnen, und die Anzahl der Classen angeben.

Der Untersuchung des §. 2 und dem daselbst ausgesprochenen dritten Resultat gemäfs ist hier, wo unter allen Umständen $D \equiv 1 \pmod 4$ sein mufs, zu unterscheiden, ob $D \equiv 1$, oder $\equiv 5 \pmod 8$. Im ersten Fall, wenn $D \equiv 1 \pmod 8$, giebt das oben aufgestellte System von Substitutionen nur *eine* Form von der vorgeschriebenen Beschaffenheit, also existirt immer nur *eine* solche Classe von Formen. Ist dagegen $D \equiv 5 \pmod 8$, so giebt das System von Substitutionen drei Formen von der verlangten Beschaffenheit, deren Aequivalenz beurtheilt werden mufs. Um aber die Betrachtungen des vorigen Paragraphen nicht zu wiederholen, kann man sogleich folgende Frage stellen:

Die Form $\varphi = (a, b, c)$ gehe durch die zum aufgestellten System gehörige Substitution $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ in die Form f über, welche aus einer Form der ersten Art von der Determinante D durch Multiplication mit dem Factor 2 abgeleitet ist; dann erhält man die sämmtlichen ähnlichen Substitutionen durch die Ausdrücke

$$(1.)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\alpha t - (\alpha b + \gamma c) u}{2}, \\ B = \dfrac{\beta t - (\beta b + \delta c) u}{2}, \\ \Gamma = \dfrac{\gamma t + (\alpha a + \gamma b) u}{2}, \\ \Delta = \dfrac{\delta t + (\beta a + \delta b) u}{2}, \end{cases}$$

wo t, u sämmtliche Zahlen sind, die der unbestimmten Gleichung

$$(2.)\quad t^2 - Du^2 = 4$$

genügen; wieviel verschiedene Classen geben diese Substitutionen $\binom{A, B}{\Gamma, \Delta}$?

Ehe diese Frage beantwortet wird, ist zu bemerken, dafs der Nachweis, dafs A, B, Γ, Δ *ganze* Zahlen werden, für diesen Fall von *Gaufs* (Disq. arith. art. 162) nicht gegeben ist. Doch läfst sich, ebenso wie dort, zeigen, dafs, da $\varphi = (a, b, c)$ eine Form der zweiten Art ist, die Ausdrücke $\frac{t - bu}{2}$, $\frac{t + bu}{2}$ *ganze* Zahlen sind. Daraus folgt dann auch, da in dem aufgestellten Substitutions-System $\beta \equiv 0$, $\delta \equiv 0 \pmod 2$, dafs $B \equiv 0$, $\Delta \equiv 0 \pmod 2$, folglich A und Γ ohne Theiler sind. Es seien $\binom{A, B}{\Gamma, \Delta}$ und $\binom{A', B'}{\Gamma', \Delta'}$

Substitutionen, die resp. den Lösungen t, u und t', u' der Gleichung (2.) entsprechen, so werden dieselben aequivalent sein, oder nicht, je nachdem der Congruenz

$$AT' - A'T \equiv 0 \pmod 2$$

genügt wird oder nicht. Setzt man hier die Werthe aus den Gleichungen (1.) ein, so ergiebt sich:

$$a' \frac{tu' - t'u}{4} \equiv 0 \pmod 2,$$

oder, da a' das Doppelte einer ungeraden Zahl ist: *)

$$(3.) \quad tu' - t'u \equiv 0 \pmod 4.$$

Ganz wie im Fall des vorigen §. sieht man, dafs Lösungen wie t, u und $-t$, $-u$ aequivalente Substitutionen geben; und auch hier ist der Fall einer *positiven* Determinante und der einer *negativen* zu sondern.

I. Ist die Determinante *negativ,* und $-D > 3$, so hat die unbestimmte Gleichung (2.) nur die beiden Lösungen $t = \pm 2$, $u = 0$, welche *einer* Classe von Substitutionen angehören.

Ist $D = -3$, so hat die unbestimmte Gleichung

$$t^2 + 3u^2 = 4$$

die 6 Lösungen $t = \pm 2$, $u = 0$; $t = \pm 1$, $u = 1$; $t = \pm 1$, $u = -1$. Je zwei derselben geben zufolge einer oben gemachten Bemerkung dieselbe Classe von Substitutionen. Die Lösungen $t = 2$, $u = 0$; $t = 1$, $u = 1$; $t = 1$, $u = -1$ bezeichnen aber drei verschiedene Classen.

II. Ist die Determinante D *positiv,* so werden die sämmtlichen Lösungen der unbestimmten Gleichung (2.) wie folgt ausgedrückt:

$$\frac{t_n + u_n \sqrt{D}}{2} = \pm \left(\frac{T' + U' \sqrt{D}}{2} \right)^n,$$

wo T' und U' die kleinsten positiven Werthe sind, welche derselben genügen, und n alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ bedeutet. Zufolge der oben gemachten Bemerkung ist es ausreichend, das obere *positive* Zeichen zu nehmen.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden.

---

*) Die Gründe hierfür sind denen analog, nach welchen a' im Fall des vorigen §. ungerade war. In allen drei Substitutionen, aus welchen hier das System derselben besteht, da $p = 2$, haben nämlich $2b'$ und c' den gemeinschaftlichen Theiler 4; also kann (a', b', c') nicht das Doppelte einer Form der ersten Art sein, ohne dafs a' das Doppelte einer ungeraden Zahl ist.

Wenn U' *gerade* ist, so mufs vermöge der Gleichung

$$T'^2 - DU'^2 = 4,$$

auch T' *gerade* sein. Dann sind $\frac{T'}{2}$, $\frac{U'}{2}$ die kleinsten positiven Werthe der unbestimmten Gleichung

$$T^2 - DU^2 = 1,$$

und man hat

$$\frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T' + U'\sqrt{D}}{2}\right)^n = (T + U\sqrt{D})^n;$$

folglich wird jedes u *gerade,* und deshalb auch jedes t *gerade,* also die Congruenz (3.) immer befriedigt, und es existirt nur *eine* Classe von Substitutionen.

Ist dagegen U' *ungerade,* so ist bemerkt worden (S. die angeführte Abhandlung von *Dirichlet* Bd. XXI pag. 11 dieses Journals), dafs der Exponent 3 den Werth u_3 immer *gerade* macht, und dafs es der kleinste ist, der dies bewirkt. Setzt man

$$\frac{t_3 + u_3\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T' + U'\sqrt{D}}{2}\right)^3 = T + U\sqrt{D},$$

so sind daher T, U die kleinsten positiven Werthe der unbestimmten Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$.

Man kann nun, ganz wie im vorigen Paragraph, beweisen, dafs, wenn man in der Formel

$$\frac{t_\mu + u_\mu\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T' + U'\sqrt{D}}{2}\right)^\mu$$

μ der Reihe nach $= 0, 1, 2$ setzt, die drei entstehenden Lösungen so beschaffen sind, dafs nicht

$$tu' - t'u \equiv 0 \pmod 4$$

werden kann, aufser wenn $t = t'$, $u = u'$ ist. Diese drei Lösungen geben also drei von einander verschiedene Classen von Substitutionen, und mehr Classen existiren nicht; also müssen sich die sämmtlichen Substitutionen unter diese drei repräsentirende vertheilen, was auch direct gezeigt werden kann.

Die Anzahl der Classen, in welche die sämmtlichen ähnlichen Substitutionen zerfallen, welche, je nachdem U' gerade oder ungerade, $= 1$ oder $= 3$ ist, läfst sich durch eine und dieselbe Formel darstellen. Diese Formel kann sogar den Fall $D \equiv 1 \pmod 8$ umfassen, wo immer nur *eine* Classe existirt, und die unbestimmte Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 4,$$

nur durch ein *gerades* u befriedigt werden kann.

Nennt man nämlich T', U' die kleinsten positiven Werthe, welche dieser Gleichung, T, U die kleinsten positiven Werthe, die der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ genügen, so ist jene Anzahl

$$= \frac{\log(T+U\sqrt{D})}{\log\frac{1}{2}(T'+U'\sqrt{D})}.$$

Man sieht, dafs die Anzahl von Classen, in welche die sämmtlichen Substitutionen $\begin{pmatrix} A, B \\ \Gamma, \Delta \end{pmatrix}$ zerfallen, immer nur von der Determinante D abhängt. Man findet daher für die Anzahl l der Classen, welche die aus der Form der zweiten Art $\varphi = (a, b, c)$ auf die vorgeschriebene Art erzeugten Formen bilden, vermöge ganz derselben Betrachtung wie oben, folgendes Resultat:

I. Ist die Determinante D *negativ,* und numerisch gröfser als 3, so wird

$$l = 1, \quad D \equiv 1 \pmod 8; \quad l = 3, \quad D \equiv 5 \pmod 8.$$

Für die Determinante $D = -3$ aber ist

$$l = 1.$$

II. Ist die Determinante D *positiv,* so hat man

$$l = \frac{\log\frac{1}{2}(T'+U'\sqrt{D})}{\log(T+U\sqrt{D})}, \qquad D \equiv 1 \pmod 8;$$

$$l = 3\frac{\log\frac{1}{2}(T'+U'\sqrt{D})}{\log(T+U\sqrt{D})}, \qquad D \equiv 5 \pmod 8.$$

Erwägt man nun, dafs der Werth von l gar nicht individuell von der Form $\varphi = (a, b, c)$ abhängt, sondern nur von der Determinante D, so giebt die Verbindung dieser Resultate mit dem zweiten Satze des §. 4 den Schlufs, dafs jede Form des Systems $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{h'}$ dieselbe Anzahl von Formen erzeugt, welche aus Formen der ersten Art von der Determinante D durch Multiplication mit dem Factor 2 entstanden sind, und so gelangt man zu folgendem Satz:

Es sei h die Anzahl der Formen erster Art von der Determinante D, h' die Anzahl der Formen zweiter Art von derselben Determinante, die immer $\equiv 1 \pmod 4$ sein mufs, so existirt zwischen h und h' die Relation

$$h = h'l.$$

(Man vergleiche die angeführte *Dirichlet*sche Abhandlung Bd. XXI pag. 10 dieses Journals.)

Königsberg in Pr. im November 1854.

15.

Propriétés générales des courbes algébriques et théorèmes sur les coniques homothétiques.

(Par *M. Woepcke.*)

I.

Soient C_1, C_2, C_3 trois courbes de l'ordre n, passant par $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ mêmes points, r étant un des nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, 2n-3$. Les courbes C_2 et C_3 se couperont, en outre, en $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_1, et pareillement les courbes C_1 et C_2 se couperont en $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_3, et les courbes C_1 et C_3 en $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_2. Par les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_1 menons une courbe c_1 de l'ordre $n-1$; elle coupera, en outre, C_2 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2, et C_3 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_3. Par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_3 et par $2(n-1)-r$ des points a_2 faisons passer une courbe c_2 de l'ordre $n-1$, et de même par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2 et par $2(n-1)-r$ des points a_3 une courbe c_3 également de l'ordre $n-1$. Je dis que c_2 passe aussi par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points a_2, que c_3 passe aussi par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points a_3, et que des $(n-1)^2$ points d'intersection des courbes c_2 et c_3, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ sont situés sur la courbe C_1 et $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ sur la courbe c_1.

En effet, considérons les systèmes (C_2, c_2) et (C_3, c_3) comme deux courbes de l'ordre $2n-1$. Le système (C_1, c_1) passe par $\frac{1}{2}(2n-1)\{(2n-1)+3\}-1$ points d'intersection des deux premiers systèmes, à savoir 1° par les n^2 points d'intersection des courbes C_2 et C_3, 2° par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2 et les $2(n-1)-r$ points a_3, intersections des courbes C_2 et c_3, 3° par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_3 et les $2(n-1)-r$ points a_2, intersections des courbes C_3 et c_2. Il s'ensuit que le système (C_1, c_1) passe aussi par les $\frac{1}{2}(2n-1)\{(2n-1)-3\}+1$ autres points d'intersection de (C_2, c_2) avec (C_3, c_3), à savoir 1° par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points d'intersection de C_2 avec c_3, 2° par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points d'intersection de C_3 avec c_2, 3° par les $(n-1)^2$ points d'intersection de c_2 avec c_3.

Or, nous connaissons tous les $n(n-1)$ points que la courbe c_1 a en commun avec la courbe C_2; ce sont les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_1 et les

$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2; conséquemment les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points d'intersection de C_2 avec c_3 ne peuvent pas se trouver sur c_1, mais doivent être situés sur C_1. Donc ces $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points d'intersection de C_2 avec c_3 doivent se trouver parmi les intersections de C_1 avec C_2; mais ce ne peuvent être ni les $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ points communs aux courbes C_1, C_2, C_3, parce que ceux-ci font partie du 1er des trois groupes dont se composent les $\frac{1}{2}(2n-1)\{(2n-1)+3\}-1$ points ci-dessus mentionnés, tandisque les points dont il s'agit ici sont du nombre des $\frac{1}{2}(2n-1)\{(2n-1)-3\}+1$ autres points; et ce ne peuvent pas être non plus les $2(n-1)-r$ points a_3 par lesquels on avait fait passer dès l'abord la courbe c_3. Ces deux groupes de points étant exclus, il ne reste plus des intersections de C_1 avec C_2 que les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points a_3; donc la courbe c_3 passe aussi par ces $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points a_3. On démontre de la même manière que la courbe c_2 passe aussi par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points a_2 par lesquels on ne l'avait pas fait passer d'abord.

Considérons maintenant les $(n-1)^2$ points d'intersection de c_2 avec c_3. La courbe c_2 coupe C_1 en $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_2 et en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ autres points α'; de même elle coupe c_1 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_3 et en $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ autres points β'. Pareillement la courbe c_3 coupe C_1 en $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_3 et en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ autres points α'', et c_1 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2 et en $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ autres points β''. Nous avons vu que le système (C_1, c_1) passe par les $(n-1)^2$ intersections de c_2 avec c_3, c'est à dire que parmi tous les points que c_2 a en commun avec C_1 et c_1, $(n-1)^2$ coincident avec des points que c_3 a en commun avec C_1 et c_1. Or, c_2 n'a en commun avec C_1 et c_1 que les $n(n-1)$ points a_2 et p_3 et les $(n-1)^2$ points α' et β'; de même c_3 n'a en commun avec C_1 et c_1 que les $n(n-1)$ points a_3 et p_2 et les $(n-1)^2$ points α'' et β''; les points a_2 et p_3 étant distincts des points a_3 et p_2 ne peuvent pas être les points coincidants; conséquemment il faut que ce soient les points α' et β' qui coincident avec les points α'' et β'', ou en d'autres termes, il s'ensuit que des $(n-1)^2$ points d'intersection de c_2 avec c_3, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ sont situés sur la courbe C_1 et $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ sur la courbe c_1.

Corollaire.

Étant données une conique H_1 et une droite L_1, si par un point π_1 pris sur la circonférence de H_1 on mène deux droites L_2 et L_3 dont

la première coupe la conique H_1 *en* π_1 *et* p_2, *et la droite* L_1 *en* π_3, *et dont la seconde coupe la conique* H_1 *en* π_1 *et* p_3, *et la droite* L_1 *en* π_2, *et si on fait passer par les points* p_3 *et* π_2 *une conique* H_2 *homothétique à* H_1 *et coupant la conique* H_1 *en* p_3 *et* P, *et la droite* L_1 *en* π_2 *et* p_1; *les points* P, p_1, p_2, π_3 *se trouvent sur une conique* H_3 *homothétique à* H_1 *et* H_2.

On déduit ce corollaire du théorème général en faisant $n=2$, $r=1$ et en prenant $\frac{1}{2}2(2-1)+1=2$ points communs aux trois courbes C_1, C_2, C_3 sur la droite située à l'infini. En faisant $r=0$, on obtient ce théorème connu que trois coniques homothétiques ont toujours trois cordes communes réelles passant par un même point.

Autre énoncé du corollaire.

Si l'on a trois coniques homothétiques H_1, H_2, H_3 *passant par un même point* P *et se coupant en outre deux à deux en trois points* p_1, p_2, p_3; *il existe une infinité de triangles dont les côtés passent par* p_1, p_2, p_3 *et dont les trois sommets sont situés sur les trois coniques respectivement.*

Si les coniques H_1, H_2, H_3 sont des cercles on voit immédiatement que tous ces triangles sont semblables à celui qui a pour sommets les centres des trois cercles donnés.

II.

Soient C_1, C_2, C_3 *trois courbes de l'ordre* n, *passant par* $\frac{1}{2}n(n+1)+1+r$ *mêmes points,* r *étant un des nombres* $0, 1, 2, 3, \ldots, n-3$. *Les courbes* C_2 *et* C_3 *se couperont, en outre, en* $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-r$ *points* a_1, *et pareillement les courbes* C_1 *et* C_2 *se couperont en* $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-r$ *points* a_3, *et les courbes* C_1 *et* C_3 *en* $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-r$ *points* a_2. *Par les* $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-r$ *points* a_1 *menons une courbe* c_1 *de l'ordre* $n-2$; *elle coupera, en outre,* C_2 *en* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ *points* p_2, *et* C_3 *en* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ *points* p_3. *Par les* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ *points* p_3 *et par* $(n-2)-r$ *des points* a_2 *faisons passer une courbe* c_2 *de l'ordre* $n-2$, *et de même par les* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ *points* p_2 *et par* $(n-2)-r$ *des points* a_3 *une courbe* c_3 *également de l'ordre* $n-2$. *Je dis que* c_2 *passe aussi par les* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *autres points* a_2, *que* c_3 *passe aussi par les* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *autres points* a_3, *et que des* $(n-2)^2$ *points d'in-*

tersection des courbes c_2 et c_3, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ sont situés sur la courbe C_1 et $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)-r$ sur la courbe c_1.

Je supprime ici la démonstration de ce théorème parce qu'elle est entièrement semblable à celle du théorème précédent.

III.

1. *Étant données une conique U et une droite u, prenons sur U deux points quelconques s_1 et s_2. Par le point s_1 menons deux transversales a_1 et c_1 dont la première coupe U en s_1 et p_1, et u en l_1, et dont la seconde coupe U en s_1 et π_1, et u en λ_1; prenons ensuite sur U un point quelconque P_1 et désignons par A_1 la conique homothétique à U qui passe par les points P_1, π_1, λ_1, et par C_1 la conique homothétique à U qui passe par les points P_1, p_1, l_1; en vertu du corollaire du théorème Ier les coniques A_1 et C_1 passent par un même point L_1 de la droite u. Faisons ensuite une construction tout à fait pareille pour le point s_2. Je dis que les quatorze points d'intersection dans lesquels d'une part la conique C_1 et la droite c_1 sont rencontrées par la conique C_2 et la droite c_2, et d'autre part la conique A_1 et la droite a_1 par la conique A_2 et la droite a_2, se trouvent sur une courbe du troisième ordre qui passe par les deux points situés sur la droite à l'infini dans la direction des asymptotes de la conique U.*

La démonstration suit immédiatement d'un théorème que j'ai donné dans le journal de M. *Liouville* (Tome XIX, pag. 407), si on considère les systèmes U et u, C_1 et c_1, C_2 et c_2, A_1 et a_1, A_2 et a_2 comme cinq courbes du troisième ordre, et si on remarque que les courbes (C_1, c_1) et (A_1, a_1) d'une part, et les courbes (C_2, c_2) et (A_2, a_2) d'autre part forment deux couples passant par deux systèmes de neuf points pris sur la courbe (U, u).

2. Si on fait a_2 parallèle à a_1 et c_2 parallèle à c_1, la courbe du troisième ordre se décompose dans une conique et la droite située à l'infini. En ce cas les douze points d'intersection de c_1 avec C_2, de C_1 avec c_2, de C_1 avec C_2, de a_1 avec A_2, de A_1 avec a_2, de A_1 avec A_2 se trouvent sur une conique.

3. Si on fait coincider les points s_1 et s_2 et les droites a_1 et a_2, les six points d'intersection de c_1 avec C_2, de C_1 avec c_2 et de A_1 avec A_2 sont sur une conique homothétique à U.

Corollaire.

Étant donnés trois cercles C_1, C_2, C_3 passant par un même point p et se coupant, en outre, en trois points, à savoir C_1 et C_3 en P_2, C_2 et C_3 en P_1, et C_1 et C_2 en P_3, si on mène la corde commune P_3p qui rencontre le cercle C_3 en p et s, et si par s on mène deux transversales quelconques dont l'une c_1 coupe C_2 en q_1 et r_1, et dont l'autre c_2 coupe C_1 en q_2 et r_2, les quatre points q_1, r_1, q_2, r_2 sont toujours sur un cercle C_4.

Si par le point P_3 on mène une transversale quelconque c_3 coupant C_1 en L_1 et C_2 en L_2, le cercle qui passe par les points P_2 et L_1 et par les intersections de c_1 avec C_3 et c_3, et le cercle qui passe par les points P_1 et L_2 et par les intersections de c_2 avec C_3 et c_3, se coupent également sur C_4.

Berlin, au mois de Juin 1856.

16.

Über eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch *C. W. Borchardt.*)

Auf einen Ausdruck f, welcher sowohl von den Variablen $x, x_1 \dots x_n$ als auch von den Variablen $y, y_1 \dots y_n$ eine lineare homogene Funktion ist, und den man kurz eine zweifach lineare homogene Funktion nennen kann, läfst sich eine ähnliche Transformation anwenden, wie diejenige, vermittelst welcher man bekanntlich eine von $n+1$ Variablen $x, x_1 \dots x_n$ abhängige quadratische Form nur auf *eine* Weise als Quadratsumme $Az^2 + A_1 z_1^2 + \cdots + A_m z_m^2 + \cdots + A_n z_n^2$ so darstellt, dafs (für jedes m von $m = 0$ bis $m = n$) z_m eine nur die Variablen $x_m, x_{m+1} \dots x_n$ enthaltende lineare homogene Funktion ist. Die in Rede stehende Transformation besteht in Folgendem:

1. Es seien $u, u_1 \dots u_n$ lineare homogene Funktionen von $x, x_1 \dots x_n$, nämlich:

$$(1.)\quad \begin{cases} u = \alpha_{0,0}x + \alpha_{0,1}x_1 + \cdots + \alpha_{0,n}x_n \\ u_1 = \alpha_{1,0}x + \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n \\ \vdots \\ u_n = \alpha_{n,0}x + \alpha_{n,1}x_1 + \cdots + \alpha_{n,n}x_n \end{cases}$$

Bildet man aus denselben Coefficienten, indem man ihre Horizontalreihen mit ihren Vertikalreihen vertauscht, $n+1$ andere lineare homogene Funktionen $v, v_1 \dots v_n$ der Variablen $y, y_1 \dots y_n$:

$$(2.)\quad \begin{cases} v = \alpha_{0,0}y + \alpha_{1,0}y_1 + \cdots + \alpha_{n,0}y_n \\ v_1 = \alpha_{0,1}y + \alpha_{1,1}y_1 + \cdots + \alpha_{n,1}y_n \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{0,n}y + \alpha_{1,n}y_1 + \cdots + \alpha_{n,n}y_n \end{cases}$$

sodafs $u, u_1 \dots u_n$ und $v, v_1 \dots v_n$ zwei solche Systeme linearer homogener Funktionen resp. von $x, x_1 \dots x_n$ und $y, y_1 \dots y_n$ sind, welche man kurz zwei *conjugirte* Systeme nennt, alsdann hat man, wie unmittelbar erhellt, die

identische Gleichung

$$(3.)\quad yu + y_1u_1 + \cdots + y_nu_n = xv + x_1v_1 + \cdots + x_nv_n.$$

Umgekehrt ist die Gleichung (3.) die für zwei *conjugirte* Systeme von Variablen definirende Gleichung. Weifs man nämlich, dafs $u, u_1 \ldots u_n$ und $v, v_1 \ldots v_n$ zwei Systeme linearer homogener Funktionen resp. von $x, x_1 \ldots x_n$ und von $y, y_1 \ldots y_n$ sind, so genügt die Gleichung (3.), um zu beweisen, dafs beide Systeme conjugirt zu einander sind. Denn man substituire die Werthe von $u, u_1 \ldots u_n$ aus (1.) in (3.), so ergeben sich die Gleichungen (2.).

Definirt man nun f durch die Doppelgleichung

$$(4.)\quad f = yu + y_1u_1 + \cdots + y_nu_n = xv + x_1v_1 + \cdots + x_nv_n,$$

so ist f der allgemeinste sowohl in Bezug auf $x, x_1 \ldots x_n$ als auf $y, y_1 \ldots y_n$ lineare und homogene Ausdruck.

2. Es sei

$$(5.)\quad \begin{cases} u_1' = u_1 - \frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{0,0}}u & v_1' = v_1 - \frac{\alpha_{0,1}}{\alpha_{0,0}}v \\ u_2' = u_2 - \frac{\alpha_{2,0}}{\alpha_{0,0}}u & v_2' = v_2 - \frac{\alpha_{0,2}}{\alpha_{0,0}}v \\ \vdots & \vdots \\ u_n' = u_n - \frac{\alpha_{n,0}}{\alpha_{0,0}}u & v_n' = v_n - \frac{\alpha_{0,n}}{\alpha_{0,0}}v \end{cases}$$

sodafs in $u_1', u_2' \ldots u_n'$ die Variable x fehlt, in $v_1', v_2' \ldots v_n'$ die Variable y, dann verwandelt sich der Ausdruck (4.) in den folgenden:

$$f = u\left\{ y + \frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{0,0}}y_1 + \frac{\alpha_{2,0}}{\alpha_{0,0}}y_2 + \cdots + \frac{\alpha_{n,0}}{\alpha_{0,0}}y_n \right\} + y_1u_1' + y_2u_2' + \cdots + y_nu_n'$$

$$= v\left\{ x + \frac{\alpha_{0,1}}{\alpha_{0,0}}x_1 + \frac{\alpha_{0,2}}{\alpha_{0,0}}x_2 + \cdots + \frac{\alpha_{0,n}}{\alpha_{0,0}}x_n \right\} + x_1v_1' + x_2v_2' + \cdots + x_nv_n'$$

oder, was dasselbe ist, es wird

$$f = \frac{uv}{\alpha_{0,0}} + f_1,$$

wo

$$f_1 = y_1u_1' + y_2u_2' + \cdots + y_nu_n' = x_1v_1' + x_2v_2' + \cdots + x_nv_n'.$$

Diese Doppelgleichung zeigt, zufolge der früheren Erörterung, dafs die linearen homogenen Funktionen $u_1', u_2' \ldots u_n'$ von $x_1, x_2 \ldots x_n$ und $v_1', v_2' \ldots v_n'$ von $y_1, y_2 \ldots y_n$ wiederum zwei *conjugirte* Systeme bilden, deren Coefficienten durch α' mit zwei unteren Indices bezeichnet werden mögen.

3. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man nach m maliger Transformation

$$(6.)\quad f = \frac{uv}{\alpha_{0,0}} + \frac{u'_1 v'_1}{\alpha'_{1,1}} + \frac{u''_2 v''_2}{\alpha''_{2,2}} + \cdots + \frac{u^{(m-1)}_{m-1} v^{(m-1)}_{m-1}}{\alpha^{(m-1)}_{m-1,m-1}} + f_m,$$

$$f_m = y_m u^{(m)}_m + y_{m+1} u^{(m)}_{m+1} + \cdots + y_n u^{(m)}_n = x_m v^{(m)}_m + x_{m+1} v^{(m)}_{m+1} + \cdots + x_n v^{(m)}_n,$$

wo die linearen homogenen Funktionen $u^{(m)}_m, u^{(m)}_{m+1} \ldots u^{(m)}_n$ von $x_m, x_{m+1} \ldots x_n$ und $v^{(m)}_m, v^{(m)}_{m+1} \ldots v^{(m)}_n$ von $y_m, y_{m+1} \ldots y_n$ ebenfalls zwei *conjugirte* Systeme bilden, deren Coefficienten resp. durch

$$(7.)\quad \begin{cases} \alpha^{(m)}_{m,m} & \alpha^{(m)}_{m,m+1} & \ldots & \alpha^{(m)}_{m,n} \\ \alpha^{(m)}_{m+1,m} & \alpha^{(m)}_{m+1,m+1} & \ldots & \alpha^{(m)}_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \alpha^{(m)}_{m,m} & \alpha^{(m)}_{m+1,m} & \ldots & \alpha^{(m)}_{n,m} \\ \alpha^{(m)}_{m,m+1} & \alpha^{(m)}_{m+1,m+1} & \ldots & \alpha^{(m)}_{n,m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

bezeichnet werden mögen.

Für $k = 1, 2 \ldots n$ ist u'_k eine lineare Verbindung von u und u_k.

Für $k = 2, 3 \ldots n$ ist u''_k eine lineare Verbindung von u'_k und u'_1, daher auch von u, u_1 und u_k u. s. w.

Allgemein: für $k = m, m+1 \ldots n$ ist $u^{(m)}_k$ eine lineare Verbindung von $u, u_1 \ldots u_{m-1}$ und u_k, und zwar eine solche, in welcher $x, x_1 \ldots x_{m-1}$ nicht vorkommen. Hierdurch allein wird $u^{(m)}_k$, abgesehen von einem constanten Faktor, bestimmt, und zwar als die Determinante des Systems

$$(8.)\quad \begin{cases} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,m-1} & u \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m-1} & u_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-1,0} & \alpha_{m-1,1} & \ldots & \alpha_{m-1,m-1} & u_{m-1} \\ \alpha_{k,0} & \alpha_{k,1} & \ldots & \alpha_{k,m-1} & u_k . \end{cases}$$

Aehnliches gilt für die Bestimmung von $v^{(m)}_k$.

4. Die übrig bleibende Ermittlung des constanten Faktors geschieht einfach durch folgende Betrachtung:

Man setze gleichzeitig

$$u = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \quad \ldots \quad u_{m-1} = 0,$$

so folgt hieraus, wie leicht zu sehen,

$$u'_1 = 0, \quad u'_2 = 0 \quad \ldots \quad u'_{m-1} = 0$$

und hieraus auf dieselbe Weise

$$u''_2 = 0 \quad \ldots \quad u''_{m-1} = 0$$

u. s. w. bis man endlich zu der letzten Gleichung:

$$u^{(m-1)}_{m-1} = 0 \quad \text{gelangt.}$$

Ist nun k eine der Zahlen $m, m+1 \ldots n$, so folgt aus $u = 0$ in Folge der Gleichungen (5.):

$$u'_k = u_k,$$

ebenso folgt aus $u'_1 = 0$:

$$u''_k = u'_k$$

u. s. w. und endlich aus $u^{(m-1)}_{m-1} = 0$:

$$u^{(m)}_k = u^{(m-1)}_k.$$

Als schliefsliches Resultat erhält man also, dafs wenn gleichzeitig $u, u_1, \ldots u_{m-1}$ verschwinden,

$$u^{(m)}_k = u_k$$

wird (wo $k = m, m+1 \ldots n$ sein kann).

Hieraus geht hervor, dafs die Determinante des Systems (8.) durch den Coefficienten von u_k in derselben dividirt werden mufs, d. h. durch die aus

$$\begin{matrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,m-1} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m-1} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m-1,0} & \alpha_{m-1,1} & \ldots & \alpha_{m-1,m-1} \end{matrix}$$

gebildete Determinante, um $u^{(m)}_k$ zu geben.

Bezeichnet man mit ***Bezout*** die Determinante dadurch, dafs man ein positiv zu nehmendes Glied derselben in runde Klammern einschliefst, so erhält man nach Einsetzung der Ausdrücke (1.) von $u, u_1 \ldots u_{m-1}, u_k$:

$$(9.) \quad \begin{cases} (\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1})\, u^{(m)}_k \\ = (\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{k,m})\, x_m \\ + (\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{k,m+1})\, x_{m+1} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{k,n})\, x_n \end{cases}$$

und hieraus endlich ergiebt sich für die Coefficienten (7.) die Gleichung:

$$(10.) \quad \alpha^{(m)}_{k,i} = \frac{(\alpha_{0,0}\, \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1}\, \alpha_{k,i})}{(\alpha_{0,0}\, \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1})},$$

(wo sowohl i als k die Werthe $m, m+1, \ldots n$ haben können).

5. Die Gleichungen (6.), (9.), (10.), in deren erster man $m = n$ zu setzen hat, enthalten die Transformation, von der hier die Rede ist, und geben:

$$f = \frac{uv}{\alpha_{0,0}} + \frac{\alpha_{0,0}\, u'_1 v'_1}{(\alpha_{0,0}\alpha_{1,1})} + \frac{(\alpha_{0,0}\alpha_{1,1})\, u''_2 v''_2}{(\alpha_{0,0}\alpha_{1,1}\alpha_{2,2})} + \ldots + \frac{(\alpha_{0,0}\alpha_{1,1} \ldots \alpha_{n-1,n-1})\, u^{(n)}_n v^{(n)}_n}{(\alpha_{0,0}\alpha_{1,1} \ldots \alpha_{n-1,n-1}\alpha_{n,n})},$$

wo

$$(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \ldots\ \alpha_{m-1,m-1})u_m^{(m)} = \sum_{i=m}^{i=n}(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \ldots\ \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{m,i})x_i$$

$$(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \ldots\ \alpha_{m-1,m-1})v_m^{(m)} = \sum_{i=m}^{i=n}(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \ldots\ \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{i,m})y_i.$$

Man kann dies Resultat in folgendes Theorem zusammenfassen:

Theorem. Es sei

$$f = \sum_{i=0}^{i=n}\sum_{k=0}^{k=n}\alpha_{k,i}\,x_i\,y_k$$

eine lineare homogene Funktion sowohl von $x, x_1 \ldots x_n$ als von $y, y_1 \ldots y_n$, so kann dieselbe nur auf *eine* Weise in der Form

$$f = AUV + A_1U_1V_1 + \cdots + A_mU_mV_m + \cdots + A_nU_nV_n$$

so dargestellt werden, dafs (für jedes m) U_m und V_m zwei resp. nur die Variablen $x_m, x_{m+1} \ldots x_n$ und $y_m, y_{m+1} \ldots y_n$ enthaltende lineare Funktionen sind. Diese Darstellung ist:

$$f = \frac{UV}{p_0} + \frac{U_1V_1}{p_0p_1} + \cdots + \frac{U_mV_m}{p_{m-1}p_m} + \cdots + \frac{U_nV_n}{p_{n-1}p_n},$$

wo U_m und V_m die Determinanten der Systeme

$$\begin{array}{llll} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,m-1}\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m-1}\ \dfrac{\partial f}{\partial y_1} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \ldots & \alpha_{m,m-1}\ \dfrac{\partial f}{\partial y_m} \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \ldots & \alpha_{m-1,0}\ \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{m-1,1}\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{0,m} & \alpha_{1,m} & \ldots & \alpha_{m-1,m}\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{array}$$

und p_m die Determinante des Systems

$$\begin{array}{llll} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,m} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \ldots & \alpha_{m,m} \end{array}$$

bedeuten.

Läfst man hierin die Variablen $x, x_1 \ldots x_n$ und $y, y_1 \ldots y_n$ mit einander zusammenfallen und unterwirft zugleich die Coefficienten α der Bedingung, dafs sie ungeändert bleiben wenn man Horizontal- und Vertikalreihen mit einander vertauscht, so erhält man das bekannte

Theorem. Eine quadratische Form

$$f = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=n} \alpha_{k,i}\, x_i\, x_k$$

(wo $\alpha_{k,i} = \alpha_{i,k}$ ist) läfst sich nur auf *eine* Weise in der Form der Quadratsumme

$$f = AU^2 + A_1U_1^2 + \cdots + A_mU_m^2 + \cdots + A_nU_n^2$$

so darstellen, dafs (für jedes m) U_m eine lineare homogene Funktion nur von den Variablen x_m, $x_{m+1} \ldots x_n$ ist. Diese Darstellung ist:

$$f = \frac{U^2}{p_0} + \frac{U_1^2}{p_0 p_1} + \cdots + \frac{U_m^2}{p_{m-1} p_m} + \cdots + \frac{U_n^2}{p_{n-1} p_n},$$

wo U_m die Determinante des Systems

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,m-1} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m-1} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \ldots & \alpha_{m,m-1} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_m} \end{array}$$

und p_m die Determinante des Systems

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,m} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \ldots & \alpha_{m,m} \end{array}$$

bedeuten.

17.

Extrait d'une lettre de M. *C. Hermite* à M. *Borchardt* sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynomes homogènes du second degré.

Paris, ce 24 avril 1856.

. . . . . Dans le cas, où Vous le jugeriez convenable, Vous pourriez publier la démonstration suivante, du principe découvert par ***Jacobi,*** et employé par lui à la démonstration des belles formules pour les conditions de réalité des racines des équations algébriques, que Vous avez données dans Votre mémoire, sur l'équation à l'aide de laquelle etc. Rien d'ailleurs n'est plus simple que d'établir ce principe que j'énoncerai ainsi:

Quelque substitution réelle, que l'on employe, pour réduire un polynome homogène du second degré à une somme de carrés, le nombre des coefficients de ces carrés qui auront un signe donné sera toujours le même.

Supposons en effet qu'un polynome homogène du second degré f, à $n+1$ indéterminées $x, y, \ldots v$ se réduise à l'expression suivante:

$$f = \varepsilon_0 x_0^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n^2$$

en faisant:

$$(1.)\quad \begin{cases} x = \alpha x_0 + \alpha' x_1 + \cdots + \alpha^{(n)} x_n \\ y = \beta x_0 + \beta' x_1 + \cdots + \beta^{(n)} x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v = \lambda x_0 + \lambda' x_1 + \cdots + \lambda^{(n)} x_n \end{cases}$$

Si l'on donne une seconde substitution également réelle,

$$(2.)\quad \begin{cases} x = a X_0 + a' X_1 + \cdots + a^{(n)} X_n \\ y = b X_0 + b' X_1 + \cdots + b^{(n)} X_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v = l X_0 + l' X_1 + \cdots + l^{(n)} X_n \end{cases}$$

de laquelle résulte la transformation analogue:

$$f = \eta_0 X_0^2 + \eta_1 X_1^2 + \cdots + \eta_n X_n^2$$

il s'agit de prouver que le nombre des coefficients ε, qui auront un signe donné, sera égal au nombre des coefficients η, qui auront le même signe.

A cet effet, et pour fixer les idées, supposons négatifs, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_i$ et positifs les coefficients suivants: $\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \ldots \varepsilon_n$. Supposons aussi que $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_k$ soient négatifs, tandis que $\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \ldots \eta_n$ seront positifs. On aura d'abord en égalant entre elles les deux expressions de la forme f,

$$\varepsilon_0 x_0^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n^2 = \eta_0 X_0^2 + \eta_1 X_1^2 + \cdots + \eta_n X_n^2$$

les variables étant liées par ces équations:

$$(3.)\quad \begin{cases} \alpha x_0 + \alpha' x_1 + \cdots + \alpha^{(n)} x_n = a X_0 + a' X_1 + \cdots + a^{(n)} X_n \\ \beta x_0 + \beta' x_1 + \cdots + \beta^{(n)} x_n = b X_0 + b' X_1 + \cdots + b^{(n)} X_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda x_0 + \lambda' x_1 + \cdots + \lambda^{(n)} x_n = l X_0 + l' X_1 + \cdots + l^{(n)} X_n \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin, j'observe qu'on pourra toujours les résoudre par rapport aux indéterminées x ou X, si l'invariant de f est différent de zéro, et si aucune des quantités ε et η, n'est nulle. Soit en effet, J l'invariant de f, δ et d, les déterminants relatifs aux substitutions (1.) et (2.), on aura:

$$\varepsilon_0\ \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = J\delta^2$$
$$\eta_0\ \eta_1 \ldots \eta_n = Jd^2$$

de sorte que d et δ, ne pourront jamais être supposés nuls sous les conditions admises.

Cela remarqué, remplaçons $x_0, x_1, \ldots x_i$ d'une part, $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots x_n$ de l'autre par: $\frac{x_0}{\sqrt{-\varepsilon_0}}, \frac{x_1}{\sqrt{-\varepsilon_1}}, \cdots \frac{x_i}{\sqrt{-\varepsilon_i}}$ et: $\frac{x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon_{i+1}}}, \frac{x_{i+2}}{\sqrt{\varepsilon_{i+2}}}, \cdots \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon_n}}$. Remplaçons de même $X_0, X_1, \ldots X_k$ par: $\frac{X_0}{\sqrt{-\eta_0}}, \frac{X_1}{\sqrt{-\eta_1}}, \cdots \frac{X_k}{\sqrt{-\eta_k}}$ et: $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots X_n$ par: $\frac{X_{k+1}}{\sqrt{\eta_{k+1}}}, \frac{X_{k+2}}{\sqrt{\eta_{k+2}}}, \cdots \frac{X_n}{\sqrt{\eta_n}}$; puis effectuons par rapport à ces nouvelles indéterminées, la résolution des équations (3.). On sera par là amené à la relation suivante:

$$\begin{aligned} &- x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \cdots + x_n^2 \\ &= - X_0^2 - X_1^2 - \cdots - X_k^2 + X_{k+1}^2 + X_{k+2}^2 + \cdots + X_n^2 \end{aligned}$$

où l'on pourra supposer:

$$(4.)\quad \begin{cases} x_0 = p_0 X_0 + q_0 X_1 + \cdots + s_0 X_n \\ x_1 = p_1 X_0 + q_1 X_1 + \cdots + s_1 X_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = p_n X_0 + q_n X_1 + \cdots + s_n X_n \end{cases}$$

les coefficients étant essentiellement ***réels.*** Or je vais établir l'impossibilité d'une telle relation dès que l'on suppose k différent de i. Pour fixer les idées j'admettrai qu'on ait $k > i$, et j'observerai que parmi les diverses équations auxquelles les coefficients de la substitution (4.) doivent satisfaire, on voit s'offrir en premier lieu celle-ci:

$$-p_0^2 - p_1^2 - \cdots - p_i^2 + p_{i+1}^2 + p_{i+2}^2 + \cdots + p_n^2 = -1$$

qui ne pourrait évidemment être vérifiée que pour des valeurs imaginaires des quantités p, si l'on avait:

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 0, \quad \ldots \quad p_i = 0.$$

Or on va voir comment de la substitution (4.), il est possible de déduire une nouvelle, qui transformant le polynome

$$(5.) \qquad -x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \cdots + x_n^2$$

en:

$$(6.) \qquad -X_0^2 - X_1^2 - \cdots - X_k^2 + X_{k+1}^2 + X_{k+2}^2 + \cdots + X_n^2$$

ait encore ses coefficients réels, et de plus présente ce caractère, que l'indéterminée X_0 ait disparu dans les expressions des indéterminées $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$. Comme on suppose $k > i$, $k-1$ sera au moins égal à i, et les conditions précédemment énoncées, se trouvant réalisées, notre théorème se trouve par là même démontré.

A cet effet nous remarquerons qu'on peut sans changer le polynome (6.) y remplacer X_0 et X_1, par: $\cos\varphi X_0 + \sin\varphi X_1$, $\sin\varphi X_0 - \cos\varphi X_1$ et introduire par là un angle arbitraire dans les formules (4.), qui deviendront:

$$\begin{aligned}
x_0 &= (p_0\cos\varphi + q_0\sin\varphi)X_0 + (p_0\sin\varphi - q_0\cos\varphi)X_1 + \cdots \\
x_1 &= (p_1\cos\varphi + q_1\sin\varphi)X_0 + (p_1\sin\varphi - q_1\cos\varphi)X_1 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= (p_n\cos\varphi + q_n\sin\varphi)X_0 + (p_n\sin\varphi - q_n\cos\varphi)X_1 + \cdots
\end{aligned}$$

Maintenant et quelque soient les coefficients p, q, etc. on pourra disposer de cet angle, de manière à avoir:

$$p_0\cos\varphi + q_0\sin\varphi = 0$$

et l'on sera amené à une nouvelle substitution également réelle, où l'indéterminée X_0, aura déjà disparu dans la valeur de x_0. Cela fait, partons de cette nouvelle substitution pour y introduire de nouveau un angle arbitraire, en remplaçant X_1 et X_2, par: $\cos\varphi X_1 + \sin\varphi X_2$, $\sin\varphi X_1 - \cos\varphi X_2$, ce qui se fera encore, sans changer le polynome (6.). On voit en raisonnant comme

tout à l'heure, qu'on pourra annuler le coefficient de X_1, dans l'expression de x_0. Or des calculs analogues pourront être continués, jusqu'à ce qu'on soit amené à remplacer X_{k-1} et X_k par: $\cos\varphi X_{k-1} + \sin\varphi X_k$, $\sin\varphi X_{k-1} - \cos\varphi X_k$, et en dernière analyse, on voit que de la substitution (4.) on aura déduit par des opérations toujours possibles, une substitution réelle dans laquelle X_0, $X_1, \ldots X_{k-1}$ auront disparu de l'expression de l'indéterminée x_0. Ce premier point établi, nous concevons qu'on repète, en raisonnant sur l'indéterminée suivante x_1, des opérations toutes semblables, mais en se bornant à faire disparaître de proche en proche, dans l'expression de cette indéterminée, les coefficients de X_0, X_1, $\ldots$ X_{k-2}. On n'aura ainsi besoin d'introduire dans les substitutions successives que les indéterminées X_0, X_1, $\ldots$ X_{k-1}, de sorte que ces calculs faits, on ne verra reparaître dans la valeur de x_0 aucune des indéterminées, qui en ont déjà été éliminées. Cela posé, il est clair qu'en raisonnant d'une manière analogue successivement sur x_2, x_3 etc., on sera en dernier lieu conduit à faire disparaître la seule indéterminée X_0, de la valeur de x_{k-1}. Elle ne se trouvera point d'ailleurs dans les indéterminées précédentes, x_{k-2}, x_{k-3}, $\ldots$ x_0, et de la sorte on sera parvenu à une dernière substitution, conséquence de la substitution (4.), transformant encore le polynome (5.) dans le polynome (6.), et qui tombe dans le cas indiqué plus haut, où il est manifestement impossible que les coefficients soient des quantités réelles.

18.

Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch *C. W. Borchardt.*)

1.

Man weifs, dafs jede reelle rationale ganze homogene Function 2ten Grades auf unendlich viel Arten als ein lineares Aggregat von Quadraten reeller linearer von einander unabhängiger Functionen dargestellt werden kann. Wie verschieden aber auch diese Darstellungen sein mögen, ***so wird in allen die Anzahl der positiven, so wie die Anzahl der negativen Quadrate dieselbe bleiben.***

Man nennt in diesem Satze positive und negative Quadrate des Aggregates diejenigen, welche mit einem positiven oder negativen Coefficienten behaftet sind. Man kann jeden dieser Coefficienten, positiv genommen, in das Quadrat, in welches er multiplicirt ist, einbegreifen, indem man für αu^2 oder $-\alpha u^2$, wo α einen constanten Coefficienten und u eine reelle lineare homogene Function bedeutet, $(\sqrt{\alpha}.u)^2$ oder $-(\sqrt{\alpha}.u)^2$ schreibt, wodurch die lineare homogene Function, welche in's Quadrat erhoben wird, nicht aufhört, reell zu sein. Es kann daher der Allgemeinheit unbeschadet angenommen werden, dafs alle Quadrate nur mit dem Coefficienten $+1$ oder -1 behaftet sind.

Unter dieser Annahme kann der obige Satz so ausgesprochen werden:

Fundamentalsatz.

Es seien $r_1, r_2, \ldots r_i$, $s_1, s_2, \ldots s_k$ und $u_1, u_2, \ldots u_m$, $v_1, v_2, \ldots v_n$ zwei Systeme reeller von einander unabhängiger *) linearer homogener Functionen, zwischen deren Quadraten die lineare Gleichung

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 - s_1^2 - s_2^2 - \cdots - s_k^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 - v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2$$

identisch Statt finde, so ist nothwendig

$$i = m, \qquad k = n.$$

---

*) d. h. zwei Systeme, deren jedes aus Functionen besteht, die von einander unabhängig sind.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich aus den folgenden elementaren Betrachtungen.

Wenn man, was immer verstattet ist, eine Anzahl von einander unabhängiger linearer homogener Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ an die Stelle einer gleichen Anzahl von Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_i$ in eine lineare homogene Function A einführt, so wird diese wieder eine lineare homogene Function der Gröfsen $B_1, B_2, \ldots B_i$ und der übrigen Variablen x_{i+1}, x_{i+2}, etc.

$$A = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots + \lambda_i B_i + \mu_1 x_{i+1} + \mu_2 x_{i+2} + \text{etc.}$$

Wenn die sämmtlichen Coefficienten μ_1, μ_2 etc. verschwinden, wird A blofs durch die Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ bestimmt, und dann mufs es auch immer zugleich mit ihnen verschwinden. Wenn dagegen auch nur einer der Coefficienten μ_1, μ_2 etc. nicht verschwindet, ist A von den Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ unabhängig, indem es für alle Werthe, die man diesen Functionen beilegt, seinerseits noch wieder jeden beliebigen Werth annehmen kann, und es braucht daher in diesem Falle A auch nicht zugleich mit den Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ zu verschwinden. Hat man nun k von einander unabhängige lineare homogene Functionen $A_1, A_2, \ldots A_k$ und ist $k > i$, so kann es niemals geschehen, dafs durch diese Einführung der Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ als Variablen an die Stelle der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_i$ in allen Functionen $A_1, A_2, \ldots A_k$ zugleich alle übrigen Variablen x_{i+1}, x_{i+2} etc. von selbst herausgehen. Denn sonst wären $A_1, A_2, \ldots A_k$ blofs Functionen von $B_1, B_2, \ldots B_i$, und niemals kann die Anzahl von einander unabhängiger Functionen, wie $A_1, A_2, \ldots A_k$ sein sollen, gröfser als die Anzahl der Variablen sein, wie es hier der Fall wäre, da man vorausgesetzt hat, dafs $k > i$. Es werden also die k Functionen $A_1, A_2, \ldots A_k$ nicht nothwendig zugleich mit den i Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ verschwinden müssen. Hat man mehr als i lineare homogene Functionen $B_1, B_2, \ldots B_m$, von denen aber nur $B_1, B_2, \ldots B_i$ von einander unabhängig sind, während die übrigen $B_{i+1}, B_{i+2}, \ldots B_m$ durch sie bestimmt sind, so werden alle Functionen $B_1, B_2, \ldots B_m$ verschwinden, wenn $B_1, B_2, \ldots B_i$ verschwinden. Ist nun $m < k$, also gewifs $i < k$, so hat man das folgende Lemma:

Lemma.

Wenn eine Anzahl von einander unabhängiger homogener linearer Functionen die Anzahl anderer homogener linearer Functionen über-

trifft, so kann man immer bewirken, dafs diese letzteren verschwinden, ohne dafs zugleich auch die ersteren alle verschwinden.

Dieses ***Lemma,*** welches vielleicht nicht einmal eines Beweises bedurft hätte, führt sogleich zu dem aufgestellten Fundamentalsatz.

Man nehme nämlich an, dafs in der identischen Gleichung

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 - s_1^2 - s_2^2 - \cdots - s_k^2$$
$$= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 - v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2$$

die Zahlen i und m verschieden sein könnten, und dafs $m < i$, so wäre auch $m + k < i + k$, und es könnten die $m + k$ Functionen

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_m,\ s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_k$$

verschwinden, ohne dafs die $i + k$ von einander unabhängigen Functionen

$$r_1,\ r_2,\ \ldots\ r_i,\ s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_k$$

alle mit ihnen zugleich verschwinden. Man hätte dann die Gleichung

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 = -v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2,$$

in der $r_1, r_2, \ldots r_i, v_1, v_2, \ldots v_n$ reelle Gröfsen sind, und $r_1, r_2, \ldots r_i$ nicht alle verschwinden, welches absurd ist. Ganz eben so beweist man, dafs auch n und k nicht von einander verschieden sein können, wozu man nur in der gegebnen identischen Gleichung alle Zeichen umzukehren und dieselben Betrachtungen zu wiederholen braucht.

Der vorstehende Beweis zeigt, dafs man die Bedingung, dafs $u_1, u_2, \ldots u_m$, $v_1, v_2, \ldots v_n$ von einander unabhängig seien, fortlassen, und dann den Satz etwas allgemeiner so aussprechen kann:

Wenn $r_1, r_2, \ldots r_i, s_1, s_2, \ldots s_k; u_1, u_2, \ldots u_m, v_1, v_2, \ldots v_n$ ***reelle homogene lineare Functionen und***

$$r_1,\ r_2,\ \ldots\ r_i,\ s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_k$$

von einander unabhängig sind, so kann eine identische Gleichung

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 - s_1^2 - s_2^2 - \cdots - s_k^2$$
$$= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 - v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2$$

niemals bestehen, wenn $m < i$ ***oder*** $n < k$.

Der aufgestellte Satz zeigt, dafs die reellen homogenen Functionen zweiten Grades sich spezifisch von einander unterscheiden, je nach der Anzahl positiver und negativer Quadrate reeller linearer von einander unabhängiger Functionen, durch welche sie dargestellt werden können, indem diese Anzahl von der

Wahl der linearen Functionen, die man sehr verschiedenartig treffen kann, gänzlich unabhängig ist.

Die Aufgabe, reelle lineare Substitutionen anzugeben, durch welche ein Ausdruck

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 - s_1^2 - s_2^2 - \cdots - s_k^2$$

wieder dieselbe Form

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_i^2 - v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_k^2$$

erhält, kann auf die ähnliche Aufgabe zurückgeführt werden, in welcher die Quadrate der beiden Aggregate sämmtlich positiv sind. Hat man nämlich $i+k$ lineare Functionen von $r_1, r_2, \ldots r_i, v_1, v_2, \ldots v_k$, welche mit $u_1, u_2, \ldots u_i, s_1, s_2, \ldots s_k$ bezeichnet werden sollen, von der Beschaffenheit, dafs die identische Gleichung Statt findet:

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_i^2 + s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2$$
$$= r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 + v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_k^2,$$

welche mit der vorgelegten übereinkommt, so kann man mittelst der $i+k$ linearen Gleichungen, welche das eine System Variablen durch das andere bestimmen, jede $i+k$ der $2(i+k)$ Variablen linear durch die übrigen $i+k$ ausdrücken, und daher auch die Grōfsen $r_1, r_2, \ldots r_i, s_1, s_2, \ldots s_k$ durch die Gröfsen $u_1, u_2, \ldots u_i, v_1, v_2, \ldots v_k$.

2.

Aus dem Fundamentalsatz ergiebt sich sogleich der bekannte Satz: dafs die Gleichung eines Kegelschnitts oder einer Fläche 2ten Grades immer eine Curve oder Fläche derselben Art darstellt, das Coordinatensystem mag ein rechtwinkliges oder ein beliebiges schiefwinkliges sein. Werden nämlich für zwei verschiedene Coordinatensysteme, auf welche die gegebene Gleichung der Fläche bezogen wird, die auf die Richtung der Hauptachsen bezogenen Gleichungen

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Dp + Eq + Fr + G = 0,$$
$$A'p'^2 + B'q'^2 + C'r'^2 + D'p' + E'q' + F'r' + G = 0,$$

so werden die ersten Theile der beiden Gleichungen identisch, wenn man für p, q, r und für p', q', r' gewisse reelle lineare homogene von einander unabhängige Functionen der Coordinaten x, y, z substituirt. Damit aber diese Identität Statt finden kann, mufs es nach dem Theorem unter den Coefficienten A, B, C eben so viel positive, negative und verschwindende geben, als unter

den Gröfsen A', B', C'. Die Art der Fläche hängt aber davon ab, wie viel von diesen Gröfsen positive, negative oder verschwindende sind, wodurch der Satz für die Flächen folgt, und ebenso auch für die Kegelschnitte erhellt.

Auf ähnliche Art und ebenso unmittelbar ergiebt sich aus dem Fundamentalsatz der bekannte Satz,

> dafs wenn eine Fläche zweiter Ordnung, durch eine auf ein System conjugirter Durchmesser bezogene Gleichung, $Ap^2+Bq^2+Cr^2=1$, gegeben ist, immer gleich viel von den Coefficienten A, B, C positiv und negativ werden, welches System conjugirter Durchmesser der Fläche man auch zu Coordinatenachsen genommen hat.

Wenn nämlich $Ap^2+Bq^2+Cr^2=1$ und $A'p'^2+B'q'^2+C'r'^2=1$ Gleichungen derselben Fläche, auf verschiedene Systeme conjugirter Durchmesser bezogen, bedeuten, so müssen wieder die beiden Ausdrücke $Ap^2+Bq^2+Cr^2$ und $A'p'^2+B'q'^2+C'r'^2$ identisch werden, wenn man für p, q, r und für p', q', r' gewisse reelle lineare homogene von einander unabhängige Functionen der Coordinaten x, y, z substituirt, und daher unter den Coefficienten A, B, C und A', B', C' dieselbe Anzahl positiv und negativ sein.

Die allgemeinste Correlation zwischen räumlichen Figuren von der Beschaffenheit, dafs die entsprechenden Flächen immer denselben Grad haben, besteht darin, dafs man für die Coordinaten der Puncte der einen Figur Brüche setzt, die denselben Nenner haben, und deren Zähler, so wie der gemeinschaftliche Nenner, lineare Functionen der Coordinaten der Puncte der anderen Figur sind. Es seien die Gleichungen zweier sich zufolge solcher Correlatiou einander entsprechenden Flächen 2ten Grades, auf Systeme conjugirter Durchmesser bezogen,

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2=0,$$
$$A'p^2+B'q^2+C'r^2+D's^2=0,$$

wo $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$ und $\frac{p}{s}$, $\frac{q}{s}$, $\frac{r}{s}$ die Coordinaten der Puncte der beiden Flächen bedeuten. Es mufs dann die identische Gleichung

$$A'p^2+B'q^2+C'r^2+D's^2=Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2$$

dadurch erhalten werden können, dafs man für p, q, r, s reelle lineare homogene von einander unabhängige Functionen von x, y, z, w setzt, und daher unter den Coefficienten A, B, C, D und A', B', C', D' eine gleiche Anzahl positiv und negativ sein. Wenn drei dieser Coefficienten positiv und einer

negativ oder drei negativ und einer positiv sind, so können diese Gleichungen sowohl Ellipsoiden als elliptische (zweiflächige) Hyperboloiden darstellen; wenn dagegen von diesen Coefficienten zwei positiv nnd zwei negativ sind, nur das hyperbolische (einflächige) Hyperboloid. Man hat daher den Satz:

> Nach der allgemeinsten Correlation, bei welcher je zwei einander entsprechende Flächen denselben Grad haben, können einander Ellipsoide und elliptische Hyperboloide, aber hyperbolischen Hyperboloiden nur wieder hyperbolische Hyperboloide entsprechen.

(Der Schlufs dieser Abhandlung, welcher für die weiteren Anwendungen des Fundamentalsatzes bestimmt war, ist nicht vorhanden. Von einer dieser Anwendungen giebt die folgende Bemerkung Nachricht.)

19.

Bemerkung über die beiden vorstehenden Aufsätze.

(Von *C. W. Borchardt.*)

Das algebraische Prinzip, mit dessen Beweise sich die beiden vorstehenden Aufsätze beschäftigen, ist, wie mein scharfsinniger Freund Herr ***Hermite*** in seinem Briefe erwähnt, von ***Jacobi*** aufgestellt worden, der es indessen nicht bekannt gemacht hat.

Aufser dem hier gegebenen ***Jacobi***schen ***Beweise*** jenes Prinzips, der sich unter seinen hinterlassenen Handschriften gefunden hat, kennt man durch mündliche Ueberlieferung überdies eine ***Anwendung,*** die er davon gemacht hat, und von welcher Herr ***Hermite*** in seinem Briefe ebenfalls spricht. Um über diese Anwendung einige Erläuterungen zu geben, lasse ich eine Stelle aus einem Briefe folgen, den ***Jacobi*** im März 1847 an mich richtete:

„Ich weifs nicht, wie Sie Ihren Satz*) bewiesen haben; vielleicht mittelst einer Abhandlung von ***Sturm,*** wo er seinen Satz durch combinatorische Formeln darstellt. ***Ich habe mir einen einfachen Beweis gesucht, der weder einen Satz über Gleichungen, noch über Determinanten voraussetzt.***"

Den Sinn dieser letzten Worte erfuhr ich bald darauf durch mündliche Mittheilungen von ***Jacobi.*** Das von ihm zum Beweise jenes Satzes angewandte Verfahren bestand nämlich, wie er mir sagte, in Folgendem.

Um für eine gegebene Gleichung, deren Wurzeln mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ bezeichnet werden mögen, zu entscheiden, wieviel Paare derselben imaginär sind, bildete er den Ausdruck:

$$(1.) \qquad S = \Sigma(x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1})^2,$$

wo die Summe auf die Werthe $\alpha = \alpha_1, = \alpha_2, \ldots = \alpha_n$ auszudehnen ist; derselbe läfst sich auch so darstellen:

---

*) Es ist der Satz über die Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln einer Gleichung, welcher sich im *Liouville*schen Journal (T. XII, pag. 59) abgedruckt findet, und den ich bereits vor dem Druck brieflich *Jacobi* mitgetheilt hatte.

$$(2.)\quad S = s_0x_0^2 + 2s_1x_0x_1 + 2s_2x_0x_2 + \cdots + 2s_{n-1}x_0x_{n-1}$$
$$+ s_2x_1^2 + 2s_3x_1x_2 + \cdots + 2s_n x_1 x_{n-1}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$+ s_{2n-2}x_{n-1}^2$$
$$= \sum_{i=0}^{i=n-1}\sum_{k=0}^{k=n-1} s_{i+k}\,x_i\,x_k,$$

wo s_i die Summe der i^{ten} Potenzen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ bedeutet.

Je zwei Glieder des Ausdrucks (1.), welche *zwei conjugirten imaginären* Wurzeln $a+b\sqrt{-1}$ und $a-b\sqrt{-1}$ entsprechen, geben eine Summe der Form $(P+Q\sqrt{-1})^2+(P-Q\sqrt{-1})^2 = 2P^2-2Q^2$, wo P und Q *reelle* lineare homogene Funktionen von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ sind, d. h. sie liefern ein positives und ein negatives Quadrat; jedes einer *reellen* Wurzel entsprechende Glied von (1.) dagegen ist das positive Quadrat einer reellen linearen homogenen Funktion derselben Variablen.

Der Ausdruck** (1.) **von S wird also ein Aggregat reeller Quadrate, von denen eben so viele das negative Zeichen haben, als sich Paare imaginärer Wurzeln unter** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ **befinden.

Indem *Jacobi* andrerseits auf den Ausdruck (2.) das bekannte Verfahren anwandte, wonach man denselben und zwar nur auf *eine* Weise unter der Form

$$A_0U_0^2 + A_1U_1^2 + A_2U_2^2 + \cdots + A_{n-1}U_{n-1}^2$$

so darstellen kann, dafs U_0 eine lineare homogene Funktion von $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$; U_1 von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$; U_2 von $x_2, \ldots x_{n-1}$; etc. endlich U_{n-1} von x_{n-1} allein sei, ergaben sich für die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ die Werthe:

$$A_0 = \frac{1}{p_0}, \quad A_1 = \frac{1}{p_0p_1}, \quad A_2 = \frac{1}{p_1p_2}, \quad \ldots \quad A_{n-1} = \frac{1}{p_{n-2}p_{n-1}},$$

wo p_m die Determinante des Systems:

$$\begin{matrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_m \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{m+1} \\ \vdots & & & \\ s_m & s_{m+1} & \ldots & s_{2m} \end{matrix}$$

bedeutet.*)

In der Reihe $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ sind also eben so viel negative Glieder als Zeichenwechsel in der Reihe $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$. Beide Resultate ver-

*) Siehe pag. 270 dieses Hefts.

einigt, gaben dann mit Hülfe des Prinzips der Unveränderlichkeit der Anzahl der positiven und negativen Quadrate den zu beweisenden Satz, wonach die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ mit der Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln der gegebenen Gleichung zusammenfällt.

Seit dem Jahre 1847, aus welchem ohne Zweifel auch der hier abgedruckte unvollendete *Jacobi*sche Aufsatz stammt, sind in neuerer Zeit die Herren *Sylvester* und *Hermite*, ohne von der *Jacobi*schen Arbeit zu wissen, auf das in Rede stehende Prinzip gekommen.

Herr *Sylvester* hat dasselbe aufgestellt und dafür den Namen des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen vorgeschlagen. Die von ihm gemachte Anwendung desselben bezieht sich auf die für die *Sturm*schen Funktionen *erzeugende* quadratische Form, welche er als von Herrn *Hermite* ihm mitgetheilt anführt. (S. Sylvester, on a theory of the syzygetic relations etc. Phil. Trans. 1853 pag. 481, 84, und: a demonstrat. of the theorem, that every homog. quadr. polyn. etc. Phil. Magaz. 1852 II. pag. 138.)

Herr *Hermite* hat aufser dem hier veröffentlichten Beweise des Prinzips eine Anwendung davon gemacht, die, mit der *Jacobi*schen im Grundgedanken übereinstimmend, umfassender als diese ist. Seine erwähnte *erzeugende* quadratische Form ist der oben mit S bezeichneten ganz ähnlich, aber sie ist allgemeiner, und zwar in der Art, dafs man aus ihr nicht nur den besonderen Fall des *Sturm*schen Satzes herzuleiten im Stande ist, wo $-\infty$ und $+\infty$ die Grenzen sind, zwischen denen die Anzahl der reellen Wurzeln bestimmt werden soll, sondern eben sowohl den allgemeinen Fall, wo irgend zwei endliche reelle Grōfsen jene Grenzen sind. Eine weitere Verallgemeinerung des Gedankens der erzeugenden quadratischen Form hat Herrn *Hermite* dazu geführt, ähnliche Untersuchungen für Gleichungen mit imaginären Coefficienten anzustellen (Bd. LII. pag. 39 dieses Journals) sowie den *Sturm*schen Satz auf zwei simultane Gleichungen auszudehnen. (S. comptes rendus de l'ac. de Paris 1853 I. pag. 294, 96.)

Schliefslich ist der Aufsatz des Herrn *Brioschi* anzuführen: „Sur les séries qui donnent le nombre de racines réelles etc." (Nouvelles Annales de M. *Terquem*, Juillet 1856), in welchem sich sowohl ein eleganter Beweis des in Rede stehenden Prinzips findet als seine Anwendung auf die Bestimmung der Anzahl reeller Wurzeln.

20.

Auszug eines Schreibens über Kettenbrüche von Herrn *E. Heine* an den Herausgeber.

Halle, d. 11. Januar 1857.

. . . . In einer früheren Abhandlung im 34sten Bande dieses Journals habe ich die Nenner des Kettenbruchs, in den *Gaufs* die hypergeometrische Reihe $F(1, \beta, \gamma)$ entwickelt, angegeben; es ist mir jetzt gelungen, das Resultat auf den allgemeinen Kettenbruch für

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)},$$

den *Gaufs* in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe Sectio II, p. 13 ableitet, zu übertragen. Ich theile Ihnen das Resultat mit: Ist jener Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_2 x}{1-\text{etc.}}}},$$

und bezeichnet man die Zähler und Nenner des Näherungsbruches, welcher mit $a_n x$ schliefst durch P_n und Q_n, so werden Q_{2n-1}, Q_{2n}, P_{2n}, P_{2n+1} gleich folgenden Ausdrücken, die *ganze* Functionen $n$ten Grades sind:

$$\begin{aligned} Q_{2n-1} &= F(\alpha, \beta, \gamma)\, F(1-n-\alpha, -n-\beta, 1-2n-\gamma) \\ &\quad - a_0 a_1 \ldots a_{2n} x^{2n+1} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma)\, F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{2n} &= F(\alpha, \beta, \gamma)\, F(-n-\alpha, -n-\beta, -2n-\gamma) \\ &\quad - a_0 a_1 \ldots a_{2n+1} x^{2n+2} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma)\, F(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2n} &= F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)\, F(-n-\alpha, -n-\beta, -2n-\gamma) \\ &\quad - a_1 a_2 \ldots a_{2n+1} x^{2n+1} F(1-\alpha, -\beta, 1-\gamma)\, F(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2n+1} &= F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)\, F(-n-\alpha, -n-1-\beta, -2n-1-\gamma) \\ &\quad - a_1 a_2 \ldots a_{2n+2} x^{2n+2} F(1-\alpha, -\beta, 1-\gamma)\, F(\alpha+n+1, \beta+n+2, \gamma+2n+3). \end{aligned}$$

Es ist hier $a_0 = \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{(\gamma-1)\gamma}$ gesetzt; a_1, a_2 etc. bezeichnen dieselben Gröfsen, welche in dem Kettenbruche vorkommen, d. h. es ist

$$a_1 = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} \qquad a_2 = \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$$

$$a_3 = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)} \qquad a_4 = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}$$

etc.

Um also z. B. Q_{2n} zu erhalten, braucht man nur das Product der zwei Reihen $F(\alpha, \beta, \gamma)$ und $F(-n-\alpha, -n-\beta, -2n-\gamma)$ zu bilden, und in demselben den Theil allein beizubehalten, welcher keine höheren Potenzen von x als x^n enthält; die Potenzen x^{n+1}, x^{n+2}, etc., x^{2n+1} fehlen natürlich in dem Producte von selbst, und erst x^{2n+2} kann darin auftreten. Aehnliches gilt von Q_{2n-1} und den P.

Die *Ableitung* dieser Resultate, welche sich leicht *beweisen* lassen, beabsichtige ich gelegentlich mitzutheilen, und werde zu gleicher Zeit die Ausdehnung für den Fall geben, dafs man nicht die gewöhnlichen hypergeometrischen Reihen, sondern die durch ein neues Element q verallgemeinerten betrachtet. In besonderen Fällen wird übrigens das Product der hypergeometrischen Reihen, und dann P oder Q sehr einfach.

21.
Sur une formule d'Analyse.

(Par M. *P. Tchebichev.*)

(Lu à l'académie de St. Pétersbourg le $\frac{20 \text{ octobre}}{1 \text{ novembre}}$ 1854.)

Si l'on représente par $f(x)$ une fonction entière du degré n, et que l'on connaisse ses $n+1$ valeurs

$$f(x^0),\quad f(x'),\quad f(x''),\quad \ldots\quad f(x^{(n)}).$$

la formule de ***Lagrange*** donne cette expression de $f(x)$

$$\frac{(x-x')(x-x'')\ldots}{(x^0-x')(x^0-x'')\ldots}f(x^0)+\frac{(x-x^0)(x-x'')\ldots}{(x'-x^0)(x'-x'')\ldots}f(x')+\cdots$$

Cette valeur de $f(x)$ peut être représentée sous différentes formes; l'une des plus remarquables est la suivante:

$$A'\sum_{i=0}^{i=n}f(x^i)-A''\psi_1(x)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x^i)f(x^i)+A'''\psi_2(x)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_2(x^i)f(x^i)-\cdots;$$

où A', A'', A''', ... désignent les coefficients de x dans les quotients de la fraction continue

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\cdots.$$

résultante du développement de

$$\frac{1}{x-x^0}+\frac{1}{x-x'}+\cdots+\frac{1}{x-x^{(n)}},$$

et $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... les dénominateurs des fractions convergentes qu'on en tire.

Cette formule a l'avantage de donner $f(x)$ sous la forme d'une fonction entière, dont les termes, en général, présentent une série sensiblement décroissante. Dans le cas particulier de $x^0=\frac{n}{n}$, $x'=\frac{n-2}{n}$, $x''=\frac{n-4}{n}$, ... $x^{(n)}=\frac{-n}{n}$, et n infiniment grand, cette formule fournit le développement de $f(x)$ suivant les valeurs de certaines fonctions, que ***Legendre*** a désignées par X^m (Exer. Partie V, §. 10), et qui sont déterminées ici par la réduction de l'expression $\log\frac{x+1}{x-1}$ en fraction continue.

Mais la propriété la plus précieuse de cette formule est celle-ci:

Si l'on ne prend dans cette formule que les premiers termes en nombre quelconque m, on trouve une valeur approchée de $f(x)$ sous la forme d'un polynôme du degré $m-1$ et avec les coefficients indiqués par la ***méthode des moindres carrés,*** dans la supposition que les valeurs données de $f(x^0)$, $f(x')$, $f(x'')$, ... $f(x^n)$ sont affectées d'erreurs de même nature.

Dans peu de temps, j'aurai l'honneur de présenter à l'Académie un Mémoire, où l'on verra, en outre, le parti qu'on peut tirer de cette formule pour l'Analyse.

22.

Über die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit, Note zu der Abhandlung im Band LII dieses Journals.

(Von Herrn *Clebsch*.)

In einer Abhandlung, welche im 52sten Bande dieses Journals erschienen ist, habe ich die Gleichungen für die Bewegung einer unbegränzten Flüssigkeitsmasse aufgestellt, innerhalb deren ein fester Körper in irgend welcher Weise bewegt wird. Ich habe dabei besonders den Fall betrachtet, wo dieser Körper ein Ellipsoid ist, und habe die betreffenden Gleichungen zu integriren versucht, wenn das Ellipsoid sich in der Richtung einer seiner Hauptaxen geradlinig bewegte, oder wenn es, ohne fortschreitende Bewegung, um eine seiner Hauptaxen rotirte. In Bezug auf beide Fälle habe ich eine Bemerkung hinzuzufügen.

Für den ersten Fall erhielt ich zur Bestimmung der Curven, auf welchen sich die Flüssigkeitstheilchen bewegten, die beiden Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} 2\log y' = \int \frac{d\mu}{a'+\mu} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0 - S_0 + S)\sqrt{a+\mu . a'+\mu . a''+\mu}} \\ 2\log y'' = \int \frac{d\mu}{a''+\mu} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0 - S_0 + S)\sqrt{a+\mu . a'+\mu . a''+\mu}} . \end{cases}$$

Es waren dabei y', y'' die beiden gegen die Bewegungsrichtung des Ellipsoids senkrechten Coordinaten des betrachteten Flüssigkeitstheilchens, bezogen auf das Hauptaxensystem des Ellipsoids als Coordinatensystem; ferner a, a', a'' die Axen des Ellipsoids, a die der Bewegungsrichtung entsprechende, μ der Parameter desjenigen confocalen auf welchem sich das Theilchen gerade befand. Endlich war

$$(2.)\quad \begin{cases} S^i = \int_\mu^\infty \frac{d\mu}{a^{(i)}+\mu . \sqrt{a+\mu . a'+\mu . a''+\mu}} \\ \Sigma = S + S' + S'' = \frac{2}{\sqrt{a+\mu . a'+\mu . a''+\mu}} \end{cases}$$

und S_0^i, Σ_0 dieselben Gröfsen, bezogen auf die Oberfläche des Ellipsoids, wo $\mu = 0$.

Die Gleichungen (1.) nehmen auch die Form an:

$$(3.)\quad \log y^{(i)} = \int \frac{d\mu}{a^{(i)}+\mu . \sqrt{a+\mu . a'+\mu . a''+\mu}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{a+\mu . a'+\mu . a''+\mu}} - \Sigma_0 + S_0 - S}$$

oder, nach den Gleichungen (2.):

$$(4.)\quad \log y' = \int \frac{dS'}{S_0' + S_0'' - S' - S''} \qquad \log y'' = \int \frac{dS''}{S_0' + S_0'' - S' - S''}.$$

Diese einfachere Gestalt der Integrale läfst zugleich einsehen, dafs, indem man dieselben addirt, ein ausführbares Integral erhalten wird, dessen Resultat ist:

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{\text{Const.}}{y'y''} = S_0' + S_0'' - S' - S'' \\ \qquad = \int_0^{\mu} \left(\frac{1}{a'+\mu} + \frac{1}{a''+\mu} \right) \frac{d\mu}{\sqrt{a+\mu . a'+\mu . a''+\mu}}, \end{cases}$$

so dafs also wenigstens *ein* Integral der in Frage stehenden Bewegung auf ein elliptisches Integral der zweiten Gattung unmittelbar zurückkommt; und zwar wird auf diese Weise das Product der Entfernungen des Theilchens von denjenigen Hauptebenen des Ellipsoids ausgedrückt, welche sich in der Bewegungsaxe schneiden.

Für den andern der erwähnten Fälle erhielt ich damals nur ein einziges Integral, während über das zweite nichts festzustehen schien. Aus der Theorie des letzten Multiplicators aber erhellt die Aufstellbarkeit dieses Integrales von vorn herein. Die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeitstheilchen sind nämlich, bezogen auf ein im Raume festes Coordinatensystem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

wo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0.$$

Da nun hiernach der letzte Multiplicator des Systems $= 1$ ist, also auch bekannt für jedes neue System von Variabeln, so folgt, dafs aus zwei Integralen des Systems sich immer das dritte ohne Weiteres ergiebt.

Man sieht ferner leicht, dafs der Multiplicator nicht nur aus eben diesem Grunde bekannt, sondern sogar $= 1$ ist für das im Körper feste Coordinatensystem, für welches die Formeln (5.) der citirten Abhandlung die Gleichungen geben

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - A - y''A^{10} + y'A^{20}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y'} - A' - yA^{21} + y''A^{01}$$

$$\frac{dy''}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y''} - A'' - y'A^{02} + yA^{12}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y''^2} = 0,$$

wo die A die Geschwindigkeiten, translatorische und rotatorische, in Bezug auf die Hauptaxen des Körpers darstellen, und lediglich Funktionen der Zeit sind. Verschwinden nun alle diese Geschwindigkeiten bis auf Eine, so wird φ dieser Einen proportional. Die Verhältnisse der rechten Theile werden also von der Zeit unabhängig, und die Gleichungen nehmen die Form an:

$dy : dy' : dy'' = Y : Y' : Y''$ und es ist noch $\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Y''}{\partial y''} = 0$

der Multiplicator des neuen Systems also wiederum $= 1$; und somit aus *einem* Integrale der Gleichungen das zweite bekannt. Man hat also den Satz:

> Sobald die Bewegung des Körpers nur von *einer* der sechs Geschwindigkeiten abhängt, bedarf es nur *eines* Integrals, um die beiden übrigen sogleich zu finden.

Dasselbe geschieht noch, wenn die sechs Geschwindigkeiten nur in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen.

Nachdem also hierdurch die Aufstellbarkeit des fehlenden Integrales nachgewiesen war, wurde es nicht schwer, dasselbe auf Quadraturen zurückzuführen. Rotirte das Ellipsoid um die y Axe, mit der Geschwindigkeit A^{12}, so waren die Bewegungsgleichungen (110. der citirten Abhandlung) folgende:

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{\mu-\mu_1 . \mu-\mu_2}{a+\mu . a'+\mu . a''+\mu} \cdot \dfrac{d\mu}{dt} \\ = 2y'y''A^{12}\left[\left(\dfrac{1}{a'+\mu} - \dfrac{1}{a''+\mu}\right) + k(S'-S'')\left(\dfrac{1}{a'+\mu} + \dfrac{1}{a''+\mu}\right) + 2k\dfrac{\partial(S'-S'')}{\partial\mu}\right] \\ \dfrac{\mu_1-\mu_2 . \mu_1-\mu}{a+\mu_1 . a'+\mu_1 . a''+\mu_1} \cdot \dfrac{d\mu_1}{dt} \\ = 2y'y''A^{12}\left[\left(\dfrac{1}{a'+\mu_1} - \dfrac{1}{a''+\mu_1}\right) + k(S'-S'')\left(\dfrac{1}{a'+\mu_1} + \dfrac{1}{a''+\mu_1}\right)\right] \\ \dfrac{\mu_2-\mu . \mu_2-\mu_1}{a+\mu_2 . a'+\mu_2 . a''+\mu_2} \cdot \dfrac{d\mu_2}{dt} \\ = 2y'y''A^{12}\left[\left(\dfrac{1}{a'+\mu_2} - \dfrac{1}{a''+\mu_2}\right) + k(S'-S'')\left(\dfrac{1}{a'+\mu_2} + \dfrac{1}{a''+\mu_2}\right)\right]. \end{cases}$$

Dabei sind μ_1, μ_2 die Parameter der confocalen Hyperboloide und k eine Constante

$$(7.) \qquad k = \frac{a'-a''}{(a'-a'')\Sigma_0+(a'+a'')(S_0'-S_0'')},$$

während die übrigen Gröfsen die schon erwähnten Bedeutungen beibehalten.

Die Gleichungen (7.) nehmen ohne Weiteres auch die Form an:

$$(8.) \quad \begin{cases} \mu-\mu_1.\mu-\mu_2\cdot\frac{d\mu}{d\Omega} = (a+\mu)[(a''-a')(1-k\Sigma)+k(S'-S'')(a'+a''+2\mu)] \\ \mu_1-\mu_2.\mu_1-\mu\cdot\frac{d\mu_1}{d\Omega} = (a+\mu_1)[(a''-a')+k(S'-S'')(a'+a''+2\mu_1)] \\ \mu_2-\mu.\mu_2-\mu_1\cdot\frac{d\mu_2}{d\Omega} = (a+\mu_2)[(a''-a')+k(S'-S'')(a'+a''+2\mu_2)]. \end{cases}$$

Ich setze nun der Kürze wegen

$$(9.) \quad \begin{cases} (a''-a')(1-k\Sigma)+k(S'-S'')(a'+a''+2\mu) = N \\ (a''-a')+k(S'-S'')(a'+a'') = p, \qquad 2k(S'-S'') = q. \end{cases}$$

Dann gehen die Gleichungen (8.), indem man zugleich die beiden letzten durch die erste dividirt, in die folgenden über:

$$(10.) \quad \begin{cases} (\mu_2-\mu_1)\frac{d\mu_1}{d\mu}(a+\mu)N = (a+\mu_1)(p+q\mu_1)(\mu-\mu_2) \\ (\mu_1-\mu_2)\frac{d\mu_2}{d\mu}(a+\mu)N = (a+\mu_2)(p+q\mu_2)(\mu-\mu_1). \end{cases}$$

Wenn man diese Gleichungen subtrahirt, oder dasselbe thut, nachdem man sie zuvor mit μ_2 und μ_1 multiplicirt hat, so erhält man zwei für $\mu_1+\mu_2$ und $\mu_1\mu_2$ lineäre Gleichungen:

$$(11.) \quad \begin{cases} \frac{d(\mu_1+\mu_2)}{d\mu}\cdot(a+\mu)N = -\{ap+\mu(aq+p)\}-\mu q(\mu_1+\mu_2)+q\mu_1\mu_2 \\ \frac{d(\mu_1\mu_2)}{d\mu}\cdot(a+\mu)N = ap\mu-ap(\mu_1+\mu_2)-(aq+p+q\mu)\mu_1\mu_2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nun werden integrirt, indem man zunächst die erste mit a multiplicirt und zu der zweiten hinzufügt. Man erhält dann

$$(12.) \qquad \frac{d.(a+\mu_1.a+\mu_2)}{d\mu}\cdot(a+\mu)N = -(\mu q+p).a+\mu_1.a+\mu_2$$

und durch Integration:

$$(13.) \qquad a+\mu_1.a+\mu_2 = c.e^{-\int\frac{\mu q+p}{N}\cdot\frac{d\mu}{a+\mu}}.$$

Dies ist das auch in der citirten Abhandlung gegebene Integral. Offenbar kann man aber nun entweder $\mu_1\mu_2$ durch $\mu_1+\mu_2$ oder umgekehrt aus-

drücken, und erhält dann aus den Gleichungen (11.) lineare Differentialgleichungen mit je einer unbekannten Gröfse; nämlich, wenn wir mit V den Ausdruck bezeichnen, welcher die rechte Seite der Gleichung (13.) bildet:

$$(14.)\quad \begin{cases} \frac{d.\mu_1+\mu_2}{d\mu}\cdot N+q(\mu_1+\mu_2) = \frac{qV}{a+\mu}-(aq+p) \\ \frac{d.\mu_1\mu_2}{d\mu}\cdot N+q(\mu_1\mu_2) = ap\left(1-\frac{V}{a.a+\mu}\right). \end{cases}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$(15.)\quad \begin{cases} \mu_1+\mu_2 = e^{-\int\frac{qd\mu}{N}}\int e^{\int\frac{qd\mu}{N}}\left\{\frac{qV}{a+\mu}-(aq+p)\right\}\frac{d\mu}{N} \\ \mu_1\mu_2 = e^{-\int\frac{qd\mu}{N}}\int e^{\int\frac{qd\mu}{N}}\left\{1-\frac{V}{a.a+\mu}\right\}ap.\frac{d\mu}{N} \end{cases}$$

wodurch das Problem auf Quadraturen zurückgeführt ist.

Berlin, den 26. Mai 1856.

23.

Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes.

(Von Herrn *Clebsch*.)

Hr. *Cayley* hat in den Philos. Transact. vom Jahre 1852 eine analytische Behandlung von *Steiner*'s Ausdehnung des *Malfatti*schen Problems gegeben, und hat dort die Aufgabe

> Zu drei, auf einer Oberfläche zweiter Ordnung gegebenen, ebenen Kurven, drei andere zu finden, welche sich unter einander berühren, und deren jede zugleich zwei der gegebenen Kurven berührt,

zurückgeführt auf ein System von Gleichungen, welches als specieller Fall in dem folgenden enthalten ist:

$$(1.)\quad \begin{cases} \alpha + \beta(y+z) + \gamma yz = \delta\sqrt{1+y^2}.\sqrt{1+z^2} \\ \alpha' + \beta'(z+x) + \gamma' zx = \delta'\sqrt{1+z^2}.\sqrt{1+x^2} \\ \alpha'' + \beta''(x+y) + \gamma'' xy = \delta''\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}. \end{cases}$$

Dies System von Gleichungen ist dort durch rein algebraische Betrachtungen gelöst, unter gewissen Bedingungen, welchen die Coefficienten genügen müssen; und so auch die algebraische Lösung der obigen Aufgabe vollständig gegeben.

Die Auflösung der Gleichungen (1.) läfst sich indefs auch aus einem andern Gesichtspunkte darstellen. Denn indem man jede der obigen Gleichungen mit der Form vergleicht, welche schon *Euler* für das Additionstheorem der elliptischen Funktionen gegeben hat, kann man die Gleichungen (1.) betrachten als die algebraischen Integrale von Gleichungen der Form

$$(2.)\quad \begin{cases} \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0 \\ \frac{dz}{\sqrt{Z'}} + \frac{dx}{\sqrt{X'}} = 0 \\ \frac{dx}{\sqrt{X''}} + \frac{dy}{\sqrt{Y''}} = 0 \end{cases}$$

wo X', X'' ganze Funktionen vierten Grades von x sind, Y, Y'' von y, Z, Z'

von z. Und indem man diese Funktionen wirklich ausrechnet, findet man für die Gleichungen (2.) die folgenden:

$$0 = \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{(\delta^2-\beta^2-\alpha^2)-2\gamma(\alpha+\beta)y+(\delta^2-\gamma^2-\beta^2)y^2}}$$
$$+\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{(\delta^2-\beta^2-\alpha^2)-2\gamma(\alpha+\beta)z+(\delta^2-\gamma^2-\beta^2)z^2}}$$
etc.

Und um die Integrale dieser Gleichungen vergleichen zu können, mufs man unter den Wurzelzeichen bis auf einen constanten Faktor immer dieselbe Funktion haben, d. h. die Ausdrücke

$$(\delta^2-\beta^2-\alpha^2)-2\gamma(\alpha+\beta)u+(\delta^2-\gamma^2-\beta^2)u^2$$
$$(\delta'^2-\beta'^2-\alpha'^2)-2\gamma'(\alpha'+\beta')u+(\delta'^2-\gamma'^2-\beta'^2)u^2$$
$$(\delta''^2-\beta''^2-\alpha''^2)-2\gamma''(\alpha''+\beta'')u+(\delta''^2-\gamma''^2-\beta''^2)u^2$$

dürfen sich nur um constante Faktoren unterscheiden. Daher erhält man die Bedingungen

$$\delta^2-\beta^2-\alpha^2 : 2\gamma(\alpha+\beta) : \delta^2-\gamma^2-\beta^2$$
$$= \delta'^2-\beta'^2-\alpha'^2 : 2\gamma'(\alpha'+\beta') : \delta'^2-\gamma'^2-\beta'^2$$
$$= \delta''^2-\beta''^2-\alpha''^2 : 2\gamma''(\alpha''+\beta'') : \delta''^2-\gamma''^2-\beta''^2$$

für die Anwendbarkeit dieser Methode; und es sind dies genau die von Hrn. *Cayley* aufgestellten Bedingungen.

Man wird durch diese Betrachtung darauf geführt, das Problem nicht auf die Gleichungen (1.) zurückzuführen, sondern auf andere, welche sich an die *gewöhnliche* Form des Additionstheorems anschliefsen, wo man dann zugleich die Constanten, welche in die Integrale der Gleichungen (2.) eingehen, durch die Constanten des Problems bestimmt. Zu diesem Ende aber mufs ich die Behandlung der Aufgabe von Anfang an noch einmal kurz darstellen.

Für das *Malfatti*sche Problem selbst, wo man auf Kreisfunktionen geführt wird, hat schon Hr. Prof. *Schellbach* diesen Weg eingeschlagen und im 45sten Bande dieses Journals die sehr einfachen Resultate bekannt gemacht.

§. 1.

Die Bedingung dafs drei auf einer Oberfläche zweiter Ordnung

$$u = \sum_{i=1}^{i=4}\sum_{k=1}^{k=4} u_{ik}x_ix_k = 0$$

gegebene ebene Kurven einander berühren, erhält man leicht, indem man be-

merkt, dafs jede Tangentenebene der Oberfläche:

$$P = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = 0$$

der Gleichung genügen mufs

$$(3.) \qquad 0 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & p_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & p_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & p_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Denn sind nun die Ebenen der gegebenen Kurven

$$(4.) \qquad \begin{cases} C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0 \\ C' = c_1' x_1 + c_2' x_2 + c_3' x_3 + c_4' x_4 = 0 \\ C'' = c_1'' x_1 + c_2'' x_2 + c_3'' x_3 + c_4'' x_4 = 0, \end{cases}$$

so müssen alle Tangentenebenen, welche durch den Schnittpunkt von C, C', C'' gehen, und welche also die Form haben

$$P = \lambda C + \lambda' C' + \lambda'' C'' = 0$$

einer Gleichung genügen

$$(5.) \qquad 0 = q^{00}\lambda^2 + q^{11}\lambda'^2 + q^{22}\lambda''^2 + 2q^{01}\lambda\lambda' + 2q^{12}\lambda'\lambda'' + 2q^{20}\lambda''\lambda,$$

welche man erhält, indem in (3.)

$$p_i = \lambda c_i + \lambda' c_i' + \lambda'' c_i''$$

gesetzt wird. Sollen nun die Schnittkurven der C mit der Oberfläche einander berühren, so kann man durch die Schnittlinie zweier C nur immer *eine* Tangentenebene an die Oberfläche legen, d. h. nur je *eine* Ebene finden der Form

$$\lambda C + \lambda' C' = 0 \qquad \lambda' C' + \lambda'' C'' = 0 \qquad \lambda'' C'' + \lambda C = 0$$

welche der Gleichung (5.) genügt. Also mufs diese Gleichung in ein vollständiges Quadrat übergehen, sobald *ein* λ verschwindet, d. h. es mufs sein

$$(6.) \qquad \begin{cases} q^{00} q^{11} = (q^{01})^2 \\ q^{11} q^{22} = (q^{12})^2 \\ q^{22} q^{00} = (q^{20})^2 \end{cases} \qquad \text{wo } q^{ik} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & c_1^i \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & c_2^i \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & c_3^i \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & c_4^i \\ c_1^k & c_2^k & c_3^k & c_4^k & 0 \end{vmatrix}.$$

Würde hiedurch die rechte Seite von Gleichung (5.) im ***Allgemeinen*** für die λ ein vollständiges Quadrat, so träte zu den Gleichungen (6.) noch diese hinzu:

$$q^{00}.q^{11}.q^{22} = q^{01}.q^{12}.q^{20} \qquad \text{oder}$$

$$\begin{vmatrix} q^{00} & q^{01} & q^{02} \\ q^{01} & q^{11} & q^{12} \\ q^{02} & q^{12} & q^{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man nun durch Δ die Determinante von u, durch Δ_{ik} ihre Differentialquotienten, so hat man auch

$$(7.) \qquad q^{ik} = \sum_{m=1}^{m=4} \sum_{n=1}^{n=4} \Delta_{mn} c^i_m c^k_n$$

und dies in die letzte Gleichung eingesetzt, giebt derselben nach den bekannten Sätzen über die Multiplication der Determinanten, die Form

$$0 = \Delta^3 . \sum_{m=1}^{m=4} \sum_{n=1}^{n=4} u_{mn} C_m C_n ,$$

wo C_1, C_2, C_3, C_4 die Koordinaten des Schnittpunkts von C, C', C'' bedeuten. Verschwände hier Δ, so wäre die Oberfläche ein Kegel; verschwände der zweite Faktor, so rückte dieser Schnittpunkt in die Oberfläche. Indem man beide Fälle ausschliefst, kann man also den Gleichungen (6.) die Bestimmung hinzufügen

$$(8.) \qquad q^{00}.q^{11}.q^{22} + q^{01}.q^{12}.q^{20} = 0.$$

§. 2.

Sind in unsrer Aufgabe nun die gegebenen Ebenen $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, die gesuchten $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$, und

$$(9.) \qquad \begin{cases} A^i = a^i_1 x_1 + a^i_2 x_2 + a^i_3 x_3 + a^i_4 x_4 \\ B^i = b^i_1 x_1 + b^i_2 x_2 + b^i_3 x_3 + b^i_4 x_4 , \end{cases}$$

so giebt es unter diesen Ebenen 4 Systeme, welche sich verhalten sollen wie die C des vorigen Paragraphen, nämlich

1. $A\ B'\ B''$
2. $B\ A'\ B''$
3. $B\ B'\ A''$
4. $B\ B'\ B''$.

Für jedes dieser Systeme würden wir aus (6.) drei Gleichungen erhalten und aus (8.) eine Zeichenbestimmung. Man erhält so 12 Gleichungen, die sich indefs unmittelbar auf 9 reduziren und benutzt werden können, um die Verhältnisse der b zu bestimmen.

Um indefs absolute Bestimmungen zu erhalten, wollen wir die Gleichungen hinzufügen:

$$(10.)\quad \begin{cases} \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, a_i^0 a_k^0 = -1 & \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i^0 b_k^0 = -1 \\ \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, a_i' a_k' = -1 & \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i' b_k' = -1 \\ \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, a_i'' a_k'' = -1 & \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i'' b_k'' = -1, \end{cases}$$

Annahmen, welche immer möglich sind, sobald nur keine der Ebenen A eine Berührungsebene der Oberfläche wird. So werden nunmehr alle q mit gleichen oberen Indices $= -1$, und die Gleichungen (6, 8.) geben das Schema:

$$(11.)\quad \begin{cases} q^{12} = \varepsilon \\ q^{20} = \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon = 1 \\ q^{01} = \varepsilon_2 \end{cases}$$

wo die ε ± 1 bedeuten.

Stellt man unter dieser Form jetzt die Bedingungen der Aufgabe wirklich hin, so erhält man:

$$(12.)\quad \begin{cases} \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i a_k' = -\varepsilon_0' & \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i' a_k = -\varepsilon_1^0 \\ \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i' a_k'' = -\varepsilon_1'' & \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i'' a_k' = -\varepsilon_2' \\ \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i'' a_k = -\varepsilon_2^0 & \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i a_k'' = -\varepsilon_0'' \\ \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i' b_k'' = \varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0 \\ \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i'' b_k = \varepsilon_2' \varepsilon_0' \qquad \varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0 \varepsilon_2' \varepsilon_0' \varepsilon_0'' \varepsilon_1'' = 1 \\ \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i b_k' = \varepsilon_0'' \varepsilon_1'' \end{cases}$$

wo wieder die ε die positive oder negative Einheit bezeichnen. Durch diese Gleichungen und die Gleichungen (10.) sind die b nun vollständig bestimmt.

§. 3.

Man führt leicht diese zwölf Gleichungen auf drei zurück, indem man sich eines Satzes über die Determinanten erinnert, welchen Hr. Prof. *Hesse* im 49sten Bande dieses Journals p. 252 gegeben hat, und welcher uns in einem speziellen Falle das folgende Lemma giebt.

„Multiplicirt man die symmetrische Determinante

$$P = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} \end{vmatrix}$$

„mit dem Quadrat der Determinante:

$$R = \begin{vmatrix} a_1^0 & a_1' & a_1'' & a_1''' \\ a_2^0 & a_2' & a_2'' & a_2''' \\ a_3^0 & a_3' & a_3'' & a_3''' \\ a_4^0 & a_4' & a_4'' & a_4''' \end{vmatrix},$$

„so entsteht wiederum eine symmetrische Determinante:

$$Q = \begin{vmatrix} D_{00} & D_{01} & D_{02} & D_{03} \\ D_{10} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{20} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{30} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix},$$

„wo

$$(13.) \quad D_{pq} = \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} \Delta_{ik} a_i^p a_k^q.$$"

Lassen wir nun den Δ und a die Bedeutungen, welche ihnen im Vorigen beigelegt waren, und setzen nur

$$(14.) \quad a_i''' = \lambda b_i + \lambda' b_i' + \lambda'' b_i'',$$

so geht das Produkt $P.R^2$ in einen Ausdruck über, welcher in den λ sich als das Quadrat eines lineären darstellt. Dasselbe also mufs geschehen mit der Determinante Q; und ist dieselbe, nach den λ geordnet:

$$(15.) \quad Q = v_{00}\lambda^2 + v_{11}\lambda'^2 + v_{22}\lambda''^2 + 2v_{01}\lambda\lambda' + 2v_{12}\lambda'\lambda'' + 2v_{20}\lambda''\lambda,$$

so müssen die v den Gleichungen genügen:

$$(16.) \quad \begin{cases} v_{00}\, v_{11} = v_{01}^2 \\ v_{11}\, v_{22} = v_{12}^2 \\ v_{22}\, v_{00} = v_{20}^2 \end{cases} \qquad v_{00}\, v_{11}\, v_{22} = v_{01}\, v_{12}\, v_{20}.$$

Inzwischen werden in Folge der Gleichungen (10.), (13.) D_{00}, D_{11}, D_{22} sämmtlich $= -1$; und

$$D_{33} = -[\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 - 2\varepsilon_2^0\varepsilon_1^0\lambda'\lambda'' - 2\varepsilon_0'\varepsilon_2'\lambda''\lambda - 2\varepsilon_1''\varepsilon_0''\lambda\lambda'].$$

Setzen wir ferner

$$(17.) \quad \begin{cases} -\alpha = \Sigma\Sigma \Delta_{ik} a_i' a_k'' & -\varepsilon_0^0(1+\gamma_0) = \Sigma\Sigma \Delta_{ik} a_i b_k \\ -\alpha_1 = \Sigma\Sigma \Delta_{ik} a_i'' a_k & -\varepsilon_1'(1+\gamma_1) = \Sigma\Sigma \Delta_{ik} a_i' b_k' \\ -\alpha_2 = \Sigma\Sigma \Delta_{ik} a_i a_k' & -\varepsilon_2''(1+\gamma_2) = \Sigma\Sigma \Delta_{ik} a_i'' b_k'' \end{cases}$$

wo die ε_i^i wieder ± 1 sein sollen und später ihre nähere Bestimmung finden

mögen; so wird

$$D_{12} = -\alpha \qquad D_{03} = -\{\varepsilon_0^0\lambda(1+\gamma_0)+\varepsilon_1^0\lambda'+\varepsilon_2^0\lambda''\}$$
$$D_{20} = -\alpha_1 \qquad D_{13} = -\{\varepsilon_0'\lambda+\varepsilon_1'\lambda'(1+\gamma_1)+\varepsilon_2'\lambda''\}$$
$$D_{01} = -\alpha_2 \qquad D_{23} = -\{\varepsilon_0''\lambda+\varepsilon_1''\lambda''+\varepsilon_2''\lambda''(1+\gamma_2)\}.$$

Die Gleichungen (16.) enthalten also nun allein die γ als unbekannte Gröfsen, da in den D andere nicht vorkommen, und genügen also zur Bestimmung derselben.

Bilden wir nun die Determinante Q, so können wir offenbar zunächst die negativen Zeichen sämmtlich auslassen. Ferner setze ich an die Stelle der λ die Gröfsen

$$\mu = \varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\lambda \qquad \mu' = \varepsilon_2'\varepsilon_0'\lambda' \qquad \mu'' = \varepsilon_0''\varepsilon_1''\lambda'';$$

alsdann gehen die D_{03}, D_{13}, D_{23}, D_{33} über in:

$$D_{33} = -(\mu^2+\mu'^2+\mu''^2) + 2(\mu\mu'+\mu'\mu''+\mu''\mu)$$

$$D_{03} = -\varepsilon_1^0\varepsilon_2'\varepsilon_0'\{-\mu(1+\gamma_0)+\mu'+\mu''\}$$
$$D_{13} = -\varepsilon_2'\varepsilon_0''\varepsilon_1''\{\mu-\mu'(1+\gamma_1)+\mu''\}$$
$$D_{23} = -\varepsilon_0''\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\{\mu+\mu'-\mu''(1+\gamma_2)\},$$

sobald man setzt

$$(18.) \qquad -\varepsilon_0^0 = \varepsilon_2'\varepsilon_0'\varepsilon_2^0 \qquad -\varepsilon_1' = \varepsilon_0''\varepsilon_1''\varepsilon_0' \qquad -\varepsilon_2'' = \varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\varepsilon_1''.$$

Endlich noch kann man bei der Bildung der Determinante die Horizontalreihen und Vertikalreihen resp. mit $\varepsilon_1^0\varepsilon_2'\varepsilon_0'$, $\varepsilon_2'\varepsilon_0''\varepsilon_1''$, $\varepsilon_0''\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0$ multiplicirt denken. Alsdann erhält man

$$(19.) \qquad Q = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_2^0\varepsilon_2'\alpha_2 & \varepsilon_1''\varepsilon_1^0\alpha_1 & -\mu(1+\gamma_0)+\mu'+\mu'' \\ \varepsilon_2^0\varepsilon_2'\alpha_2 & 1 & \varepsilon_0'\varepsilon_0''\alpha & \mu-\mu'(1+\gamma_1)+\mu'' \\ \varepsilon_1''\varepsilon_1^0\alpha_1 & \varepsilon_0'\varepsilon_0''\alpha & 1 & \mu+\mu'-\mu''(1+\gamma_2) \\ -\mu(1+\gamma_0)+\mu'+\mu'', & \mu-\mu'(1+\gamma_1)+\mu'', & \mu+\mu'-\mu''(1+\gamma_2), & \mu^2+\mu'^2+\mu''^2-2\mu\mu'-2\mu\mu''-2\mu'\mu'' \end{vmatrix}$$

Dies lehrt zunächst, dafs man aus *einer* Lösung der Aufgabe, für welche etwa sämmtliche $\varepsilon = +1$ sein mögen, vier erhält, indem man an die Stelle von α, α_1, α_2 die Gröfsen $\varepsilon_0'\varepsilon_0''\alpha$ etc. setzt, d. h. statt der α dieselben Gröfsen mit verändertem Vorzeichen, doch so dafs das Produkt derselben ungeändert bleibt. Ich nehme daher der Einfachheit wegen die $\varepsilon = 1$ an, oder lasse sie in die α eingehen.

Wir müssen nun die v genauer untersuchen, und zwar können wir sie jetzt die Coefficienten der μ bedeuten lassen. Es ist

$$v_{00} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 & -(1+y_0) \\ \alpha_2 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha_1 & \alpha & 1 & 1 \\ -(1+y_0) & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 & -1 \\ \alpha_2 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha_1 & \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2y_0 \begin{vmatrix} \alpha_2 & 1 & \alpha \\ \alpha_1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + y_0^2(\alpha^2-1)$$

$$v_{12} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha_1 & \alpha & 1 & -(1+y_2) \\ 1 & -(1+y_1) & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha_1 & \alpha & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha & 1 \\ \alpha_1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - y_2 \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha & 1 \\ \alpha_2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + y_1y_2(\alpha - \alpha_1\alpha_2).$$

Wendet man in diesen Determinanten das gewöhnliche Mittel an sie zu vereinfachen, indem man die letzte Horizontalreihe zu den andern addirt oder abzieht, so erhält man:

(20.)

$$\begin{cases} v_{00} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2+1 & \alpha_1+1 \\ \alpha_2+1 & 0 & \alpha-1 \\ \alpha_1+1 & \alpha-1 & 0 \end{vmatrix} + 2y_0 \begin{vmatrix} \alpha_2+\alpha & 1-\alpha \\ \alpha_1+1 & \alpha-1 \end{vmatrix} + y_0^2(\alpha^2-1) \\ \quad = (\alpha-1)\{2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) + 2y_0(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+1) + y_0^2(\alpha+1)\}, \\ v_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & \alpha_2-1 & \alpha_1+1 \\ \alpha_2+1 & 0 & \alpha+1 \\ \alpha^1-1 & \alpha+1 & 0 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} 1+\alpha_1 & \alpha_1+1 \\ \alpha_2+\alpha_1 & \alpha+1 \end{vmatrix} \\ \qquad\qquad + y_2 \begin{vmatrix} 1+\alpha_2 & \alpha_2+1 \\ \alpha_2+\alpha_1 & \alpha+1 \end{vmatrix} + y_1y_2(\alpha-\alpha_1\alpha_2) \\ \quad = \{2(\alpha+1)+y_1y_2\}(\alpha-\alpha_1\alpha_2) + \{(1+\alpha_1)y_1+(1+\alpha_2)y_2\}(\alpha+1-\alpha_1-\alpha_2). \end{cases}$$

§. 4.

Diese Ausdrücke vereinfachen sich nun indem man sich, wie schon oben angedeutet, der elliptischen Funktionen bedient.

Setzt man zunächst

$$(21.) \qquad y_i = z_i \frac{\sqrt{2.\alpha+1.\alpha_1+1.\alpha_2+1}}{\alpha_i+1},$$

so gehen die Gleichungen (20.) über in

$$(22.) \qquad \begin{cases} v_{00} = 2.\alpha-1.\alpha_1+1.\alpha_2+1.\{1+z^2+2pz\} \\ v_{12} = 2.\alpha+1.\alpha-\alpha_1\alpha_2.\{1+z_1z_2+q_0(z_1+z_2)\} \end{cases}$$

wo

$$(23.) \qquad p = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha+1)}{\sqrt{2.\alpha+1.\alpha_1+1.\alpha_2+1}} \qquad q_0 = \frac{\alpha+1-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha-\alpha_1\alpha_2}.\sqrt{\frac{\alpha_1+1.\alpha_2+1}{2.\alpha+1}}.$$

Erinnert man sich jetzt der identischen Gleichung

$$1+xy+\delta(x+y) = \frac{1+\delta}{2}(1+x)(1+y)+\frac{1-\delta}{2}(1-x)(1-y),$$

so wird auch

$$(24.) \qquad \begin{cases} v_{00} = 2.\alpha-1.\alpha_1+1.\alpha_2+1.\left\{\frac{1+p}{2}(1+z)^2+\frac{1-p}{2}(1-z)^2\right\} \\ v_{12} = 2.\alpha+1.\alpha-\alpha_1\alpha_2.\left\{\frac{1+q_0}{2}(1+z_1)(1+z_2)+\frac{1-q_0}{2}(1-z_1)(1-z_2)\right\}. \end{cases}$$

Nun setze ich

$$(25.) \qquad \frac{1-z_i}{1+z_i} = \cos\operatorname{am} v_i \qquad \text{und} \qquad k^2 = \frac{1-p}{2} \qquad k_1^2 = \frac{1+p}{2}.$$

Alsdann gehen die zwischen den v bestehenden Gleichungen (16.) durch die Substitutionen

$$v_{00} = 2.\alpha-1.\alpha_1+1.\alpha_2+1.(1+z)^2.\Delta^2\operatorname{am} v$$

$$v_{12} = 2.\alpha+1.\alpha-\alpha_1\alpha_2.1+z_1.1+z_2\left\{\frac{1+q_0}{2}+\frac{1-q_0}{2}\cos\operatorname{am} v_1\cos\operatorname{am} v_2\right\}$$

in die folgenden über:

$$(26.) \qquad \begin{cases} \Delta^2\operatorname{am} v_1\,\Delta^2\operatorname{am} v_2 = \frac{(\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2}{\alpha_1^2-1.\alpha_2^2-1}\left\{\frac{1+q_0}{2}+\frac{1-q_0}{2}\cos\operatorname{am} v_1\cos\operatorname{am} v_2\right\}^2 \\ \Delta^2\operatorname{am} v_2\,\Delta^2\operatorname{am} v = \frac{(\alpha_1-\alpha_2\alpha)^2}{\alpha_2^2-1.\alpha^2-1}\left\{\frac{1+q_1}{2}+\frac{1-q_1}{2}\cos\operatorname{am} v_2\cos\operatorname{am} v\right\}^2 \\ \Delta^2\operatorname{am} v\,\Delta^2\operatorname{am} v = \frac{(\alpha_2-\alpha\alpha_1)^2}{\alpha^2-1.\alpha_1^2-1}\left\{\frac{1+q_2}{2}+\frac{1-q_2}{2}\cos\operatorname{am} v\cos\operatorname{am} v_1\right\}^2 \end{cases}$$

$$(26.)\quad \Delta^2 \operatorname{am} v_1 \Delta^2 \operatorname{am} v_2 \Delta^2 \operatorname{am} v$$
$$= \frac{\alpha-\alpha_1\alpha_2 . \alpha_1-\alpha_2\alpha . \alpha_2-\alpha\alpha_1}{\alpha^2-1 . \alpha_1^2-1 . \alpha_2^2-1} \cdot \left\{\frac{1+q_0}{2} + \frac{1-q_0}{1} \cos \operatorname{am} v_1 \cos \operatorname{am} v_2\right\}$$
$$\times \left\{\frac{1+q_1}{2} + \frac{1-q_1}{2} \cos \operatorname{am} v_2 \cos \operatorname{am} v\right\} \left\{\frac{1+q_2}{2} + \frac{1-q_2}{2} \cos \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v_1\right\}.$$

Die ersten drei dieser Gleichungen nun erinnern unwillkürlich an die Form des Additionstheorems der elliptischen Funktionen, welche unter Anderm sich bei *Jacobi* Bd. XXXIX p. 325 d. J. und Opusc. Math. II. p. 171 findet:

$$\Delta \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am} v \Delta \operatorname{am}(u+v) = k_1^2 + k^2 \cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v \cos \operatorname{am}(u+v).$$

Damit die obigen Gleichungen aber mit dieser vollständig übereinstimmen, ist es nöthig nachzuweisen, dafs man setzen dürfe:

$$(27.)\quad \begin{cases} \frac{(\alpha-\alpha_1\alpha_2)}{\sqrt{\alpha_1^2-1 . \alpha_2^2-1}} \cdot \frac{1+q_0}{2} = \frac{k_1^2}{\Delta \operatorname{am}(u+v)} \\ \frac{\alpha-\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2-1 . \alpha_2^2-1}} \cdot \frac{1-q_0}{2} = \frac{k^2 \cos \operatorname{am}(u+v)}{\Delta \operatorname{am}(u+v)} \end{cases}$$

d. h. es mufs die identische Gleichung erfüllt sein, welche entsteht, wenn man diese beiden quadrirt, die erste mit $k^2 = \frac{1-p}{2}$ multiplicirt, die zweite mit $k_1^2 = \frac{1+p}{2}$, und sie dann addirt. So erhalten wir rechts $k^2 k_1^2 = \frac{1-p^2}{4}$, und

$$\frac{1-p^2}{4} = \frac{(\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2}{\alpha_1^2-1 . \alpha_2^2-1} \left\{\left(\frac{1+q_0}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+p}{2} + \left(\frac{1-q_0}{2}\right)^2 \cdot \frac{1-p}{2}\right\}.$$

Führt man rechts die Quadrate in der Parenthese aus, so kommt

$$1-p^2 = \frac{(\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2}{\alpha_1^2-1 . \alpha_2^2-1} \{1 + q_0^2 + 2q_0 p\}$$

oder

$$\alpha_1^2-1 . \alpha_2^2-1 \left\{1 - \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha+1)^2}{2 . \alpha_1+1 . \alpha_2+1 . \alpha+1}\right\}$$
$$= (\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2 \left\{1 + \frac{(\alpha+1-\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2} \cdot \frac{\alpha_1+1 . \alpha_2+1}{2 . \alpha+1} + \frac{(\alpha+1)^2-(\alpha_1+\alpha_2)^2}{\alpha-\alpha_1\alpha_2} \cdot \frac{1}{\alpha+1}\right\}.$$

Giebt man dieser Gleichung die Form

$$\alpha_1^2-1 . \alpha_2^2-1-(\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2$$
$$= \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha+1)^2}{2 . \alpha+1} \cdot \alpha_1-1 . \alpha_2-1 + \frac{(\alpha+1-\alpha_1-\alpha_2)^2}{2 . \alpha+1} \cdot \alpha_1+1 . \alpha_2+1$$
$$+ \frac{(\alpha+1)^2-(\alpha_1+\alpha_2)^2}{\alpha+1} (\alpha-\alpha_1\alpha_2),$$

so sieht man leicht, dafs auf beiden Seiten die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 & \alpha \\ \alpha_1 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

steht, dafs die obige Gleichung also wirklich eine identische ist, wie wir auch aus den im Anfange aufgestellten Prinzipien zu schliefsen berechtigt waren.

Setzen wir also, den Gleichungen (27.) entsprechend

$$(28.)\qquad \frac{1-q_0}{1+q_0} = \operatorname{cos\,am}\beta \qquad \frac{1-q_1}{1+q_1} = \operatorname{cos\,am}\beta_1 \qquad \frac{1-q_2}{1+q_2} = \operatorname{cos\,am}\beta_2,$$

so gehen die Gleichungen (26.) über in

$$(29.)\qquad \begin{cases} k_1^2 + k^2 \operatorname{cos\,am} v_1 \operatorname{cos\,am} v_2 \operatorname{cos\,am}\beta = (-1)^m \Delta\operatorname{am} v_1 \Delta\operatorname{am} v_2 \Delta\operatorname{am}\beta \\ k_1^2 + k^2 \operatorname{cos\,am} v_2 \operatorname{cos\,am} v \operatorname{cos\,am}\beta_1 = (-1)^{m_1} \Delta\operatorname{am} v_2 \Delta\operatorname{am} v \Delta\operatorname{am}\beta_1 \\ k_1^2 + k^2 \operatorname{cos\,am} v \operatorname{cos\,am} v_1 \operatorname{cos\,am}\beta_2 = (-1)^{m_2} \Delta\operatorname{am} v \Delta\operatorname{am} v_1 \Delta\operatorname{am}\beta_2 \end{cases}$$

und die letzte Gleichung giebt

$$m + m_1 + m_2 = \text{gerade.}$$

Alsdann aber zeigt die Theorie der elliptischen Funktionen, dafs die Gröfsen v den Gleichungen genügen müssen:

$$(30.)\qquad \begin{cases} v_1 + v_2 = \eta\beta + 2m(K + iK') + 4m'K \\ v_2 + v = \eta_1\beta_1 + 2m_1(K + iK') + 4m_1'K \\ v + v_1 = \eta_2\beta_2 + 2m_2(K + iK') + 4m_2'K \end{cases}$$

wo K, K' die gewöhnliche Bedeutung haben, die η ± 1 bedeuten, und die m, m' ganze Zahlen sind. Lösen wir die Gleichungen nach den v auf, und lassen die geraden Vielfachen von $K + iK'$ und $2K$ in den Werthen der v aus, da wir nur die cos am kennen wollen und diese hiedurch keine Veränderung erfahren, so erhalten wir

$$(31.)\qquad \begin{cases} v = \dfrac{-\eta\beta + \eta_1\beta_1 + \eta_2\beta_2}{2} + 2mK \\ v_1 = \dfrac{\eta\beta - \eta_1\beta_1 + \eta_2\beta_2}{2} + 2mK \\ v_2 = \dfrac{\eta\beta + \eta_1\beta_1 - \eta_2\beta_2}{2} + 2mK \end{cases}$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet. Da übrigens das Zeichen der v beliebig ist, und keinen Einflufs auf cos am v ausübt, so können wir *eins* der η willkürlich bestimmen, und haben so nur 8 wesentlich verschiedene Systeme der v.

§. 5.

Es bleibt nur übrig noch die b selbst zu bestimmen, nachdem wir durch die Gleichungen (21. 28. 31.) die γ bestimmt haben. Setzen wir die Determinante

$$(32.)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' & a_4'' \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + A_4 b_4$$

so dafs die A die Koordinaten des Schnittpunkts der drei gegebenen Ebenen bedeuten; so folgt aus der Gleichung, welche den Beginn des §. 3 bildete

$$PR^2 = v_{00}\mu^2 + v_{11}\mu'^2 + v_{22}\mu''^2 + 2v_{01}\mu\mu' + 2v_{12}\mu'\mu'' + 2v_{20}\mu''\mu$$

$$= \Delta^3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_1' & a_1'' & b_1\lambda + b_1'\lambda' + b_1''\lambda'' \\ a_2 & a_2' & a_2'' & b_2\lambda + b_2'\lambda' + b_2''\lambda'' \\ a_3 & a_3' & a_3'' & b_3\lambda + b_3'\lambda' + b_3''\lambda'' \\ a_4 & a_4' & a_4'' & b_4\lambda + b_4'\lambda' + b_4''\lambda'' \end{vmatrix}^2,$$

indem wir auf beiden Seiten die Coefficienten der λ vergleichen:

$$(33.)\qquad \begin{cases} \{A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + A_4 b_4\}^2 = \frac{v_{00}}{\Delta^3} \\ \{A_1 b_1' + A_2 b_2' + A_3 b_3' + A_4 b_4'\}\{A_1 b_1'' + A_2 b_2'' + A_3 b_3'' + A_4 b_4''\} = \frac{\varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0 v_{12}}{\Delta^3}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen giebt

$$(34.)\qquad A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + A_4 b_4 = \zeta_0 \sqrt{\frac{v_{00}}{\Delta^3}},$$

wo $\zeta = \pm 1$. Da aber alsdann die zweite ergiebt

$$(34\,a.)\qquad \zeta_1 \zeta_2 \sqrt{v_{11} v_{22}} = \varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0 v_{12},$$

so ist, wenn wir den Gröfsen $\sqrt{v_{00}}$ etc. eine feste Bedeutung beilegen von den ζ nur ein *einziges* willkürlich, so dafs es also nur zwei Systeme der ζ giebt. Man sieht, dafs an dieser Stelle zum letzten Male eine Zweideutigkeit entsteht, da von hier ab nur mit linearen Gleichungen zu operiren ist. Daher können wir schon die Anzahl der möglichen Lösungen angeben, welche auf 64 steigt.

Die Gleichung (34.) verbinden wir nun mit den Gleichungen

$$(35.)\qquad \begin{vmatrix} \Sigma\Sigma \Delta_{ik} b_i a_k = -\varepsilon_0^0 (1 + \gamma_0) \\ \Sigma\Sigma \Delta_{ik} b_i a_k' = -\varepsilon_0' \\ \Sigma\Sigma \Delta_{ik} b_i a_k'' = -\varepsilon_0''. \end{vmatrix}$$

So haben wir 4 lineare Gleichungen zur Bestimmung von b_1, b_2, b_3, b_4. Setzt man nun für den Augenblick

$$(36.) \quad \omega_i = \Delta_{i1} b_1 + \Delta_{i2} b_2 + \Delta_{i3} b_3 + \Delta_{i4} b_4$$

und bezeichnet mit U den Ausdruck in welchen die Funktion u für die Koordinaten des Schnittpunkts der gegebenen Ebenen übergeht

$$(37.) \quad U = \Sigma\Sigma u_{ik} A_i A_k,$$

so gehen die Gleichungen (34. 35.) in diese über:

$$(38.) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{\omega_1 \frac{\partial U}{\partial A_1} + \omega_2 \frac{\partial U}{\partial A_2} + \omega_3 \frac{\partial U}{\partial A_3} + \omega_4 \frac{\partial U}{\partial A_4}\right\} = \zeta_0 \sqrt{\frac{v_{00}}{\Delta}} \\ \omega_1 a_1 + \omega_2 a_2 + \omega_3 a_3 + \omega_4 a_4 = -\varepsilon_0^0 (1 + \gamma_0) \\ \omega_1 a_1' + \omega_2 a_2' + \omega_3 a_3' + \omega_4 a_4' = -\varepsilon_0' \\ \omega_1 a_1'' + \omega_2 a_2'' + \omega_3 a_3'' + \omega_4 a_4'' = -\varepsilon_0''. \end{cases}$$

Die Determinante dieses Systems ist U; ihr Differentialquotient nach dem Elemente $\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial A_i}$ ist A_i, und ihr Differentialquotient nach a_i^k ist der vollständige Differentialquotient $\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial a_i^k}$. Die Auflösung der Gleichungen giebt also:

$$(39.) \quad U\omega_i = A_i \zeta_0 \sqrt{\frac{v_{00}}{\Delta}} - \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0^0 (1 + \gamma_0) \frac{\partial U}{\partial a_i} + \varepsilon_0' \frac{\partial U}{\partial a_i'} + \varepsilon_0'' \frac{\partial U}{\partial a_i''}\right\}.$$

Die Gleichung der Ebene B läfst sich in der Form darstellen:

$$2\Delta B = \omega_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \omega_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \omega_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} + \omega_4 \frac{\partial u}{\partial x_4}.$$

Führt man hier die Werthe der ω ein, und setzt

$$X = \frac{1}{2\sqrt{-\Delta}}\left\{A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} + A_4 \frac{\partial u}{\partial x_4}\right\}$$

$$X^{(k)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=4} \frac{\partial U}{\partial a_i^k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

so wird

$$\Delta . U . B = \zeta_0 \sqrt{-v_{00}} . X - \{\varepsilon_0^0 (1 + \gamma_0) X^0 + \varepsilon_0' X' + \varepsilon_0'' X''\}$$

oder indem man mit ε_0^0 multiplicirt:

$$\varepsilon_0^0 . \Delta U B = \zeta_0 \varepsilon_0^0 \sqrt{-v_{00}} X + \{-(1 + \gamma_0) X^0 + \varepsilon_2' \varepsilon_2^0 X' + \varepsilon_1^0 \varepsilon_1'' X''\}$$

$$\sqrt{-v_{00}} = \sqrt{2 . 1 - \alpha . \alpha_1 + 1 . \alpha_2 + 1} . \frac{2\Delta \operatorname{am} v_0}{1 + \cos \operatorname{am} v_0}$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{2 . \alpha_1 + 1 . \alpha_2 + 1}{\alpha + 1}} \cdot \frac{1 - \cos \operatorname{am} v_0}{1 + \cos \operatorname{am} v_0}.$$

In Betreff der ζ ist noch eine Bemerkung zu machen. Bei der für $\sqrt{-v_{00}}$ gewählten Bedeutung giebt die Gleichung (34 *a.*)

$$\zeta^0\zeta' = \varepsilon_0''\varepsilon_1'' \qquad \zeta'\zeta'' = \varepsilon_1^0\varepsilon_2^0 \qquad \zeta''\zeta^0 = \varepsilon_0'\varepsilon_0''.$$

Also

$$\zeta^0\varepsilon_0^0 : \zeta'\varepsilon_1' : \zeta''\varepsilon_2'' = \varepsilon_0'\varepsilon_0'' : \varepsilon_1^0\varepsilon_1'' : \varepsilon_2^0\varepsilon_2';$$

so dafs die Gleichungen der sämmtlichen gesuchten Ebenen folgende sind:

$$(40.)\quad \begin{cases} 0 = \zeta.\varepsilon_0'\varepsilon_0''\sqrt{-v_{00}}\,X + \{-(1+y_0)X^0 + \varepsilon_2'\varepsilon_2^0 X' + \varepsilon_1^0\varepsilon_1'' X''\} \\ 0 = \zeta.\varepsilon_1''\varepsilon_1^0\sqrt{-v_{11}}\,X + \{\varepsilon_2'\varepsilon_2^0 X^0 - (1+y_1)X' + \varepsilon_0''\varepsilon_0' X''\} \\ 0 = \zeta.\varepsilon_2^0\varepsilon_2'\sqrt{-v_{22}}\,X + \{\varepsilon_1^0\varepsilon_1'' X^0 + \varepsilon_0'\varepsilon_0'' X' - (1+y_2)X''\} \qquad \zeta = \pm 1. \end{cases}$$

Man sieht, dafs von den ε nur die Verbindungen $\varepsilon_0'\varepsilon_0''$, $\varepsilon_1^0\varepsilon_1''$, $\varepsilon_2^0\varepsilon_2'$ eingehen, welche auch in den y allein vorkommen. Dies würde also vier Gruppen von Lösungen geben, die verschiedenen Werthe der $\cos$ am v acht, und die ζ zwei, so dafs man 64 Lösungen erhält.

§. 6.

Herr Prof. *Schellbach* hat eine Auflösung des vorliegenden Problems für den Fall einer Kugel bekannt gemacht, welche von drei Ebenen in gröfsten Kreisen geschnitten wird (45ster Band dieses Journals) und die dort gegebenen Formeln sind zunächst die Veranlassung zu der vorliegenden Untersuchung gewesen. Jene Formeln indefs lassen sich unmittelbar auf die allgemeine Aufgabe ausdehnen, bei welcher statt der Ebenen dreier gröfsten Kreise irgend andere gegeben sind. Sei die Gleichung der Kugel

$$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$$

und die Gleichungen der gegebenen und gesuchten Kreise

$$A^i \sin\vartheta^i = x_1\cos a_1^i + x_2\cos a_2^i + x_3\cos a_3^i - x_4\cos\vartheta^i = 0$$
$$\varepsilon_i^i B^i \sin\theta^i = x_1\cos b_1^i + x_2\cos b_2^i + x_3\cos b_3^i - x_4\cos\theta^i = 0.$$

Dann wird

$$(40\,a.)\quad \begin{cases} \alpha_i = \dfrac{\cos a_1^h\cos a_1^k + \cos a_2^h\cos a_2^k + \cos a_3^h\cos a_3^k - \cos\vartheta^h\cos\vartheta^k}{\sin\vartheta^h\sin\vartheta^k} \\ \qquad = \dfrac{\cos V^i - \cos\vartheta^h\cos\vartheta^k}{\sin\vartheta^h\sin\vartheta^k} = \cos\delta^i, \end{cases}$$

wenn V^i die Seiten des von den gegebenen Kreismittelpunkten gebildeten sphärischen Dreiecks bedeuten, δ^i die Winkel, welche die von zwei Ecken dieses Dreiecks nach den Schnittpunkten ihrer Kreise gezogenen sphärischen Bogen mit einander bilden.

Nun denke man sich ein sphärisches Dreieck construirt, dessen Winkel Γ, Γ_1, Γ_2 und dessen Seiten g, g_1, g_2, welches dadurch bestimmt ist, dafs

$$(40\,b.) \qquad \cos\Gamma = -\varepsilon_0'\varepsilon_0''\cos\delta^0 \text{ etc.}$$

Die vier verschiedenen Dreiecke, welche den verschiedenen Systemen der ε entsprechen, werden durch dieselben gröfsten Kreise gebildet, und wenn man durch Γ, Γ_1, Γ_2, g, g_1, g_2 Winkel und Seiten *eines* derselben bezeichnet, so sind die der übrigen:

$$\begin{array}{cccccc} \Gamma & \pi-\Gamma_1 & \pi-\Gamma_2 & g & \pi-g_1 & \pi-g_2 \\ \pi-\Gamma & \Gamma_1 & \pi-\Gamma_2 & \pi-g & g_1 & \pi-g_2 \\ \pi-\Gamma & \pi-\Gamma_1 & \Gamma_2 & \pi-g & \pi-g_1 & g_2. \end{array}$$

Man hat sodann aus (27. 28.), nach bekannten Formeln:

$$(41.) \quad \begin{cases} \cos\operatorname{am}\beta_i = \dfrac{\sin\frac{\Gamma_h}{2}\sin\frac{\Gamma_k}{2}-\sin\frac{\Gamma_i}{2}}{\sin\frac{\Gamma_h}{2}\sin\frac{\Gamma_k}{2}+\sin\frac{\Gamma_i}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{s}{2}-g_i\right) \\ \Delta\operatorname{am}\beta_i = \dfrac{\cos\frac{\Gamma_h}{2}\cos\frac{\Gamma_k}{2}}{\sin\frac{\Gamma_h}{2}\sin\frac{\Gamma_k}{2}+\sin\frac{\Gamma_i}{2}} = \dfrac{\cos\frac{s}{2}}{\cos\left(\frac{s}{2}-g_i\right)} \end{cases}$$

$$2s = g_1+g_2+g$$

und

$$k^2 = \sin^2\frac{s}{2} \qquad k_1^2 = \cos^2\frac{s}{2},$$

so dafs der Modul durch den Umfang des construirten sphärischen Dreiecks unmittelbar gegeben ist.

Man kann sich nun durch die Analogie bestimmen lassen, drei Winkel α, α_1, α_2 zu suchen, welche die Bedingungen erfüllen:

$$(42.) \quad \begin{cases} \cos\operatorname{am}(\beta_h+\beta_k) = \operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\alpha_i \\ \Delta\operatorname{am}(\beta_h+\beta_k) = \dfrac{\cos\frac{s}{2}}{\cos\alpha_i}. \end{cases}$$

Dann sieht man aus dem oben angeführten Additionstheorem, dafs die α den Gleichungen genügen:

$$(43.) \quad 1 = \frac{\cos\alpha_i\cos\left(\frac{s}{2}-g_h\right)\cos\left(\frac{s}{2}-g_k\right)}{\cos\frac{s}{2}} - \frac{\sin\alpha_i\sin\left(\frac{s}{2}-g_h\right)\sin\left(\frac{s}{2}-g_k\right)}{\sin\frac{s}{2}}$$

und diejenigen Wurzeln dieser Gleichungen, welche nicht die Gleichungen (43.) erfüllen, genügen den folgenden:

$$(44.)\quad \begin{cases} \cos\operatorname{am}(\beta_h-\beta_k) = \operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\alpha_i' \\ \Delta\operatorname{am}(\beta_h-\beta_k) = \frac{\cos\frac{s}{2}}{\cos\alpha_i'}. \end{cases}$$

Bemerken wir nun die identischen Gleichungen

$$\cos^2\operatorname{am}\frac{u}{2} = \frac{k_1^2}{k^2}\cdot\frac{1-\Delta\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u-\cos\operatorname{am}u}$$

$$\Delta^2\operatorname{am}\frac{u}{2} = k_1^2\cdot\frac{1-\cos\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u-\cos\operatorname{am}u},$$

welche man unter Anderm aus dem erwähnten Additionstheorem ohne Weiteres findet, so haben wir aus (41. 42. etc.)

$$\Delta^2\operatorname{am}\frac{\beta_i}{2} = \cos\frac{s}{2}\,\frac{\cos\frac{s-g_i}{2}}{\cos\frac{g_i}{2}}$$

$$\cos^2\operatorname{am}\frac{\beta_i}{2} = \operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{g_i}{2}$$

$$\sin^2\operatorname{am}\frac{\beta_i}{2} = \frac{\sin\frac{s-g_i}{2}}{\sin\frac{s}{2}\cos\frac{g_i}{2}}$$

und eben dieselben Formeln für $\frac{\beta_h+\beta_k}{2}$ und $\frac{\beta_h-\beta_k}{2}$, wo denn $\frac{s}{2}-\alpha_i$ und $\frac{s}{2}-\alpha_i'$ an die Stelle von g_i tritt.

Und indem man nun die Gleichungen Fundamenta p. 33 (10—12.) anwendet, wird

$$\Delta\operatorname{am}\frac{\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2}\;\Delta\operatorname{am}\frac{-\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2} = \cos\frac{s}{2}\,\frac{\cos\frac{g_i+\alpha_i-\frac{s}{2}}{2}}{\cos\frac{g_i-\alpha_i+\frac{s}{2}}{2}}$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2}\cos\operatorname{am}\frac{-\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2} = \operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{g_i-\alpha_i-\frac{s}{2}}{2}$$

$$\sin\operatorname{am}\frac{\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2}\cos\operatorname{am}\frac{-\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2} = \frac{\sin\dfrac{g_i+\alpha_i-\frac{s}{2}}{2}}{\sin\dfrac{s}{2}\cos\dfrac{g_i-\alpha_i'-\frac{s}{2}}{2}}$$

$$\Delta\operatorname{am}\frac{\beta_i+\beta_h-\beta_k}{2}\;\Delta\operatorname{am}\frac{\beta_i-\beta_h+\beta_k}{2} = \cos\frac{s}{2}\,\frac{\cos\dfrac{g_i+\alpha_i'-\frac{s}{2}}{2}}{\cos\dfrac{g_i-\alpha_i'-\frac{s}{2}}{2}}$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{\beta_i+\beta_h-\beta_k}{2}\cos\operatorname{am}\frac{\beta_i-\beta_h+\beta_k}{2} = \operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{g-\alpha_i'-\frac{s}{2}}{2}$$

$$\sin\operatorname{am}\frac{\beta_i+\beta_h-\beta_k}{2}\cos\operatorname{am}\frac{\beta_i-\beta_h+\beta_k}{2} = -\frac{\sin\dfrac{g_i+\alpha_i'-\frac{s}{2}}{2}}{\sin\dfrac{s}{2}\cos\dfrac{g_i-\alpha_i'-\frac{s}{2}}{2}}.$$

Diese Formeln, zusammen mit (43.) bilden die Verallgemeinerung der von Herrn Prof. *Schellbach* a. a. O. gegebenen, und sind genau mit denselben identisch. Auch sind dieselben natürlich für den oben ganz allgemein behandelten Fall gültig, wenn nur die $I'g$ aus den Gleichungen (40 *a*. 40 *b*.) bestimmt werden; und sie dienen so gewissermafsen zur Umgehung der elliptischen Funktionen.

Berlin den 9. Dezember 1855.

24.

Zur Theorie der binären kubischen Formen.

(Von Herrn *F. Arndt.*)

Der Erste, welcher Untersuchungen über die binären Formen des dritten Grades publicirt hat, ist bekanntlich ***Eisenstein*** (Bd. XXVII dieses Journals). Die Resultate derselben beschränken sich indessen auf einige wenige Theoreme, und beruhen auf derartigen Methoden, welche zur allgemeinen Lösung der Fundamentalprobleme nicht führen können. Die Bestimmung der Anzahl der Transformationen, sowie der Anzahl der kubischen Classen, welche zu einer determinirenden quadratischen Classe gehören, aber nur für den besonderen Fall, wo die Determinante dieser Classe gleich $-4p$, und p eine positive Primzahl $4m+3$, die überdiefs zu den von ***Gaufs*** so genannten ***regulären*** Determinanten gehört, ist im Wesentlichen Alles, was von ***Eisenstein*** in diesem Gebiete geleistet worden ist. Denn der p. 76 erweiterte und ohne Beweis aufgestellte Satz, in welchem nur noch die Einschränkung, dafs die Determinante ***ohne quadratischen Theiler*** sei, festgehalten wird, ist weder allgemein richtig (er gilt z. B. nicht für die positiven Determinanten), noch kann er durch die früheren Principien bewiesen werden.

Diese Sätze von ***Eisenstein*** waren mir noch unbekannt, als ich im Jahre 1850 an die Untersuchung der kubischen Formen ging. Die Resultate derselben sind in der Zeitschrift von ***Grunert*** Th. XVII und XIX publicirt. Man findet dort die Fundamentalprobleme, betreffend die Aequivalenz, Transformation, Eintheilung in Classen, Einschliefsung vollständig gelöset. In Th. XIX steht der allgemeine Satz, nach welchem sich die Classification der kubischen Formen für eine beliebige Determinante bewerkstelligen läfst.

Die Auflösung einer gewissen Klasse von unbestimmten Gleichungen höherer Grade mit 3 Unbekannten hat mich nun auf eine neue, überaus einfache, Darstellung der Hauptresultate der Theorie der binären kubischen Formen geführt, die mir der Mittheilung nicht unwerth geschienen hat. Es kommt dabei ein Lemma in Anwendung, dessen Beweis ich seiner Einfachheit wegen übergehen zu dürfen glaube, nämlich:

„Es sei a prim gegen $2b$ und $b^2 - ac = D$; man kann eine ganze „Zahl B finden, so dafs $B \equiv b \pmod{a}$ und $B^2 \equiv D \pmod{a^n}$ ist, wo „n eine positive ganze Zahl. Auch ist dann a^n prim gegen $2B$, und die „unendlich vielen Werthe von B werden nach dem mod. a^n congruent „sein."

„Ist ferner a prim gegen b, $b^2 - 4ac = D$, so kann man immer den „Congruenzen $B \equiv b \pmod{2a}$, $B^2 \equiv D \pmod{4a^n}$ genügen, so dafs „a^n prim gegen B, und die B nach dem mod. $2a^n$ congruent sind."

Die Eigenschaften der kubischen Form $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 \ldots (f)$ hängen gröfstentheils von der quadratischen Form

$$2(b^2 - ac)x^2 + 2(bc - ad)xy + 2(c^2 - bd)y^2 \ldots (\varphi)$$

ab, welche ich die Charakteristik genannt habe. Ihre Determinante

$$D = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) = a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd$$

wird die Determinante von (f) genannt, wobei zu bemerken, dafs D nur $\equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ sein kann, und dafs eine kubische Form von negativer Determinante stets eine positive quadratische Form zur Charakteristik hat. Dies folgt augenblicklich aus den beiden identischen Gleichungen:

$$(a^2d + 2b^3 - 3abc)^2 - 4(b^2 - ac)^3 - a^2D = 0$$
$$(d^2a + 2c^3 - 3bcd)^2 - 4(c^2 - bd)^3 - d^2D = 0.$$

Transformirt man f und φ durch dieselbe Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ in die Formen (f') und (φ'), so zeigt die Rechnung, dafs (φ') wieder die Charakteristik von (f') ist. ***Wenn demnach f, f' eigentlich äquivalent sind, so gilt dasselbe von φ, φ', welcher Satz aber nicht umgekehrt werden darf. In jedem Falle aber kommt die Frage nach der eigentlichen Aequivalenz zweier kubischen Formen f, f' von derselben Determinante auf die Betrachtung kubischer Formen von derselben Charakteristik zurück.*** Es sei nämlich φ die Charakteristik von f, φ' die von f'. Sind φ, φ' nicht eigentlich äquivalent, so gilt dasselbe von f, f'. Im entgegengesetzten Falle aber transformire man φ in φ' durch eine Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, die aus der Theorie der quadratischen Formen als bekannt vorausgesetzt wer-

den kann, und durch die nämliche Substitution f in f'', welche letztere Form mit f' einerlei Charakteristik haben wird; da nun f und f'' eigentlich äquivalent sind, so werden f und f' eigentlich äquivalent sein, oder nicht, jenachdem f' und f'' eigentlich äquivalent sind, oder nicht.

Um alle kubischen Formen von derselben Determinante $D = 4m$ oder $4m+1$ zu klassificiren, stelle man zunächst die Repräsentanten aller quadratischen Klassen zur Determinante D (bei negativem D nur die positiven Formen) auf: φ, φ', φ'' etc., und suche die verschiedenen kubischen Formen auf, deren Charakteristiken diese letztern sind. ***Aequivalente quadratische Formen brauchen nämlich nicht in Betracht gezogen zu werden.*** Um dies zu zeigen, seien φ, ψ eigentlich äquivalente quadratische Formen (von der Determinante D), und f, f_1, f_2, etc. alle kubischen Klassenrepräsentanten, deren gemeinschaftliche Charakteristik φ ist. Man bezeichne ferner mit g eine Kubikform mit der Charakteristik ψ, transformire ψ in φ durch die Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ wo $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, und g in eine andere Kubikform g' durch die nämliche Substitution; g' wird mit g eigentlich äquivalent sein, und die Charakteristik φ haben. Nach der obigen Definition der Formen f, f_1, f_2, ... ist aber g' mit irgend einer derselben eigentlich äquivalent, folglich auch g, wodurch die Behauptung erwiesen ist.

Die Klassification der Kubikformen von gegebener Determinante D hängt hienach von zwei Problemen ab, nämlich 1°. „Alle Kubikformen zu bestimmen, welche eine gegebene Charakteristik haben, und 2°. dieselben in Klassen zu bringen." Dabei genügt es, die *primitiven* kubischen Formen (a, b, c, d), d. h. diejenigen zu betrachten, für welche a, b, c, d ohne gemeinschaftlichen Theiler sind. Es ist hiebei wohl zu bemerken, dafs die Charakteristik einer primitiven Kubikform keine *primitive* quadratische Form zu sein braucht. Man hat ferner zwei Fälle zu unterscheiden, indem die Charakteristik

$$\varphi = (2(b^2-ac),\ bc-ad,\ 2(c^2-bd))$$

sowohl aus einer eigentlich primitiven Form, wie aus einer uneigentlich primitiven derivirt sein kann. Im ersten Falle sei (f, g, h) jene eigentlich primitive Form, ihre Determinante $= \Delta$; da f und h nicht beide gerade sind, so ist klar, dafs

$$\varphi \text{ die Form } (2mf,\ 2mg,\ 2mh)$$

haben mufs, deren Determinante $D = 4m^2\Delta$ ist. — Im zweiten Falle sei $(2f, g, 2h)$ die uneigentlich primitive Form von der Determinante $g^2-4fh = \Delta$,

wo also g und Δ ungerade sind. Es erhellt, dafs hier

φ von der Form $(2mf, mg, 2mh)$, $D = m^2\Delta$ ist.

Betrachten wir nun den ersten Fall. Um alle primitiven kubischen Formen mit der Charakteristik φ zu bestimmen, hat man den folgenden Gleichungen

$$(a.) \quad b^2 - ac = mf, \quad bc - ad = 2mg, \quad c^2 - bd = mh$$

zu genügen, so dafs die Unbekannten a, b, c, d ohne gemeinschaftlichen Theiler sind. Um die Aufgabe zu vereinfachen, wollen wir annehmen, dafs f prim gegen $2m\Delta$, mithin auch prim gegen $2g$ ist, eine statthafte Annahme, indem durch die eigentlich primitive Form (f, g, h) unendlich viele Zahlen dargestellt werden, die gegen eine gegebene Zahl prim sind. Es wird nun behauptet, dafs unter dieser Voraussetzung a und b relative Primzahlen sein werden. Um dies zu zeigen, sind noch die identischen Gleichungen

$$(b.) \quad cf - 2bg + ah = 0, \quad df - 2cg + bh = 0$$

zu beachten, welche sich aus $(a.)$ ergeben. Es sei der gröfste gemeinschaftliche Theiler (ϑ) von a und b von der Einheit verschieden. Nach $(a.)$ geht ϑ in mf und $2mg$, folglich in dem gröfsten gemeinsamen Maafs dieser Zahlen (m) auf, ist also prim gegen f; daher geht ϑ in c auf, was aus $(b.)$ folgt, folglich ist m durch ϑ^2 theilbar (wegen der ersten Gl. $(a.)$), also ad und bd ebenfalls (wegen der beiden andern Gl. $(a.)$); nun mufs ϑ^2 prim gegen d sein, da a, b, c, d keinen gemeinschaftlichen Theiler haben dürfen, folglich sind a und b durch ϑ_2 theilbar, d. h. die ganzen Zahlen $\frac{a}{\vartheta}$, $\frac{b}{\vartheta}$ hätten noch den Faktor ϑ gemein, während sie relative Primzahlen sind. Da hiemit erwiesen, dafs a und b prim gegen einander, so folgt aus $(a.)$, dafs a prim gegen mf ist.

Dies vorausgesetzt, beruht die neue Theorie auf der folgenden identischen Gleichung, die sich aus $(a.)$ ergiebt:

$(c.)$ $(bf - ag)^2 - a^2\Delta = mf^3$, oder $\xi^2 - \eta^2\Delta = mf^3$; wo $\xi = bf - ag$, $\eta = a$ prim gegen einander sein werden, wie leicht erhellt. Mit Hülfe dieser Gleichung lassen sich nach $(a.)$ die Coefficienten der Kubikform durch ξ und η ausdrücken wie folgt:

$$(d.) \quad a = \eta, \quad b = \frac{g\eta + \xi}{f}, \quad c = \frac{(g^2 + \Delta)\eta + 2g\xi}{f^2}, \quad d = \frac{(g^3 + 3g\Delta)\eta + (3g^2 + \Delta)\xi}{f^3}.$$

Man bemerke noch folgende irrationale Form, deren Anwendung die weitere

Betrachtung sehr vereinfacht. Bringt man den Ausdruck

$$\frac{1}{f^3}(fx+gy+y\sqrt{\Delta})^3(\xi+\eta\sqrt{\Delta}) \text{ auf die Form } \mathfrak{L}+L\sqrt{\Delta},$$

so wird $L = ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$, wo a, b, c, d die obigen Werthe haben, diejenige Kubikform, um deren Bestimmung es sich handelt. Auch die andere Form $\mathfrak{L}$ spielt in der Theorie der kubischen Formen eine Rolle; man kann sie die *Adjuncta* von L nennen. Die Coefficienten dieser Form sind

$$\mathfrak{a}=\xi,\quad \mathfrak{b}=\frac{g\xi+\Delta\eta}{f},\quad \mathfrak{c}=\frac{(g^2+\Delta)\xi+2g\Delta\eta}{f^2},\quad \mathfrak{d}=\frac{(g^3+3g\Delta)\xi+(3g^2+\Delta)\Delta\eta}{f^3},$$

und lassen sich durch a, b, c, d, f, g, h wie folgt ausdrücken:

$$\mathfrak{a}=bf-ag,\quad \mathfrak{b}=bg-ah,\quad \mathfrak{c}=df-cg,\quad \mathfrak{d}=dg-ch.$$

Die Form $\mathfrak{L}$ ist übrigens auch von *Eisenstein* bemerkt worden.

Die Zahlen ξ und η sind nun nicht willkührliche Wurzeln der unbestimmten Gleichung (*c.*), denn es tritt die Bedingung auf, dafs b, c, d *ganze* Zahlen seien. Zuförderst bemerken wir, dafs c und d von selbst ganz sein werden, wenn nur b eine ganze Zahl ist. In der That aus $g\eta+\xi\equiv 0 \pmod{f}$ folgt $(g\eta+\xi)^2\equiv 0 \pmod{f^2}$, d. i. $((g^2+\Delta)\eta+2g\xi)\eta\equiv 0 \pmod{f^2}$; nun ist f prim gegen η (denn ein gemeinschaftlicher Theiler von f, η würde ξ messen), folglich ist $(g^2+\Delta)\eta+2g\xi\equiv 0 \pmod{f^2}$, d. h. c eine ganze Zahl. — Es ist weiter $(g\eta+\xi)((g^2+\Delta)\eta+2g\xi)\equiv 0 \pmod{f^3}$, woraus wie vorher folgt, dafs d eine ganze Zahl ist.

Wir haben also nur noch die eine Bedingung: „b ganz" zu berücksichtigen. Diese läfst sich auf eine andere zurückführen. Nach dem in der Einleitung angeführten Lemma bestimme man eine Zahl G so, dafs

$$(e.)\qquad G\equiv g \pmod{f},\qquad G^2\equiv\Delta \pmod{f^3};$$

da $g\eta+\xi$ durch f theilbar sein soll, so gilt dasselbe von $G\eta+\xi$. Es ist ferner $(\xi+G\eta)(\xi-G\eta)=(\Delta-G^2)\eta^2+mf^3$, also nach (*e.*), $(\xi+G\eta)(\xi-G\eta)$ durch f^3 theilbar. Es werden aber f und $\xi-G\eta$ relative Primzahlen sein; denn ein gemeinschaftlicher Theiler dieser Zahlen würde nach dem Vorhergehenden in $\xi+G\eta$ aufgehen, mithin in $G\eta$, während doch f prim gegen dieses Produkt ist. Hieraus folgt $\xi+G\eta\equiv 0 \pmod{f^3}$. Man setze die Zahl links $=f^3\tau$, und substituire den sich ergebenden Werth ξ in (*c.*); es kommt die Gleichung

$$(f.)\qquad f^3\tau^2-2G\tau\eta+\frac{G^2-\Delta}{f^3}\eta^2=m,$$

und wenn man alle möglichen Werthe τ, η bestimmt, welche dieser Gleichung

genügen und prim gegen einander sind, ferner die entsprechenden $\xi = f^3\tau - G\eta$ berechnet, so hat man nach (*d.*) alle Kubikformen (a, b, c, d), welche die Form $\varphi = (2mf, 2mg, 2mh)$ zur Charakteristik haben. Die Aufgabe ist hienach darauf zurückgeführt, alle Darstellungen der Zahl m durch die quadratische Form

$$\varphi \ldots \left(f^3, -G, \frac{G^2 - \Delta}{f^3}\right)$$

von der Determinante Δ zu bestimmen. Es ist übrigens leicht zu sehen, dafs diese Form durch ***Triplication*** der Form (f, g, h) von der nämlichen Determinante entsteht.

Die erste Bedingung der Lösbarkeit der Gleichung (*f.*) besteht darin, dafs Δ quadratischer Rest von m ist. Ist sie erfüllt, so vertheilen sich nach ***Gaufs*** die sämmtlichen Lösungen in eine endliche Anzahl von ***Gruppen***, die zu den verschiedenen Werthen des Ausdrucks $\omega \equiv \sqrt{\Delta} \pmod{m}$ gehören. Für ein bestimmtes ω entspricht eine Gruppe von Auflösungen den sämmtlichen eigentlichen Transformationen der Form φ in die Form

$$\left(m, \omega, \frac{\omega^2 - \Delta}{m}\right),$$

mit der sie eigentlich aequivalent sein mufs. Bezeichnet man ferner mit τ_0, η_0 eine ***individuelle*** Lösung der Gruppe, so erhält man bekanntlich alle übrigen Lösungen dieser Gruppe τ, η durch die Formeln

$$\tau = \tau_0 T + (\tau_0 G - \eta_0 H) U, \qquad \eta = \eta_0 T + (\tau_0 f^3 - \eta_0 G) U,$$

wo $H = \frac{G^2 - \Delta}{f^3}$ und $T^2 - \Delta U^2 = 1$ ist. Setzt man noch $\xi_0 = f^3\tau_0 - G\eta_0$, so findet sich leicht $\xi + \eta\sqrt{\Delta} = (\xi_0 + \eta_0\sqrt{\Delta})(T + U\sqrt{\Delta})$. Die kubische Form L_0, welche der individuellen Lösung entspricht, ist durch die Gleichung

$$\frac{1}{f^3}(fx + gy + y\sqrt{\Delta})^3(\xi_0 + \eta_0\sqrt{\Delta}) = \mathfrak{L}_0 + L_0\sqrt{\Delta}$$

bestimmt, jede andere durch eine ähnliche Gleichung, in welcher ξ, η, $\mathfrak{L}$, L statt ξ_0, η_0, $\mathfrak{L}_0$, L_0 stehen. Nach dem Vorhergehenden ist also

$$(g.) \qquad \mathfrak{L} + L\sqrt{\Delta} = (\mathfrak{L}_0 + L_0\sqrt{\Delta})(T + U\sqrt{\Delta}).$$

Setzt man, um L zu entwickeln, $L_0 = (a_0, b_0, c_0, d_0)$, mithin

$$\mathfrak{L}_0 = (b_0 f - a_0 g,\ b_0 g - a_0 h,\ d_0 f - c_0 g,\ d_0 g - c_0 h),$$

ferner $L = (a, b, c, d)$, so kommt

$$(h.)\quad \begin{cases} a = a_0 T + (b_0 f - a_0 g) U \\ b = b_0 T + (b_0 g - a_0 h) U \\ c = c_0 T + (d_0 f - c_0 g) U \\ d = d_0 T + (d_0 g - c_0 h) U. \end{cases}$$

Wir haben somit folgenden Satz erwiesen:

Theorem.

„Es sei (f, g, h) eine eigentlich primitive Form von der Determinante Δ, und f prim gegen $2m\Delta$, ferner $G \equiv g \pmod{f}$, $G^2 \equiv \Delta \pmod{f^3}$. Die sämmtlichen primitiven Kubikformen, welche die gemeinschaftliche Charakteristik $\varphi = (2mf, 2mg, 2mh)$ haben, vertheilen sich in eine endliche Anzahl von Gruppen, die den verschiedenen Wurzeln der Congruenz $\omega^2 \equiv \Delta \pmod{m}$ entsprechen. Aus einer individuellen Form jeder Gruppe (a_0, b_0, c_0, d_0) findet man alle übrigen Formen der nämlichen Gruppe (a, b, c, d) nach den Formeln $(h.)$, während die Coefficienten der individuellen Form folgende Werthe haben:

$$a_0 = \eta_0, \qquad b_0 = \frac{g\eta_0 + \xi_0}{f}, \qquad c_0 = \frac{(g^2+\Delta)\eta_0 + 2g\xi_0}{f^2},$$

$$d_0 = \frac{(g^3 + 3g\Delta)\eta_0 + (3g^2+\Delta)\xi_0}{f^3}.$$

Hier ist $\xi_0 = f^3\tau_0 - G\eta_0$, und τ_0, η_0 sind beliebige Wurzeln der unbestimmten Gleichung

$$f^3\tau^2 - 2G\tau\eta + \frac{G^2-\Delta}{f^3}\eta^2 = m,$$

prim gegen einander und aus derjenigen Gruppe von Lösungen, die man betrachtet, die also einem bestimmten Werth von $\omega \equiv \sqrt{\Delta} \pmod{m}$ entsprechen."

Wir haben uns nun mit der ***Klassification*** der Formen $(f.)$ (a, b, c, d) zu beschäftigen. Nach dem Obigen kann man

$$\frac{1}{f^3}(fx + gy + y\sqrt{\Delta})^3(\xi + \eta\sqrt{\Delta}) = \mathfrak{L} + L\sqrt{\Delta}$$

setzen, so dafs $f = L$ ist, wo ξ, η ihre obige Bedeutung behalten. Man erhält alle mit L eigentlich äquivalente Formen von derselben Charakteristik φ, wenn man L durch alle diejenigen eigentlichen Substitutionen transformirt, durch welche φ in sich selbst übergeht. Durch diese Substitutionen geht offen-

bar auch die Form (f, g, h) in sich selbst über; die Substitution ist also

$$x = (T - gU)x' - hUy', \qquad y = fUx' + (T + gU)y',$$

wo T, U ihre obige Bedeutung beibehalten. Hienach findet sich

$$fx + gy + y\sqrt{\Delta} = (fx' + gy' + y'\sqrt{\Delta})(T + U\sqrt{\Delta}),$$

folglich geht $\mathfrak{L} + L\sqrt{\Delta}$ über in $\frac{1}{f^3}(fx + gy + y\sqrt{\Delta})^3(\xi + \eta\sqrt{\Delta})(T + U\sqrt{\Delta})^3$, d. h. in $(\mathfrak{L} + L\sqrt{\Delta})(T + U\sqrt{\Delta})^3$. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Theorem.

„Es sei $f \ldots (a, b, c, d)$ eine Kubikform mit der Charakteristik $\varphi \ldots (2mf, 2mg, 2mh)$, wo (f, g, h) eine eigentlich primitive Form von der Determinante Δ. Man findet alle mit f eigentlich äquivalente kubische Formen mit der nämlichen Charakteristik φ, nämlich $f' \ldots (a', b', c', d')$ nach folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} a' &= aT' + (bf - ag)U' \\ b' &= bT' + (bg - ah)U' \\ c' &= cT' + (df - cg)U' \\ d' &= dT' + (dg - ch)U', \end{aligned}$$

wo $T' + U'\sqrt{\Delta} = (T + U\sqrt{\Delta})^3$, und T, U alle möglichen Wurzeln der unbestimmten Gleichung $T^2 - \Delta U^2 = 1$ sind."

Vergleicht man diese Formeln mit $(h.)$, so ergiebt sich, dafs eigentlich äquivalente Kubikformen mit derselben Charakteristik nothwendig ***derselben Gruppe angehören,*** so dafs also Formen aus verschiedenen Gruppen auch verschiedenen Klassen angehören.

Um nun die Formen derselben Gruppe zu klassificiren, unterscheiden wir folgende Fälle:

1°. Ist Δ ein Quadrat, so enthält die Gruppe $(h.)$ nur zwei Formen (a_0, b_0, c_0, d_0) und $(-a_0, -b_0, -c_0, -d_0)$, da die Gleichung $TT - \Delta UU = 1$ in diesem Falle nur die beiden Wurzelpaare $T = \pm 1$, $U = 0$ zuläfst. Diese Formen bilden *eine* Klasse, da die eine in die andere durch die Substitution $\begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$ übergeht.

2°. Ist Δ negativ, so gilt dasselbe. In dem Falle $\Delta = -1$ jedoch kommt noch die Lösung $T = 0$, $U = \pm 1$ hinzu, aber die 4 Formen, welche die Gruppe nun enthält, constituiren wiederum eine einzige Klasse, denn für

$T=0$, $U=\pm 1$ kommt $T'=0$, $U'=\pm 1$, weshalb die betreffenden Formen nach dem vorhergehenden Theorem eigentlich äquivalent sind.

3°. Ist Δ endlich positiv, so läfst sich erweisen, dafs die unendlich vielen Formen derselben Gruppe *drei* verschiedene Klassen constituiren.

Um dies zu zeigen, werfe man aus (*h.*) zunächst alle die Formen aus, welche durch Veränderung aller Vorzeichen anderer Formen entstehen, was darauf hinauskommt, T als positiv zu betrachten. Sind nun t, u die *kleinsten positiven* Wurzeln der Gleichung $TT-\Delta UU=1$, verschieden von $T=1$, $U=0$, so erhält man bekanntlich alle übrigen Wurzeln durch die Formel

$$T+U\sqrt{\Delta}=(t+u\sqrt{\Delta})^{\lambda},$$

wo λ jede beliebige ganze Zahl zwischen $-\infty$ und $+\infty$ bezeichnet. Bedeutet nun L_0 die Grundform der Gruppe, während L, L' zwei andere Formen derselben, so hat man

$$L=L_0T+\mathfrak{L}_0U, \qquad \mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0T+L_0\Delta U,$$
$$L'=L_0T'+\mathfrak{L}_0U', \qquad \mathfrak{L}'=\mathfrak{L}_0T'+L_0\Delta U',$$

und hieraus folgt

$$LT'+\mathfrak{L}U'=L'T+\mathfrak{L}'U, \qquad \mathfrak{L}T'+L\Delta U'=\mathfrak{L}'T+L'\Delta U,$$

also durch Elimination von $\mathfrak{L}'$:

$$L'=L(TT'-\Delta UU')+\mathfrak{L}(TU'-UT'),$$

d. h. wenn die Formen (a, b, c, d); (a', b', c', d') den Werthen T, U; T', U' ihrer Gruppe entsprechen, so kann man die eine Form durch die andere so ausdrücken:

$$a'=aT''+(bf-ag)U''$$
$$b'=bT''+(bg-ah)U''$$
$$c'=cT''+(df-cg)U''$$
$$d'=dT''+(dg-ch)U'',$$

so dafs $T''=TT'-\Delta UU'$ und $U''=TU'-UT'$ ist. Macht man nun

$$T+U\sqrt{\Delta}=(t+u\sqrt{\Delta})^{\lambda}, \qquad T'+U'\sqrt{\Delta}=(t+u\sqrt{\Delta})^{\lambda'},$$

so kommt

$$T''+U''\sqrt{\Delta}=(t+u\sqrt{\Delta})^{\lambda'-\lambda}.$$

Sollen die betrachteten Formen eigentlich äquivalent sein, so mufs nach dem obigen Theorem $T''+U''\sqrt{\Delta}$ die Form $(t+u\sqrt{\Delta})^{3\mu}$ haben, und umgekehrt, also kommt $\lambda'-\lambda=3\mu$. Hieraus ersieht man leicht, dafs die Formen der-

selben Gruppe in der That 3 Klassen constituiren; die Repräsentanten derselben erhält man aus (*h.*), wenn man $T+U\sqrt{\Delta}=(t+u\sqrt{\Delta})^\lambda$ setzt, und für λ irgend drei nach dem mod. 3 incongruente Werthe nimmt, z. B. 0, 1, 2.

Theorem.

„Alle Kubikformen mit derselben Charakteristik ($2mf$, $2mg$, $2mh$), die eine Gruppe bilden, constituiren drei Klassen, wenn $\Delta=g^2-fh$ positiv und nicht quadratisch ist, in den übrigen Fällen eine Klasse."

* * *

Wir kommen nun zu dem zweiten Hauptfalle. Die aufzulösenden Gleichungen sind hier

$$b^2-ac=mf, \qquad bc-ad=mg, \qquad c^2-bd=mh.$$

Man darf f prim gegen $2m\Delta$ nehmen; dafs alsdann f prim gegen $2g$, a und b prim gegen einander, und a prim gegen mf, wird wie oben bewiesen. Statt der Gleichung (*c.*) kommt

$$\xi^2-\eta^2\Delta=4mf^3, \qquad \xi=2bf-ag, \qquad \eta=a.$$

ξ und η werden keinen ungeraden Faktor gemein haben, und entweder beide gerade, oder beide ungerade sein, wie leicht erhellt. Für die Coefficienten der Kubikform erhält man die Werthe:

$$a=\eta, \qquad b=\frac{g\eta+\xi}{2f}, \qquad c=\frac{(g^2+\Delta)\eta+2g\xi}{4f^2},$$
$$d=\frac{(g^3+3g\Delta)\eta+(3g^2+\Delta)\xi}{8f^3},$$

oder auch, wenn die Form mit L bezeichnet wird, so ist

$$\frac{1}{8f^3}(2fx+gy+y\sqrt{\Delta})^3(\xi+\eta\sqrt{\Delta})=\mathfrak{L}+L\sqrt{\Delta}.$$

Ist b ganz, so werden c, d ebenfalls ganze Zahlen sein. Denn

$$(2g\xi+(g^2+\Delta)\eta)\eta\equiv 0 \pmod{4f^2};$$

wenn also η ungerade, so ist c eine ganze Zahl, wenn aber η gerade, so ist der Faktor von η links sowohl durch 4, als auch durch f^2 theilbar, mithin durch $4f^2$, also c wieder ganz. — Ferner

$$((g^3+3g\Delta)\eta+(3g^2+\Delta)\xi)\eta\equiv 0 \pmod{8f^3},$$

also d ganz, wenn η ungerade; wenn aber η gerade, so folgt dasselbe, da der Faktor von η links dann durch 8 theilbar ist.

Nach dem Lemma der Einleitung kann man G so bestimmen, dafs $G \equiv g \pmod{2f}$, $G^2 \equiv \Delta \pmod{4f^3}$ ist, und $\xi + G\eta$ mufs durch $2f$ theilbar sein. Man hat ferner $(\xi + G\eta)(\xi - G\eta) \equiv (\Delta - G^2)\eta^2 \equiv 0 \pmod{4f^3}$. Ist nun *erstens* η gerade, so folgt leicht, dafs f prim gegen $\xi - G\eta$, also $\xi + G\eta$ durch f^3 theilbar ist; die letzte Zahl ist aber ungerade, folglich $\xi + G\eta$ durch $2f^3$ theilbar. In diesem Falle ist $\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - \Delta\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 = mf^3$ ungerade, folglich $\frac{\xi}{2} + G\frac{\eta}{2}$ ungerade. Setzen wir also $\xi + G\eta = 2f^3\tau$, so ist τ ungerade, mithin prim gegen η. — Ist *zweitens* η ungerade, so kommt

$$\tfrac{1}{2}(\xi + G\eta) \cdot \tfrac{1}{2}(\xi - G\eta) \equiv 0 \pmod{f^3},$$

und da leicht zu zeigen, dafs f prim gegen den zweiten Faktor, so kommt $\frac{1}{2}(\xi + G\eta) \equiv 0 \pmod{f^3}$, also wie vorher $\xi + G\eta = 2f^3\tau$, so dafs τ prim gegen η ist. Statt der Formel (*f.*) erhält man so die folgende:

$$2f^3\tau^2 - 2G\tau\eta + 2\frac{G^2 - \Delta}{4f^3}\eta^2 = 2m, \qquad \xi = 2f^3\tau - G\eta,$$

wobei zu bemerken, dafs

$$\left(2f^3,\ -G,\ 2\frac{G^2 - \Delta}{4f^3}\right)$$

eine uneigentlich primitive Form von der Determinante Δ ist. Die Coefficienten der Form $\mathfrak{L}$ werden

$$\mathfrak{a} = 2bf - ag, \qquad \mathfrak{b} = bg - 2ah, \qquad \mathfrak{c} = 2df - cg, \qquad \mathfrak{d} = dg - 2ch.$$

Das dem ersten Theorem entsprechende lautet nun wie folgt:

Theorem.

„Es sei $(2f, g, 2h)$ eine uneigentlich primitive Form von der Determinante Δ, und f prim gegen $2m\Delta$, ferner $G \equiv g \pmod{2f}$, $G^2 \equiv \Delta \pmod{4f^3}$. Die sämmtlichen primitiven Kubikformen, welche die gemeinschaftliche Charakteristik $\varphi = (2mf, mg, 2mh)$ haben, vertheilen sich in eine endliche Anzahl von Gruppen, die den verschiedenen Wurzeln der Congruenz $\omega^2 \equiv \Delta \pmod{2m}$ entsprechen. Aus einer individuellen Form jeder Gruppe (a_0, b_0, c_0, d_0) findet man alle übrigen Formen der nämlichen Gruppe (a, b, c, d) nach den Formeln:

$$(h'.) \qquad \begin{cases} 2a = a_0T + (2b_0f - a_0g)U \\ 2b = b_0T + (b_0g - 2a_0h)U \\ 2c = c_0T + (2d_0f - c_0g)U \\ 2d = d_0T + (d_0g - 2c_0h)U, \end{cases}$$

wo T, U alle Wurzeln der unbestimmten Gleichung $T^2 - \Delta U^2 = 4$ bedeuten, während die Coefficienten der individuellen Form folgende Werthe haben:

$$a_0 = \eta_0, \qquad b_0 = \frac{g\eta_0 + \xi_0}{2f}, \qquad c_0 = \frac{(g^2+\Delta)\eta_0 + 2g\xi_0}{4f^2},$$
$$d_0 = \frac{(g^3+3g\Delta)\eta_0 + (3g^2+\Delta)\xi_0}{8f^3}.$$

Hier ist $\xi_0 = 2f^3\tau_0 - G\eta_0$, und τ_0, η_0 sind beliebige Wurzeln der unbestimmten Gleichung

$$2f^3\tau^2 - 2G\tau\eta + 2\frac{G^2-\Delta}{4f^3}\eta^2 = 2m,$$

prim gegen einander und aus derjenigen Gruppe von Lösungen, die man betrachtet, die also einem bestimmten Werth von $\omega \equiv \sqrt{\Delta} \pmod{2m}$ entsprechen."

Da ferner die Form $(2f, g, 2h)$ in sich selbst übergeht durch die eigentlichen Transformationen

$$x = \tfrac{1}{2}(T - gU)x' - hUy', \qquad y = fUx' + \tfrac{1}{2}(T + gU)y',$$

so gelangt man ähnlich wie Oben zu dem folgenden

Theorem.

„Es sei $f \ldots (a, b, c, d)$ eine Kubikform mit der Charakteristik $\varphi \ldots (2mf, mg, 2mh)$, wo $(2f, g, 2h)$ eine uneigentlich primitive Form von der Determinante Δ. Man findet alle mit f eigentlich äquivalente kubische Formen mit der nämlichen Charakteristik φ, nämlich $f' \ldots (a', b', c', d')$ nach folgenden Formeln:

$$2a' = aT' + (2bf - ag)U'$$
$$2b' = bT' + (bg - 2ah)U'$$
$$2c' = cT' + (2df - cg)U'$$
$$2d' = dT' + (dg - 2ch)U'$$

wo $T' + U'\sqrt{\Delta} = 2\left(\frac{T}{2} + \frac{U}{2}\sqrt{\Delta}\right)^3$, und T, U alle möglichen Wurzeln der unbestimmten Gleichung $TT - \Delta UU = 4$ sind."

Um die Formen derselben Gruppe zu klassificiren, sei

1°. Δ ein Quadrat. Dann hat die Gruppe nur zwei Formen, die in eine Klasse gehören.

Ist 2°. Δ negativ *), so ist $T = 2$, $U = 0$ **) für ein beliebiges Δ;

*) Man bemerke dafs Δ nicht $= -1$ sein kann, wegen $g^2 - 4fh = \Delta$.

**) Die Formen, welche durch Veränderung aller Vorzeichen andrer Formen entstehen, kann man aus der Gruppe auswerfen.

$T=1$, $U=\pm 1$ für $\Delta=-3$. Ist nun Δ nicht $=-3$, so hat die Gruppe nur eine Form. Ist $\Delta=-3$, so hat sie 3 Formen, welche auch 3 Klassen constituiren, da die Bedingung $1\pm\Delta=2(1+0.\Delta)^3$ nicht möglich ist.

3°. Ist Δ positiv, so findet sich wie Oben, dafs die Formen der Gruppe wiederum 3 Klassen bilden, deren Repräsentanten man aus (h'.) erhält, wenn man

$$T+U\sqrt{\Delta}=2\left(\frac{t}{2}+\frac{u}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{\lambda}$$

setzt, und für λ irgend drei nach dem mod. 3 incongruente Werthe nimmt, z. B. 0, 1, 2. Hier sind t, u die kleinsten positiven Wurzeln der Gleichung

$$T^2-\Delta U^2=4,$$

verschieden von $T=2$, $U=0$.

Theorem.

„Alle Kubikformen von derselben Charakteristik ($2mf$, mg, $2mh$), die eine Gruppe bilden, constituiren drei Klassen, wenn $\Delta=g^2-4fh$ positiv und nicht quadratisch, und wenn $\Delta=-3$ ist, in den übrigen Fällen eine Klasse."

Da nun die Anzahl der quadratischen Klassen für eine gegebene Determinante endlich ist *), und da zu jeder solchen Klasse eine endliche Anzahl von kubischen Klassen gehört, so gelangt man zu dem

Fundamentalsatz.

„Alle Kubikformen von derselben nicht verschwindenden Determinante **) zerfallen in eine endliche Menge verschiedener Klassen."

*) Formen von der Determinante Null ausgeschlossen.

**) Wenn die Determinante Null, so ist die Anzahl der Klassen unendlich grofs.

Berlin, den 6. September 1855.

25.

Einige neue Sätze aus der Lehre von den Combinationen.

(Von Herrn *Öttinger*.)

§. 1.

Bekanntlich führt die Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten auf die Gruppen der Versetzungen ohne Wiederholungen und zwar aus so viel Elementen und zur so vielten Classe, als Unbekannte vorhanden sind.

Die Zeichen, welche den einzelnen Gruppen vorgesetzt werden müssen, hängen wie bekannt davon ab, dafs man in einer Gruppe der Reihe nach jedes einzelne Element betrachtet und seine Stellenzahl mit der eines jeden, unmittelbar oder mittelbar folgenden vergleicht. So oft eine kleinere Stellenzahl folgt und sich also eine Abnahme zeigt, wird diefs bemerkt. Durch die Zahl dieser Abnahmen wird das vorzusetzende Zeichen bestimmt. Eine *gerade* Anzahl oder 0 deutet auf ein *positives*, eine *ungerade* Anzahl auf ein *negatives* Zeichen.

Cramer hat diese Regel in seiner „Introduction à l'analyse des lignes courbes. Genève 1750 pg. 658" zuerst aufgestellt, indem er sagt „On donne à „ces termes les signes + ou — selon la règle suivante. Quand un exposant (*Cramer* hat die Stellenzahlen oben rechts an die Buchstaben geschrieben) „est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant „plus petit que lui, j'apellerai cela un *dérangement*. Qu'on compte pour „chaque terme les nombres des dérangements; s'il est *pair* ou nul, le terme „aura le signe +; s'il est *impair*, le terme aura le signe —."

Cramer bezeichnet das Folgen einer niedern Stellenzahl auf eine höhere durch das Wort „dérangement". Hier soll es durch das was es ist „Abnahme" bezeichnet werden.

Man kann nun dem Gesagten zufolge alle möglichen Paare von Stellenzahlen, welche bei Bildung der Versetzungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zur n^{ten} Classe entstehen, unter einander vergleichen und fragen „*Wie*

grofs ist die Zahl aller möglichen darin vorkommenden Stellenzahlen-Abnahmen, paarweise betrachtet?"

Diese Frage wurde im 18ten Bande dieses Journals S. 100 von Herrn Prof. *Stern* zur Beantwortung vorgelegt.

In dieser Form ist diese Frage sehr speciell. Sie soll hier in einer allgemeinern, der Lehre von den Combinationen entsprechenderen Form aufgestellt und nicht nur für die Versetzungen *ohne Wiederholungen*, sondern auch für die Versetzungen *mit unbeschränkten und beschränkten Wiederholungen* beantwortet werden.

Bei dieser Frage selbst ist klar, dafs man nicht nur *je zwei*, sondern auch *je drei, vier* u. s. w., überhaupt je *h*, unmittelbar oder mittelbar auf einander folgende Elemente, welche *Stellenzahlen-Abnahmen* zeigen, unter einander vergleichen und nach ihrer Anzahl fragen kann.

Die Beantwortung der Frage wird aber durch Umkehrung sehr erleichtert. Verfolgt man nämlich die einer bestimmten Classe von Versetzungen zugehörigen Gruppen nach einer Richtung hin, etwa von der Linken zur Rechten, so kann man den Stellenzahlen ihre natürliche Ordnung des Zunehmens lassen, *je zwei, je drei* und mehr Elemente unter einander vergleichen und fragen *„wie grofs ist die Anzahl derer, in welchen je zwei, drei u. s. w. überhaupt je h hinter einander folgende Elemente eine Zunahme (unmittelbar oder mittelbar) zeigen?"*

Ist diese Frage gelöst, so ist es, wie leicht zu sehen, auch die oben vorgelegte, denn sie ist die umgekehrte von der eben aufgestellten, da die Stellenzahlen-Abnahmen (dérangements) sich ergeben, wenn man die Stellenzahlen der nämlichen Gruppen nach der entgegengesetzten Richtung hin vergleichend verfolgt.

Ferner ist zu bemerken, dafs die in oben genannter Form (Bd. 18 d. Journ.) aufgestellte Frage von der speciellen Voraussetzung ausgeht, dafs die Versetzungen aus *n* Elementen gerade zur n^{ten} Classe gebildet werden. Diese Beschränkung ist aber aufserwesentlich und daher zu entfernen.

Hiernach sind nun folgende drei in das System der Combinationslehre gehörige Probleme zu beantworten.

(1.) *Die Versetzungen ohne Wiederholungen aus n Elementen werden zur p^{ten} Classe gebildet. Wie grofs ist die Anzahl der Stellenzahlen-Zunahmen oder Abnahmen, wenn je h unmittelbar oder mittelbar auf einander folgende Elemente verglichen werden?*

(2.) ***Die Versetzungen mit unbeschränkten Wiederholungen aus n Elementen werden zur p^{ten} Classe gebildet. Wie grofs ist die Anzahl der Stellenzahlen-Zunahmen, wenn je h unmittelbar oder mittelbar auf einander folgende Elemente verglichen werden?***

(3.) ***Die Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen aus p Elementen werden zur p^{ten} Classe gebildet. Wie grofs ist die Anzahl der Stellenzahlen-Zunahmen, wenn je h unmittelbar oder mittelbar auf einander folgende Elemente verglichen werden?***

Bei Bezeichnung der so eben aufgestellten Probleme soll die Bezeichnungsart meiner Combinationslehre zu Grund gelegt, die Anzahl der Stellenzahlen-Zunahmen durch Beisetzung des Buchstabens z (Anfangsbuchstabe des Wortes Zunahme) angedeutet und die Anzahl der verglichenen Stellenzahlen (h) in die Klammer und vor die Elemente gesetzt werden, so dafs die so eben in 1—3 aufgestellten Probleme der Reihe nach durch folgende Symbole sich kurz so darstellen:

(4.) $Pz[h;\ a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_n]^p$

(5.) $P'z[h;\ a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_n]^p$

(6.) $Pz[h;\ (a_1)^q,\ (a_2)^r,\ (a_3)^s,\ (a_4)^t\ \ldots]^p.$

In (4.) und (5.) ist $h \leqq p$, $p \leqq n$; in (6.) bezeichnen q, r, s ... die Wiederholungen des eingeklammerten Elements und es ist

$$q + r + s + t \ldots = p,$$

worin einzelne der Zahlen q, r, s, t ... auch die Einheit bedeuten können.

§. 2.

Bestimmung der Anzahl der Stellenzahlen-Zunahmen bei den Versetzungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zur $p$ten Classe für h Elemente oder $Pz[h;\ a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_n]^p$.

Werden die Versetzungen ohne Wiederholungen aus den Elementen a_1, a_2, a_3, ... a_n zur p^{ten} Classe gebildet und verfolgt man die Elemente jeder Gruppe von der Linken zur Rechten, in welchen je ***zwei, drei*** u s. w. überhaupt h, unmittelbar oder mittelbar auf einander folgende Stellenzahlen nach ihrer Zunahme betrachtet werden, so zeigt sich leicht, dafs die ***auflösenden Gruppen*** mit den ***Verbindungen ohne Wiederholungen*** aus n Elementen zur ***zweiten, dritten*** u. s. w. überhaupt zur h^{ten} Classe zusammen fallen.

Am Einfachsten verdeutlicht sich diefs an einem besondern Falle. Sind die Versetzungen ohne Wiederholungen aus fünf Elementen (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)

zur 4ten Classe (im Ganzen 120 Gruppen) gebildet und soll in denselben die Anzahl der Stellenzahlen-Zunahmen bestimmt werden, wenn je *zwei* Elemente in Betracht kommen, so haben nur die *zehn* folgenden Gruppen

$$a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_1a_4,\ a_1a_5,\ a_2a_3,\ a_2a_4,\ a_2a_5,\ a_3a_4,\ a_3a_5,\ a_4a_5$$

die Eigenschaft, der Aufgabe zu genügen. Keiner von den übrigen Versetzungs-Gruppen zu zweien aus fünf Elementen kommt diese Eigenschaft zu.

Die vorstehenden zehn Gruppen sind aber offenbar die ***Verbindungen ohne Wiederholungen*** aus fünf Elementen zur 2ten Classe oder $C(a_1, a_2 \ldots a_5)^2$.

Die Zahl der Gruppen, welche also in der vorliegenden Frage bei h auf einander folgenden Stellenzahlen-Zunahmen die Auflösung zu bewirken vermögen, ist hiernach

$$(1.)\quad C[a_1, a_2, \ldots a_n]^h = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)}{1.2.3\ldots h} = (n)_h.$$

So oft nun eine der auflösenden Gruppen in den Versetzungs-Gruppen zur p^{ten} Classe auftritt, ist der vorkommende Fall in Rechnung zu bringen.

Hält man eine der auflösenden Gruppen (z. B. $a_1, a_2, a_3 \ldots a_h$) fest, so nimmt sie h Stellen unter p vorhandenen ein. An den übrigen $(p-h)$ Stellen können sich also noch $(n-h)$ Elemente zeigen und unter sich alle möglichen ***Versetzungen ohne Wiederholungen*** zur $(p-h)^{ten}$ Classe bilden. Die hiedurch bedingte Versetzungszahl ist

$$(n-h)^{p-h|-1} = (n-h)(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-p+1).$$

Durch sie gehen aus jeder Versetzungsgruppe, in welcher sich eine der auflösenden Gruppen zeigt, in Verbindung mit N° 1.

$$(2.)\quad (n_h) \times (n-h)^{p-h|-1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)}{1.2.3\ldots h} \times (n-h)(n-h-1)\ldots(n-p+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots h}$$

auflösende Fälle hervor.

Während diefs geschieht, dürfen aber die einzelnen auflösenden Gruppen die Reihenfolge ihrer Elemente nicht ändern, damit sie ihre auflösende Eigenschaft nicht verlieren. Sie können indessen mit Beibehaltung der ihnen inwohnenden Ordnung alle möglichen Stellungen auf p Stellen einnehmen. Die Anzahl der weiter hiedurch erzeugten Fälle ist nach §. 41 N^{ro}. 120 meiner

Combinationslehre

$$(3.)\quad \boldsymbol{Z}[p;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_h]^h = (p)_h = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-h+1)}{1.2.3\ldots h},$$

denn sie fallen mit der Zerstreuung von h Elementen in p Fächern oder p Stellen bei unveränderter Ordnung zusammen.

Die Anzahl der in Frage stehenden Gruppen ergiebt sich sofort aus der Verbindung von N^ro. 2 und 3. Hiernach ist die Anzahl der Stellenzahlen-Zunahmen bei den Versetzungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zur p^{ten} Classe für h auf einander, unmittelbar oder mittelbar folgende Elemente:

$$(4.)\quad \boldsymbol{Pz}[h;\ a_1, a_2, \ldots a_n]^p = (p)_h \times (n)_h \times (n-h)^{p-h-1}$$

$$= \frac{p(p-1)\ldots(p-h+1)}{1.2\ldots h} \times \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots h} = (p)_h \cdot \frac{n^{p|-1}}{1^{h|1}}$$

für $h \leqq p$ und $p \leqq n$. Ist $p = n$, so erhält man

$$(5.)\quad \boldsymbol{Pz}[h;\ a_1, a_2, \ldots a_n]^n = (n)_h \cdot \frac{n^{n|-1}}{1^{h|1}}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-h+1)}{1.2\ldots h}\, n(n-1)\ldots(h+1) = (n)_h . n^{n-h|-1}.$$

Für den speciellen Fall, wie er im 18. Bd. d. Journ. aufgestellt ist, entsteht sofort

$$(6.)\quad \boldsymbol{Pz}[2;\ a_1, a_2, \ldots a_n]^n = \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot (n-1)(n-2)\ldots 4.3.$$

Besondere Fälle bestimmen sich nun leicht und bestätigen die Richtigkeit der aufgestellten Formeln.

So ist die Anzahl der ***Stellenzahlen-Zu- oder Abnahmen*** aus 3 Elementen zur 3ten, aus 4 Elementen zur 4ten Classe u. s. w., wenn nur zwei Elemente in Betracht kommen nach (4.) oder (5.)

$$\boldsymbol{Pz}[2;\ a_1, a_2, a_3]^3 = \frac{3.2}{1.2} . 3 = 9$$

$$\boldsymbol{Pz}[2;\ a_1, a_2, a_3, a_4]^4 = \frac{4.3}{1.2} . 4 . 3 = 72$$

$$\boldsymbol{Pz}[2;\ a_1, a_2, \ldots a_5]^5 = \frac{5.4}{1.2} . 5 . 4 . 3 = 600$$

u. s. w., wie dies auch in dem oben angeführten Bande angegeben ist. Kommen je drei Elemente in Betracht, so ist

$$\boldsymbol{Pz}[3;\ a_1, a_2, a_3]^3 = \frac{3.2.1}{1.2.3} \cdot \frac{3.2.1}{1.2.3} = 1$$

$$\boldsymbol{Pz}[3;\ a_1, a_2, a_3, a_4]^4 = \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot 4 = 16$$

$$\boldsymbol{Pz}[3;\ a_1, a_2, \ldots a_5]^5 = \frac{5.4.3}{1.2.3} \cdot 5 \cdot 4 = 200$$

u. s. w. Bei 6 Elementen in der 4ten Classe wird bei 2 und 3 Stellenzahlen-Zu- oder Abnahmen:

$$Pz[2; a_1, a_2, \ldots a_6]^4 = \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{6.5.4.3}{1.2} = 1080$$

$$Pz[3; a_1, a_2, \ldots a_6]^4 = \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot \frac{6.5.4.3}{1.2.3} = 240.$$

Die Werthe, welche aus dem Ausdrucke N^ro 4. hervorgehen, hängen von der Classe (p), der Elementen-Zahl (n) und den Stellenzahlen-Zunahmen (h) ab und zeigen Eigenthümlichkeiten, die Beachtung verdienen.

Wächst p (die Classe) bei unverändertem n und h, so werden, wie leicht zu erkennen ist, die Gruppenanzahlen wachsen, denn aus der Vergleichung von

$$(p)_h \cdot \frac{n^{p|-1}}{1^{h|1}} \quad \text{und} \quad (p+1)_h \cdot \frac{n^{p+1|-1}}{1^{h|1}}$$

folgt nach den nöthigen Veränderungen

$$(7.) \quad 1 < n - p + \frac{h}{p+1}$$

als Uebergangsgesetz von einer Gruppenzahl auf die nachfolgende.

Da p hier nicht gröfser als $n-1$ werden kann, so deutet dies auf ein Wachsen. Das Umgekehrte, ein Fallen, kann nicht eintreten.

Wächst n bei unveränderlichem p und h, so tritt derselbe Fall ein, denn aus der Vergleichung von

$$(p)_h \frac{n^{p|-1}}{1^{h|1}} \quad \text{und} \quad (p)_h \frac{(n+1)^{p|-1}}{1^{h|1}}$$

folgt

$$(8.) \quad n+1 < n+p+1.$$

Dies deutet ein Wachsen an.

In beiden Fällen bleibt h unverändert. Wächst p und n gleichzeitig bei unverändertem h, so müssen die Gruppenzahlen in verstärktem Maafse wachsen.

Anders stellt sich die Sache, wenn n (Elementenzahl) und p (Classe) unverändert bleibt und h wächst. In diesem Falle wird ein *Maximum* eintreten. h kann dann alle Werthe von 1 bis p durchlaufen.

Zu dem Ende ist es am Einfachsten, die Werthe dreier auf einander folgenden Gruppenzahlen für $(h-1)$, h und $(h+1)$ unter sich zu vergleichen. Es mufs dann sein

$$(p)_{h-1} \frac{n^{p|-1}}{1^{h-1|1}} < (p)_h \cdot \frac{n^{p|-1}}{1^{h|1}} > (p)_{h+1} \cdot \frac{n^{p|-1}}{1^{h+1|1}}.$$

Hieraus entsteht

$$(9.) \quad 1 < \frac{p-h+1}{h^2} > \frac{(p-h+1)(p-h)}{h^2(h+1)^2}.$$

Aus den zwei ersten Gliedern folgt nach den nöthigen Veränderungen

$$h(h+1) < p+1$$

aus den zwei letzten

$$(h+1)(h+2) > p+1$$

und aus beiden

$$(10.) \quad h(h+1) < p+1 < (h+1)(h+2).$$

Hiernach wird ein *Maximum* bei wachsendem h und unverändertem p und n eintreten, wenn die Versetzungsclasse (p) zwischen den Grenzen von $h(h+1)$ und $(h+1)(h+2)$ liegt und dann wird die h^{te} unter allen möglichen (p) Gruppenzahlen ein *Maximum* sein.

Die näheren Bedingungen hiefür sind folgende:

a) Ein *Maximum* tritt erst von der 6ten Classe an ein, wie diefs aus den zwei ersten Gliedern von (9.) folgt.

b) Bei den Versetzungen von der 6ten bis zur 11ten Classe ist die zweite Gruppenzahl $(h=2)$, von der 12ten bis zur 19ten ist die dritte $(h=3)$, von der 20sten bis zur 29sten ist die vierte $(h=4)$ u. s. w., von der $[h(h+1)]^{ten}$ bis zur $[(h+1)(h+2)-1]^{ten}$ Classe ist die h^{te} Gruppenzahl ein *Maximum*.

c) Die 5te, 11te, 19te, 29ste u. s. w. $[h(h+1)-1]^{te}$ Classe hat zwei gröfste und gleiche Gruppenzahlen.

d) Ein *Minimum* tritt ein, wenn $h=p$ wird.

Bildet man hiernach die Gruppenzahlen zur 6ten Classe aus 6 Elementen für 1, 2, . . . 6 Stellenzahlen-Zunahmen, also für

$$Pz[1; a_1, a_2, \ldots a_6]^6, \quad Pz[2; a_1, a_2, \ldots a_6]^6, \quad \ldots \quad Pz[6; a_1, a_2, \ldots a_6]^6,$$

so erhält man aus (4.) der Reihe nach folgende Zahlenwerthe:

$$A_1 = 4320, \quad A_2 = 5400, \quad A_3 = 2400, \quad A_4 = 450, \quad A_5 = 36, \quad A_6 = 1.$$

Für die Versetzungen zur 5ten Classe aus 6 Elementen ergeben sich für 1, 2, 3, 4, 5 Stellenzahlen-Zunahmen der Reihe nach folgende Werthe:

$$A_1 = 3600, \quad A_2 = 3600, \quad A_3 = 1200, \quad A_4 = 150, \quad A_5 = 6,$$

wodurch sich das oben Gesagte bestätigt.

§. 3.

Bestimmung der Anzahl der Stellenzahlen-Zunahmen bei den Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur p^{ten} Classe für h auf einander folgende Elemente oder $P'z[h; a_1, a_2, \dots a_n]^p$.

Auf ganz gleiche Weise, wie im vorigen Paragraphen, wird die Anzahl der Stellenzahlen-Zunahmen bei den Versetzungen mit Wiederholungen bestimmt. Auch hier fallen die auflösenden Gruppen mit den Verbindungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zur h^{ten} Classe zusammen. Ihre Zahl ist

$$(1.) \quad C[a_1, a_2, \dots a_n]^h = (n)_h = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-h+1)}{1.2.3\dots h}.$$

Jede dieser auflösenden Gruppen kann auf p Stellen

$$(2.) \quad Z[p; a_1, a_2, \dots a_h]^h = (p)_h = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-h+1)}{1.2.3\dots h}$$

sich zeigen und mit ihr können sich in jeder Stellung die Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $(p-h)^{ten}$ Classe (auf allen übrigen Stellen), also

$$(3.) \quad P'[a_1, a_2, \dots a_n]^{p-h} = n^{p-h}$$

vereinigen. Die gesuchte Gruppen-Anzahl für die Stellenzahlen-Zunahmen ist daher aus (1.), (2.), (3.):

$$(4.) \quad P'z[h; a_1, a_2, \dots a_n]^p = (p)_h . (n)_h . n^{p-h}$$

$$= \frac{p(p-1)\dots(p-h+1)}{1.2\dots h} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-h+1)}{1.2\dots h} \cdot n^{p-h}$$

für $h \leqq p$ und $p \leqq n$. Ist $p = n$, so wird

$$(5.) \quad P'z[h; a_1, a_2, \dots a_n]^n = (n)_h (n)_h . n^{p-h} = \left(\frac{n(n-1)\dots(n-h+1)}{1.2\dots h}\right)^2 \cdot n^{p-h}.$$

So ist

$$P'z[1; a_1, a_2, a_3, a_4]^4 = \frac{4}{1} \cdot \frac{4}{1} \cdot 4^3 = 1024$$

$$P'z[2; a_1, a_2, \dots a_4]^4 = \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{4.3}{1.2} \cdot 4^2 = 576$$

$$P'z[3; a_1, a_2, \dots a_4]^4 = \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot 4 = 64$$

$$P'z[4; a_1, a_2, \dots a_4]^4 = 1.1.1 = 1$$

$$P'z[2; a_1, a_2, a_3, a_4]^3 = \frac{3.2}{1.2} \cdot \frac{4.3}{1.2} \cdot 4 = 72$$

u. s. w.

Wächst n bei unverändertem p und h, so müssen auch, wie sich leicht zeigt, die hieraus sich ergebenden Gruppenanzahlen wachsen. Dasselbe gilt, wenn p bei unverändertem n und h wächst. Um so mehr müssen daher die Gruppenzahlen wachsen, wenn bei unveränderlichem h die Elementenzahl (n) und Classe (p) wächst.

Wächst h bei unverändertem n und p, so leitet sich die nächstfolgende Gruppenzahl A_1 aus der vorhergehenden A nach der Formel (4.) auf folgende Weise ab:

$$(6.) \qquad A_1 = A \cdot \frac{(p-h)(n-h)}{(h+1)^2 \cdot n}.$$

Diefs deutet bei wachsendem h auf ein Fallen.

Hieraus folgt, dafs bei unveränderlicher Classen- und Elementen-Zahl (p und n) und wachsenden Stellenzahlen-Zunahmen (h) die Gruppenzahlen *abnehmen*. Es entsteht ein *Maximum* für $h=1$, ein *Minimum* für $h+1=p$, wie sich dies an den vorstehenden Zahlenwerthen zeigt.

§. 4.

Bestimmung der Anzahl der Stellenzahlen-Zunahmen bei den Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen aus p Elementen zur p^{ten} Classe für h unmittelbar oder mittelbar auf einander folgende Elemente oder $Pz[h; (a_1)^q, (a_2)^r, (a_3)^s \ldots]^p$.

Auch hier ist der Entwicklungsgang derselbe wie früher. Es ist jedoch zu bemerken, dafs der Classenexponent und die Zahl der Elemente der einzelnen Gruppen einander gleich sein müssen, und dafs also ist

$$p = q+r+s+t+\cdots$$

Nennt man die Zahl der auflösenden Gruppen A_h, die Anzahl der Stellungen, welche sie auf p Stellen einnehmen können

$$(p)_h = \frac{p(p-1)\ldots p-h+1}{1.2.3\ldots h},$$

so müssen diese Anzahlen noch mit den Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen verbunden werden, welche aus den übrigen $(p-h)$ Elementen zur $(p-h)^{ten}$ Classe gebildet werden können. Jede Gruppe mufs hiebei durch die entsprechenden Fakultäten dividirt werden, welche durch die beschränkten Wiederholungen bedingt sind.

Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich nun folgendes Symbol zur Darstellung der gesuchten Gruppenanzahl für die Stellenzahlen-Zunahmen (S. Com-

binationslehre §. 9)

$$(1.)\quad Pz[h;\ (a_1)^q,\ (a_2)^r,\ (a_3)^s\ (a_4)^t\ \ldots]^p$$
$$= A_h(p)_h \cdot \frac{(p-h)^{p-h|-1}}{1^{q|1}.1^{r|1}.1^{s|1}} = A_h \frac{p(p-1)(p-2)\ \ldots\ 3.2.1}{1.2\ldots h.1.2\ldots q.1.2\ldots r\ldots}.$$

Die Darstellung des Zahlenausdrucks für A_h bildet hier die Hauptaufgabe. Sie beruht auf folgender, aus den Combinationen bekannten Zerlegung:

$$(2.)\quad C(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\ a_{n+m})^h$$
$$= C(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)^h + C(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)^{h-1} C(a_{n+1},\ \ldots\ a_{n+m})^1$$
$$+ C(a_1, a_2, \ldots a_n)^{h-2} C(a_{n+1}, \ldots a_{n+m})^2 + \cdots + C(a_1,\ a_2, \ldots a_n)^1 C(a_{n+1} \ldots a_{n+m})^{h-1}$$
$$+ C(a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\ a_{n+m})^h$$

und

$$(3.)\quad C[a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{n+1},\ a_{n+m}]^h$$
$$= (n)_h + (n)_{h-1}(m)_1 + (n)_{h-2}(m)_2 \ldots (n)_2(m)_{h-2} + (n)_1(m)_{h-1} + (m)_h$$

unter der Bedingung, dafs $h \leqq n$ und $h \leqq m$. Ist $n < h$ oder $m < h$, so fallen bestimmte Anfangs- oder Schlufsglieder weg und die Reihe ist nicht mehr vollständig.

Werden nun diese Bemerkungen auf besondere Fälle angewendet, so ist zu bemerken, dafs statt *einfacher* Elemente, wie (2.) und (3.) voraussetzen, Wiederholungen derselben eintreten, die durch die oben angeschriebenen Exponenten angezeigt sind. Es müssen daher die *Wiederholungsexponenten* statt der Einheiten in (2.) und (3.) in den Calcul aufgenommen werden, da nach der Natur der Sache die wiederholenden Elemente um so viel *mehr* auflösende Gruppen hervorbringen, als der Exponent Einheiten enthält.

Geht man nun die einzelnen Fälle durch, so erhält man folgende auflösende Gruppen bei *einem, zwei, drei, vier* wiederholenden Elementen:

$$(4.)\quad A_h = C[(a_1)^q,\ a_2,\ \ldots\ a_{n+1}]^h$$
$$= C[(a_1)^q]^1 C[a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_{n+1}]^{h-1} + C[a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_{n+1}]^h = q(n)_{h-1} + (n)_h$$
$$= q \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-h+2)}{1.2\ldots(h-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)}{1.2.3\ldots h}$$

$$A_h = C[(a_1)^q,\ (a_2)^r,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_{n+2}]^h = C[(a_1)^q,\ (a_2)^r]^1 C[a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_{n+2}]^{h-1}$$
$$+ C[(a_1)^q,\ (a_2)^r]^2 C[a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_{n+2}]^{h-2} + C[a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_{n+2}]^h$$
$$= (q+r)_1 \cdot (n)_{h-1} + q.r.(n)_{h-2} + (n)_h$$

$$A_h = C[(a_1)^q, (a_2)^r, (a_3)^s, a_4, a_5, \ldots a_{n+3}]^h = C[(a_1)^q, (a_2)^r, (a_3)^s]^1 C[a_4, a_5, \ldots a_{n+3}]^{h-1}$$
$$+ C[(a_1)^q, (a_2)^r, (a_3)^s]^2 C[a_4,\ a_5,\ \ldots\ a_{n+3}]^{h-2}\ \ \ldots\ \ C[a_4,\ a_5,\ \ldots\ a_{n+3}]^h$$
$$= (q+r+s)_1 (n)_{h-1} + (qr+qs+rs)(n)_{h-2} + qrs(n)_{h-3} + (n)_h$$

$$A_h = C[(a_1)^q, (a_2)^r, (a_3)^s, (a_4)^t, a_5, a_6, \ldots a_{n+4}]^h$$
$$= (q+r+s+t)(n)_{h-1} + (qr+qs+qt+rs+rt+st)(n)_{h-2}$$
$$+ (qrs+qrt+qst+rst)(n)_{h-3} + qrst(n)_{h-4} + (n)_h$$

u. s. w. Hieraus läfst sich leicht der Fortgang zu dem allgemeinen Gesetze erkennen. Es ist

$$(5.) \quad C[(a_1)^{q_1}, (a_2)^{q_2}, \ldots (a_k)^{q_k}, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{k+n}]^h = A_h$$
$$= C(q_1, q_2, \ldots q_k)^1 (n)_{h-1} + C(q_1, q_2, \ldots q_k)^2 (n)_{h-2} + C(q_1, q_2, \ldots q_k)^3 (n)_{h-3}$$
$$+ \ldots + C(q_1, q_2, \ldots q_k)^k (n)_{h-k} + (n)_h .$$

Hier dienen die Zahlenwerthe der Wiederholungsexponenten als Elemente, woraus die Verbindungen zur 1sten, 2ten, 3ten, $\ldots$ h^{ten} Classe gebildet und in Rechnung gebracht werden müssen. Für $k > h$ verschwinden einzelne Glieder, h kann nicht gröfser als $k+n$ werden.

Bei dieser Darstellungsweise gelten folgende, sich leicht rechtfertigende Sätze:

$$(6.) \quad C[(a_1)^q, a_2, a_3, \ldots a_{n+1}]^h = C[a_1, (a_2)^q, a_3, \ldots a_{n+1}]^h$$
$$= C[a_1, a_2, (a_3)^q, a_4, \ldots a_{n+1}]^h \ldots = C[a_1, a_2, \ldots a_n, (a_{n+1})^q]^h$$
$$C[(a_1)^q, (a_2)^r, a_3, \ldots a_{n+2}]^h = C[(a_1)^q, a_2, (a_3)^r, \ldots a_{n+2}]^h$$
$$= C[(a_1)^q, a_2, \ldots a_{n+1}, (a_{n+2})^q] = C[a_1, (a_2)^q, (a_3)^r, a_4, \ldots a_{n+2}]^h = \cdots$$

u. s. w. Denn die Gruppenzahlen bleiben gleich, welche Elemente auch die Wiederholungs-Exponenten haben.

Es läfst sich auch eine zweite Methode anwenden, um die auflösenden Gruppen zu zählen, nämlich die, dafs man alle vorhandenen (gleiche und ungleiche) Elemente als ungleich annimmt, hierauf die zugehörigen Verbindungen zählt und dann diejenigen Fälle ausscheidet, welche dadurch entstanden, dafs eine bestimmte Anzahl von Elementen, welche ursprünglich gleich waren, als ungleich angenommen wurden. So lange $h = 2$ ist, also im einfachsten Falle, giebt diese Methode ein bequemes Resultat. Für $h = 3$ wird sie schon sehr zusammengesetzt, weswegen sie nicht weiter verfolgt wird. Für $h = 2$ ist

$$(7.) \quad C[(a_1)^{q_1}, (a_2)^{q_2}, \ldots (a_k)^{q_k}, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{k+n}]^2 = A_2$$
$$= (n+q_1+q_2+q_3 \cdots q_k)_2 - (q_1)_2 - (q_2)_2 - (q_3)_2 \cdots - (q_k)_2 .$$

Durch Anwendung des Gesagten erhält man folgende Ausdrücke zur Bestimmung der Stellenzahlen-Zunahmen bei den Versetzungen mit beschränk-

ten Wiederholungen für h auf einander folgende Elemente:

$$(8.)\quad Pz[h;\ (a_1)^q,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_{n+1}]^{q+n}$$
$$= [q(n)_{h-1} + (n)_h] \times \frac{(q+n)(q+n-1)\ldots 3.2.1}{1.2\ldots h.1.2.3\ldots q}$$

$$Pz[h;\ (a_1)^q,\ (a_2)^r,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_{n+2}]^{q+r+n}$$
$$= [(q+r)(n)_{h-1} + q.r(n)_{h-2} + (n)_h] \frac{(q+r+n)(q+r+n-1)\ldots 3.2.1}{1.2\ldots h.1.2\ldots q.1.2\ldots r}$$

$$Pz[h;\ (a_1)^q,\ (a_2)^r,\ (a_3)^s,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\ a_{n+3}]^{q+r+s+n}$$
$$= [(q+r+s)(n)_{h-1} + (qr+qs+rs)(n)_{h-2} + q.r.s(n)_{h-3} + (n)_h] \frac{(q+r+s+n)(q+r+n-1)\ldots 3.2.1}{1.2\ldots h.1.2\ldots q.1.2\ldots r.1.2.3\ldots s}$$

u. s. w. allgemein

$$(9.)\quad Pz[h;\ (a_1)^{q_1},\ (a_2)^{q_2},\ \ldots\ (a_k)^{q_k},\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots\ a_{k+n}]^{q_1+q_2+q_3\ldots q_k+n}$$
$$= [C(q_1, q_2, \ldots q_k)^1 (n)_{h-1} + C(q_1, q_2, \ldots q_k)^2 (n)_{h-2} + C(q_1, q_2, \ldots q_k)^3 (n)_{h-3} \ldots$$
$$\ldots + C(q_1, q_2, \ldots q_k)^k (n)_{h-k} + (n)_h] \frac{1^{q_1+q_2+\ldots q_k+n|1}}{1^{q_1|1}.1^{q_2|1}.1^{q_3|1}\ldots 1^{q_k|1}.1^{h|1}}.$$

Die Reihe der Glieder in der Klammer bricht ab, wenn $h-k=0$ oder negativ werden sollte. Hiebei ist zu beachten, dafs $(n)_0 = 1$ ist, auch wenn $n=0$ wird. Aus (7.) hat man für $h=2$,

$$(10.)\quad Pz[2;\ (a_1)^{q_1},\ (a_2)^{q_2},\ \ldots\ (a_k)^{q_k},\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots\ a_{k+n}]^{q_1+q_2+\ldots q_k+n}$$
$$= [(n+q_1+q_2\ldots q_k)_2 - (q_1)_2 - (q_2)_2 - (q_3)_2 \ldots - (q_k)_2] \frac{1^{q_1+q_2\ldots q_k+n}}{1^{2|1}.1^{q_1|1}.1^{q_2|1}\ldots 1^{q_k|1}}.$$

Specielle Fälle ergeben sich leicht. Es ist z. B. aus (8.) für $q=2$, $r=3$, $n=4$, $h=1, 2, 3, 4, 5, 6$ der Reihe nach

$$Pz[1;\ (a_1)^2,\ (a_2)^3,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6]^9$$
$$= [5+4] \cdot \frac{9.8\ldots 3.2.1}{1.2.1.2.3} = 272160$$

$$Pz[2;\ (a_1)^2,\ (a_2)^3,\ a_3,\ \ldots\ a_6]^9$$
$$= [5.4+2.3+6] \frac{9.8\ldots 3.2.1}{1.2.1.2.1.2.3} = 483840$$

$$Pz[3;\ (a_1)^2,\ (a_2)^3,\ a_3,\ \ldots\ a_6]^9$$
$$= [5.6+2.3.4+4] \frac{9.8\ldots 3.2.1}{1.2.1.2.3.1.2.3} = 292320$$

$$Pz[4;\ (a_1)^2,\ (a_2)^3,\ a_3,\ \ldots\ a_6]^9$$
$$= [5.4+2.3.6+1]\frac{9.8\ldots3.2.1}{1.2.1.2.3.1.2.3.4} = 71820$$

$$Pz[5;\ (a_1)^2,\ (a_2)^3,\ a_3,\ \ldots\ a_6]^9$$
$$= [5+2.3.4]\frac{9.8\ldots3.2.1}{1.2.1.2.3.1.2\ldots5} = 7308$$

$$Pz[6;\ (a_1)^2,\ (a_2)^3,\ a_3,\ \ldots\ a_6]^9$$
$$= [2.3]\frac{9.8\ldots3.2.1}{1.2.1.2.3.1.2\ldots6} = 252.$$

Weitere Fälle sind nicht möglich, indem $h = k+n$ ist. Auch hier zeigt sich ein Maximum. Aus (10.) hat man für den besondern Fall $h = 2$

$$Pz[2;\ (a_1)^2,\ (a_2)^3,\ a_3,\ \ldots\ a_6]^9$$
$$= [36-1-3]\frac{9.8\ldots3.2.1}{1.2.1.2.1.2.3} = 483840$$

wie oben.

Freiburg im Br. im Mai 1856.

26.

Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie.

(Tirée des manuscrits inédits de *C. G. J. Jacobi* et communiquée par M. *E. Luther.*) *)

Le problème dont je vais traiter est le suivant:

Étant connues la longueur s d'un arc géodésique, la latitude B' de son origine et son angle azimuthal T'' à ce point, déterminer la latitude B'' de l'autre extrémité de l'arc, son angle azimuthal T''' à ce second point et la différence en longitude de ces deux extrémités.

En appliquant à ce problème les séries dans lesquelles j'ai développé les fonctions elliptiques on en trouve une nouvelle solution très simple, que voici.

L'excentricité du méridien terrestre étant désigné par e, on calculera d'abord la latitude réduite l' de l'origine de la ligne géodésique au moyen de la formule

$$\operatorname{tg} l' = \sqrt{(1-e^2)}\operatorname{tg} B'.$$

On imaginera ensuite un triangle sphérique rectangle $PO'O$ dont l'hypoténuse soit $PO' = \frac{\pi}{2} - l'$ et l'un des angles aigus $PO'O = T''$. On sait que, si l'on mène du point P à un point quelconque O'' du côté OO' de ce triangle, prolongé au besoin, un arc de grand cercle PO'', on aura toujours PO'' et $PO''O$ respectivement égaux au complément de la latitude réduite d'un certain point de la ligne géodésique et à l'angle azimuthal de cette ligne au même point. Supposons que le point O'' soit l'autre extrémité de l'arc s, la marche que suivra notre solution, sera la suivante.

1. On déterminera la correction $\Delta \lg s$ à ajouter au logarithme de l'arc géodésique s pour avoir le logarithme de l'arc de grand cercle $O'O''$;
2. On calculera dans le triangle sphérique $PO'O''$, dont on connait deux côtés $PO' = \frac{\pi}{2} - l'$ et $O'O''$ et l'angle compris $PO'O'' = \pi - T'$, le

---

*) Dieser Aufsatz *Jacobi*'s sowie der darauf folgende des Herrn *E. Luther* sind bereits in den Astronomischen Nachrichten Bd. 41 pag. 210 und Bd. 42 pag. 338 abgedruckt worden.

troisième côté $PO'' = \frac{\pi}{2} - l''$, l'angle $PO''O' = T''$ et l'angle $O'PO''$, que je nommerai ω. On choisira pour ce calcul des formules propres à donner les valeurs de $\lg(l' - l'')$, $\lg(T'' - T'')$, $\lg\omega$ exactes dans les septièmes décimales;

3. On cherchera la correction $\Delta\omega$ à soustraire de ω pour avoir la différence en longitude que je nommerai λ;
4. On remontera de la différence des latitudes réduites $l' - l''$ à la différence des latitudes $B' - B''$.

Les calculs du No. 2 sont ceux qu'on employerait (avec des données différentes) dans l'hypothèse de la Terre sphérique. Ce sont les seuls calculs dans lesquels il faudrait pour quelques logarithmes employer des tables à 7 décimales. Tout le reste du calcul n'exige que l'emploi de tables à 5 décimales.

Je vais donner à présent les formules par lesquelles on calcule les corrections $\Delta\lg s$ et $\Delta\omega$, et dans lesquelles les logarithmes sont les logarithmes vulgaires.

1. Dans le triangle rectangle $PO'O$, dans lequel on connait

$$PO' = \frac{\pi}{2} - l', \qquad PO'O = T'',$$

on calculera au moyen des formules

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{cotg} l' \cos T''$$
$$\cos l = \cos l' \sin T''$$
$$\operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tg} l'}{\cos\varphi' \sin T''},$$

dont la dernière donne une vérification des deux autres, les quantités:

$$OO' = \varphi', \qquad PO = \frac{\pi}{2} - l,$$

et ensuite $\sin B$ au moyen de la valeur

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} l}{\sqrt{(1-e^2)}}, \qquad \{\lg\sqrt{(1-e^2)} = 9{,}9985458\}$$

enfin

$$\lg q = \lg(a \sin^2 B) + b \sin^2 B + c \sin^4 B,$$

où

$$\lg a = 6{,}620290, \qquad \lg b = 7{,}16116, \qquad \lg c = 4{,}594.$$

2. En désignant par s l'arc mesuré divisé par le rayon de l'équateur terrestre et exprimé en secondes, on calculera

$$\lg\varphi^0 = \lg s + d - fq\cos^2\varphi'$$

$$\lg\varphi = \lg O'O'' = \lg\varphi^0 + gq\sin 2\varphi'.\varphi^0 - hq^2\sin^2 2\varphi' + iq\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2}$$

où

$$d = 0{,}0014542, \qquad \lg f = 0{,}54087$$

$$\lg g = 4{,}92541, \qquad \lg h = 0{,}842, \qquad \lg i = 6{,}43$$

(i est exprimé en unités de la 7ième décimale).

C'est cette valeur de $\lg\varphi$ qu'il faudra connaitre pour effectuer le calcul du triangle sphèrique $PO'O''$, dans lequel φ est le côté $O'O''$. On voit que cette valeur s'obtient en ajoutant une correction à $\lg s$. L'angle φ est donné ici en secondes.

3. La valeur de $\lg\Delta\omega$ se compose de quantités connues déjà par les calculs précédents. En effet nommant C et D les quantités déjà calculées,

$$C = fq\cos^2\varphi', \qquad D = gq\sin 2\varphi'.\varphi^0$$

on aura

$$\lg\Delta\omega = \lg(\varphi\cos l) + 7{,}52410 - \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D.$$

Ayant trouvé par cette formule $\Delta\omega$ en secondes, on a la différence en longitude,

$$\lambda = \omega - \Delta\omega.$$

4. Connaissant par le calcul du triangle $PO'O''$ la différence des latitudes réduites $l' - l'' = PO'' - PO'$, on aura la différence des latitudes sur la Terre,

$$B' - B'' = l' - l'' + k\sin(l' - l'')\cos(l' + l'') + n\sin 2(l' - l'')\cos 2(l' + l''),$$

où

$$\lg k = 2{,}83926, \qquad \lg n = 9{,}7620.$$

Le problème dont je viens de donner une solution nouvelle a été dans ces derniers temps l'objet de soins particuliers de la part de M. *Gauss*, qui en a traité dans différents mémoires et en a donné plusieurs solutions. Mon illustre ami, M. *Hansen*, a calculé par les formules précédentes l'exemple qui sert à M. *Gauss* pour éclaircir la dernière de ses solutions (Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, zweite Abhandlung, Göttingen 1847 p. 33). Je mettrai ici avec détail la partie de ce calcul qui se rapporte aux corrections dues à l'ellipticité du sphéroide terrestre.

Exemple.

$\lg s = 3{,}5349945$ $\quad B' = 51^0\,48'\,1''\,9294$ $\quad T'' = 5^0\,42'\,21''\,7699$

$\lg \operatorname{tg} B' = 0{,}1040765$ $\quad \lg \cos T'' = 9{,}9978428$ $\quad \lg \sin T'' = 8{,}9974946$

$l' = 51^0\,42'\,26''\,16$ $\quad \varphi' = 38^0\,9'\,19''$

$\lg \cos \varphi' = 8{,}89562$ $\quad \lg \sin 2\varphi' = 9{,}98748$ $\quad \lg \cos 2\varphi' = 9{,}37$

$\lg \operatorname{tg} l = 1{,}20950$ $\quad \lg \cos l = 8{,}78968$

$\lg \operatorname{tg} B = 1{,}21095$ $\quad \lg \sin B = 9{,}99918$

$\lg (a \sin^2 B) =$	6,61865
$b \sin^2 B =$	0,001444
$c \sin^4 B =$	4
$\lg q =$	6,62010

$\lg s =$	3,5349945
$d =$	0,0014542
$-fq \cos^2 \varphi' =$	$-0{,}0008958 = -C$
$\lg \varphi^0 =$	3,5355529
$gq \sin 2\varphi' . \varphi^0 =$	$0{,}00001171 = D$
$-hq^2 \sin^2 2\varphi' =$	$-0{,}00000114$
$iq \cos 2\varphi' . \varphi^{0^2} =$	3
$\lg \varphi = \lg O'O'' =$	3,5355635

Le calcul du triangle $PO'O''$ donne:

$T' - T'' = 7'\ 0''5884$ $\quad \omega = 8'\,59''4065$

$l' - l'' = 56'\,55''4716$ $\quad l' + l'' = 102^0\,27'\,57''$

$\lg (\varphi \cos l) =$	2,32524
	7,52410
$-\frac{1}{2} C =$	$-0{,}000448$
$\frac{1}{2} D =$	6
$\lg \Delta\omega =$	9,84890

$l' - l'' =$	$56'\,55''4716$
$k \sin (l' - l'') \cos (l' + l'') =$	$-\ 2''4685$
$n \sin 2(l' - l'') \cos 2(l' + l'') =$	$-\ 174$
$B' - B'' =$	$56'\,52''9857$

$\Delta\omega = 0''7062$

$\lambda = \omega - \Delta\omega = 8'\,58''7003$

$T''' = T' - (T' - T'') = 5^0\,35'\,21''1815$

$B'' = B' - (B' - B'') = 50^0\,51'\ 8''9437.$

M. *Gauss* trouve:

$\lambda = 8'\,58''7002$

$T''' = 5^0\,35'\,21''1815$

$B'' = 50^0\,51'\ 8''9444.$

* * *

Supposons qu'en partant des mêmes données B', T', s on ait calculé les valeurs de B'', T''', λ dans l'hypothèse de la Terre purement sphérique et nommons ces valeurs B''_0, T'''_0, λ_0. Il sera curieux et utile de connaitre des formules approximatives simples qui puissent servir à estimer la grandeur des quantités

$$B'' - B''_0, \qquad T''' - T'''_0, \qquad \lambda - \lambda_0$$

ou l'influence que l'ellipticité du sphéroide terrestre exerce sur la détermination de B'', T''', λ. Ces formules sont:

$$B'' - B''_0 = -\tfrac{1}{4} \sin 2B' . e^2$$

$$T''' - T'''_0 = -\tfrac{1}{2} \frac{\sin^3 B'}{\cos B'} \sin T' . e^2 s$$

$$\lambda - \lambda_0 = -\tfrac{1}{2} \frac{2\cos^2 B' - \sin^2 B'}{\cos B'} \sin T' . e^2 s.$$

La dernière de ces quantités s'évanouit pour une latitude d'environ 54°44′.

* * *

En finissant je réunirai les formules par lesquelles on exprime toutes les quantités relatives à une même ligne géodésique au moyen des fonctions elliptiques Θ et H, auxquelles on a joint les fonctions

$$\Theta_1(u) = \Theta(K - u), \qquad H_1(u) = H(K - u).$$

Au lieu des deux constantes qui entrent dans la détermination d'une ligne géodésique, de l'excentricité e et de la latitude B du point où la ligne touche le parallèle, on introduit le module k des fonctions elliptiques (ou son complément k') et un argument constant a, au moyen des formules

$$e = \frac{k}{\Delta \operatorname{am}(a, k')}, \qquad \cos B = k' \sin \operatorname{am}(a, k')$$

ou

$$e = \sqrt{k} \cdot \frac{H_1(ia)}{\Theta_1(ia)}, \qquad \sqrt{(1 - e^2)} = \sqrt{k'} \cdot \frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(ia)}$$

$$\sin B = \sqrt{k} \cdot \frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)}, \qquad \cos B = \sqrt{k'} \cdot \frac{H(ia)}{iH_1(ia)}, \qquad \operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{k}{k'}} \frac{i\Theta_1(ia)}{H(ia)},$$

i étant $= \sqrt{-1}$. On aura encore pour la latitude réduite l du point où la ligne touche le parallèle

$$\cos l = \sin \operatorname{am}(a, k') = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{H(ia)}{iH_1(ia)}$$

$$\sin l = \sqrt{\frac{k}{k'}} \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}, \qquad \operatorname{tg} l = \sqrt{k} \cdot \frac{i\Theta(ia)}{H(ia)}.$$

Mettant pour un point quelconque de la ligne géodésique

$$\varphi' = \operatorname{am}(u),$$

et supposant

$$N = \sqrt{\{H(u+ia).H(u-ia)\}},$$

il viendra

$$\sin T'' = \frac{H(ia)}{i\Theta(o)}\cdot\frac{\Theta(u)}{N}, \quad \cos T'' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta(o)}\cdot\frac{H(u)}{N}, \quad \operatorname{tg} T'' = \frac{H(ia)}{i\Theta(ia)}\cdot\frac{\Theta(u)}{H(u)}$$

$$\sin l' = \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}\cdot\frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \quad \cos l' = \frac{\Theta_1(o)}{H_1(ia)}\cdot\frac{N}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{tg} l' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(o)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}$$

$$\sin B' = \frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)}\cdot\frac{H_1(u)}{\Theta_1(u)}, \quad \cos B' = \frac{\Theta(o)}{H_1(ia)}\cdot\frac{N}{\Theta_1(u)}, \quad \operatorname{tg} B' = \frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(o)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}.$$

Pour exprimer toutes les quantités relatives au triangle sphérique rectangle POO' par les fonctions Θ, H, Θ_1, H_1, mettons

$$O'PO = \omega',$$

on aura

$$\sin\omega' = \frac{H_1(ia)}{H_1(o)}\cdot\frac{H(u)}{N}, \quad \cos\omega' = \frac{H(ia)}{iH_1(o)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}, \quad \operatorname{tg}\omega' = \frac{iH_1(ia).H(u)}{H(ia).H_1(u)}.$$

Supposons qu'on eût construit le triangle POO', en prenant pour $\frac{\pi}{2} - PO'$ la vraie latitude B' au lieu de la latitude réduite l'. Nommant l_0, φ'_0, ω'_0 les valeurs que dans ce cas prendraient les quantités l, φ', ω', on aura

$$\cos l_0 = \frac{H(ia).\Theta(u)}{iH_1(ia).\Theta_1(u)}, \qquad \operatorname{tg}\varphi'_0 = \frac{\Theta(ia).H(u)}{\Theta_1(ia).H_1(u)}$$

$$\operatorname{tg}\omega'_0 = \frac{i\Theta(ia)\,H_1(ia)}{\Theta_1(ia)\,H(ia)}\cdot\frac{H(u)\,\Theta_1(u)}{\Theta(u)\,H_1(u)}.$$

Cette dernière formule peut être simplifiée en introduisant un module transformé.

Enfin, nommant λ' la longitude du point auquel répond la valeur $\varphi' = \operatorname{am}(u)$, cette longitude étant rapportée au méridien qui passe par le point où la ligne géodésique touche le parallèle, on aura, en supposant

$$\nu = \frac{d\lg\Theta_1(ia)}{da},$$

les formules remarquables

$$\sin B' = \frac{\Theta_1(ia)\,H_1(u)}{H_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

$$\cos B'\sin(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta(o)\cdot\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

$$\cos B'\cos(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta(o)\cdot\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

et de plus

$$\sin l' = \frac{\Theta(ia)H_1(u)}{H_1(ia)\Theta(u)}$$

$$\cos l' \sin(\lambda' + \nu u) = \frac{\Theta_1(o)\cdot\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_1(ia)\Theta(u)}$$

$$\cos l' \cos(\lambda' + \nu u) = \frac{\Theta_1(o)\cdot\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\Theta(u)}.$$

Berlin, 1849 Nov. 7.

27.

C. G. J. Jacobi's Ableitung der in seinem Aufsatze: „Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie" enthaltenen Formeln.

(Mitgetheilt von Herrn *E. Luther*.)

In Vorstehendem habe ich einen Aufsatz *Jacobi*'s mitgetheilt, welcher eine neue Lösung einer Fundamental-Aufgabe der Geodäsie und neue geodätische Formeln enthält. Aus den mir von Herrn Professor *Lejeune-Dirichlet* gütigst anvertrauten Manuscripten *Jacobi*'s ist es mir gelungen des Verfassers Ableitung seiner Auflösung und seiner Formeln herzustellen. Dieselbe ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Die schon von den bedeutendsten Geometern und Astronomen behandelte Aufgabe, von welcher *Jacobi* eine neue Lösung gegeben hat, ist folgende:

„Wenn die Länge eines geodätischen Bogens s, die Breite B' seines Anfangspunktes und das Azimuth T' dieses Punktes gegeben sind, die Breite B'' und das Azimuth T'' seines Endpunktes, so wie den Längenunterschied λ beider Punkte zu finden."

Die von *Legendre* (Analyse des triangles, tracés sur la surface d'un sphéroïde, Mémoires de l'Institut, premier semestre de 1806) aufgestellten transcendenten Formeln, welche die Auflösung dieser Aufgabe enthalten, sind bekannt. Indem *Jacobi* in diese Formeln statt der elliptischen Integrale die elliptischen Functionen einführte und auf diese die in den „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" enthaltenen Reihen-Entwickelungen anwendete, gelangte er in nachfolgender Weise zu seiner Auflösung dieser Aufgabe.

Wenn man die Abplattung der Erde mit $1-\sqrt{1-ee}$ bezeichnet, so dafs also nach *Bessel*'s letzten Bestimmungen $\lg e = 8.9122052079$ ist, so erhält man aus der Breite B' die reducirte Breite l' durch die Formel:

$$\operatorname{tg} l' = \sqrt{1-ee}\,.\operatorname{tg} B'.$$

Stellt man sich nun einen sphärischen rechtwinkeligen Triangle POO' vor, dessen Hypotenuse $PO' = \frac{\pi}{2} - l'$ und in dem der spitze Winkel $PO'O = T'$ ist, so ist aus *Legendre*'s Untersuchungen bekannt, dafs, wenn man auf dem

gröfsten Kreis OO' einen zweiten Punkt O'' annimmt und durch denselben den gröfsten Kreis PO'' legt, das Complement dieses Bogens PO'' und der Winkel $PO''O$ respective als die reducirte Breite l'' eines andern Punktes der geodätischen Linie und als das Azimuth T'' dieser Linie in demselben Punkte angesehen werden können. Die Kenntnifs des Bogens $O'O''$ genügt daher, um durch Berechnung des sphärischen Triangels $PO'O''$ die Gröfsen l'' und T'' kennen zu lernen.

Die Gröfse $O'O''$ läfst sich aus dem gemessenen Bogen s der geodätischen Linie auf folgende Art bestimmen. Es sei $PO = \frac{\pi}{2} - l$ und $OO' = \varphi'$, so lassen sich l und φ' durch die Formeln

$$\cos l' \sin T'' = \cos l$$

und

$$\operatorname{cotg} l' \cos T'' = \operatorname{tg} \varphi'$$

berechnen. Setzt man nun $OO'' = \varphi''$, so ist der gesuchte Bogen

$$O'O'' = \varphi'' - \varphi',$$

welche Gröfse durch Auflösung der transcendenten Gleichung:

$$s = \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \,.\, \sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2 l \cos^2 \varphi}$$

(*Legendre* Exercices, tome I pag. 180) erhalten wird, die sich, wenn man

$$\frac{\operatorname{tg} l}{\sqrt{1-e^2}} = \operatorname{tg} B \quad \text{und} \quad e \sin B = k$$

setzt, auf die Form

$$\frac{\sin B}{\sin l} s = \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \,.\, \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

bringen läfst, wo k eine bekannte Gröfse und immer kleiner als e ist. In diese Gleichung, welche auch

$$\frac{\sin B}{\sin l} s = \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - k^2 \,.\, \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sin^2\varphi \,.\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

geschrieben werden kann, führe man

$$\frac{\pi}{2K} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = x,$$

wo K das ganze elliptische Integral der ersten Gattung bezeichnet, als Variabele

ein, und bezeichne

$$\frac{\pi}{2K}\int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ durch } x'$$

und

$$\frac{\pi}{2K}\int_0^{\varphi''} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ durch } x'',$$

so dafs also

$$\varphi' = \operatorname{am}\frac{2Kx'}{\pi} \quad \text{und} \quad \varphi'' = \operatorname{am}\frac{2Kx''}{\pi} \text{ ist.}$$

Dadurch erhält man:

$$\frac{\sin B}{\sin l}s = \frac{2K}{\pi}(x''-x) - k^2\frac{2K}{\pi}\int_{x'}^{x''}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}.dx$$

oder, wenn man die Fund. pag. 133 §. 47 gegebene Formel anwendet,

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{2K}{\pi}\frac{\sin B}{\sin l}s = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi}(x''-x') + 4\left\{\frac{q\sin 2x''}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4x''}{1-q^4} + \cdots\right\} \\ \qquad\qquad - 4\left\{\frac{q\sin 2x'}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4x'}{1-q^4} + \cdots\right\} \end{cases}$$

wo E das vollständige elliptische Integral der zweiten Gattung bezeichnet. Die Function q wird durch die Gleichung (Fund. pag. 104 Formel 14)

$$\lg k = \lg 4\sqrt{q} - 4q + 6q^2 - \tfrac{16}{3}q^3 + \cdots$$

definirt, aus welcher man

$$\lg q = \lg\frac{k^2}{16} + 8q - 12q^2 + \tfrac{32}{3}q^3 - \cdots$$

und ferner

$$\lg q = \lg\frac{k^2}{16} + \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{13}{64}k^4 + \tfrac{23}{192}k^6 + \cdots$$

erhält. Zur Berechnung des *Brigg*ischen Logarithmus von q hat man demnach die Gleichung:

$$\lg \operatorname{vulg} q = \lg \operatorname{vulg}\frac{e^2\sin^2 B}{16} + \tfrac{1}{2}Ae^2\sin^2 B + \tfrac{13}{64}Ae^4\sin^4 B + \tfrac{23}{192}Ae^6\sin^6 B,$$

wo A den Modul des *Brigg*ischen Systems bezeichnet, oder

$$\lg \operatorname{vulg} q = \lg \operatorname{vulg}(a\sin^2 B) + b\sin^2 B + c\sin^4 B,$$

wenn

$$\lg a = 6{,}620290, \quad \lg b = 7{,}16116, \quad \lg c = 4{,}594 \text{ ist.}$$

Vernachlässigt man in der Gleichung (1.) die dritten und höheren Potenzen von q und bezeichnet $x''-x'$ durch x und $\frac{1}{2}(x''+x')$ durch X,

so erhält man:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi}x + 8q\sin x\cos 2X + 8q^2\sin 2x\cos 4X$$

und, wenn man berücksichtigt, dafs für einen gemessenen Bogen x eine kleine Gröfse sein wird,

$$(2.)\qquad \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s = x\left\{\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X + 16q^2\cos 4X\right\}.$$

Es ist aber nach Fund. pag. 110 und 111:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} = 8\left\{\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \cdots\right\}$$
$$= 8\Sigma\varphi(p)\{q^p + 2q^{2p} + 4q^{4p} + 8q^{8p} + \cdots\}$$

und nach Fund. pag. 106 Formel 34:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\Sigma\varphi(p)\{q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + \cdots\},$$

wo p die ungeraden Zahlen und $\varphi(p)$ die Summe der Factoren von p bezeichnet. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich durch Subtraction:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} = 1 + 8\Sigma\varphi(p)\{q^{2p} - q^{4p} - 5q^{8p} - \cdots\}$$
$$= 1 + 8q^2 - 8q^4 + 32q^6 - \cdots$$

und, wenn man nur die beiden *ersten* Glieder berücksichtigt, (in den 12 ersten Decimalstellen genau)

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} = 1 + 8q^2.$$

Substituirt man diese Formel in die Gleichung (2.), so erhält man:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s = x\{1 + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X + 8q^2 + 16q^2\cos 4X\},$$

aus welcher mit derselben Annäherung folgt:

$$\lg\left(\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s\right) = \lg x + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X - 8q^2.$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung

$$\lg\frac{2K}{\pi} = 4q - 4q^2$$

(Fund. pag. 105 Formel 16), so erhält man:

$$(3.)\qquad \lg\left(\frac{\sin B}{\sin l}s\right) = \lg x - 4q + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X - 4q^2.$$

Da $\sin B = \frac{k}{e}$, so ist $\mathrm{tg}^2 B = \frac{k^2}{e^2-k^2}$, also $\mathrm{tg}^2 l = \frac{k^2(1-e^2)}{e^2-k^2}$ und folglich $\sin^2 l = \frac{k^2(1-e^2)}{e^2(1-k^2)}$. Mithin ist $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 l} = \frac{1-k^2}{1-e^2}$, woraus folgt:

$$\lg \frac{\sin B}{\sin l} = \lg \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + \lg \sqrt{1-k^2}.$$

Es ist aber nach Fund. pag. 104 Formel 15:

$$\lg \sqrt{1-k^2} = -8q - \tfrac{32}{3} q^3$$

also

$$\lg \frac{\sin B}{\sin l} = \lg \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} - 8q - \tfrac{32}{3} q^3.$$

Substituirt man diese Gleichung in die Gleichung (3.), indem man $\lg \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ durch ε bezeichnet, so erhält man:

$$\lg s = \lg x - \varepsilon + 4q + 8q \cos 2X - \tfrac{4}{3} q x^2 \cos 2X - 4q^2$$

oder

$$(4.) \quad \lg x = \lg s + \varepsilon - 4q - 8q \cos 2X + \tfrac{4}{3} q x^2 \cos 2X + 4q^2.$$

Nach Fund. pag. 102 Formel 24 ist:

$$\varphi' = \mathrm{am} \frac{2Kx'}{\pi} = x' + \frac{2q \sin 2x'}{1+q^2} + \frac{2q^2 \sin 4x'}{2(1+q^4)} + \cdots$$

oder, wenn man die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt,

$$\varphi = x' + 2q \sin 2x' + q^2 \sin 4x'.$$

Ebenso erhält man:

$$\varphi'' = x'' + 2q \sin 2x'' + q^2 \sin 4x''$$

und folglich:

$$\varphi'' - \varphi' = x'' - x' + 4q \sin(x''-x') \cos(x''+x') + 2q^2 \sin 2(x''-x') \cos 2(x''+x'),$$

oder mit der oben eingeführten Bezeichnung:

$$\varphi'' - \varphi' = x + 4q \sin x \cos 2X + 2q^2 \sin 2x \cos 4X.$$

Vernachläfsigt man in dieser Gleichung $\frac{1}{30} q x^5$ und $\frac{8}{3} q^2 x^3$ (q ist im ungünstigsten Falle $< \frac{1}{2500}$ und $x < \frac{1}{60}$), so wird aus derselben:

$$\varphi'' - \varphi' = x\{1 + 4q \cos 2X - \tfrac{2}{3} q x^2 \cos 2X + 4q^2 \cos 4X\}$$

und mit derselben Annäherung:

$$\lg(\varphi'' - \varphi') = \lg x + 4q \cos 2X - \tfrac{2}{3} q x^2 \cos 2X - 4q^2.$$

Substituirt man nun in diese Gleichung die Gleichung (4.), so erhält man:

$$\lg(\varphi''-\varphi') = \lg s+\varepsilon-4q-4q\cos 2X+\tfrac{2}{3}qx^2\cos 2X$$

oder

$$\lg(\varphi''-\varphi') = \lg s+\varepsilon-8q\cos^2 X+\tfrac{2}{3}qx^2\cos 2X.$$

Zur Berechnung von $\varphi''-\varphi'$ aus dieser Gleichung ist es zulässig statt x und X Näherungswerthe zu setzen. Bezeichnet man $\varphi''-\varphi'$ durch φ und $\frac{1}{2}(\varphi''+\varphi')$ durch Φ, so kann man

$$\varphi \text{ statt } x$$

und $\Phi-2q\sin 2\Phi$ statt X setzen.

Diese letzte Substitution erhält man aus den Gleichungen:

$$\varphi' = x'+2q\sin 2x'$$
$$\varphi'' = x''+2q\sin 2x'',$$

welche durch Umkehrung

$$x' = \varphi'-2q\sin 2\varphi'$$
$$x'' = \varphi''-2q\sin 2\varphi'',$$

also $X = \Phi-2q\sin 2\Phi\cos\varphi$ oder näherungsweise

$$X = \Phi-2q\sin 2\Phi$$

ergeben. Alsdann ist:

$$\cos X = \cos\Phi+2q\sin 2\Phi\sin\Phi$$
$$= \cos\Phi(1+4q\sin^2\Phi)$$

also

$$\cos^2 X = \cos^2\Phi(1+8q\sin^2\Phi)$$
$$= \cos^2\Phi+2q\sin^2 2\Phi$$

und folglich:

$$\lg\varphi = \lg s+\varepsilon-8q\cos^2\Phi+\tfrac{2}{3}q\varphi^2\cos 2\Phi-16q^2\sin^2 2\Phi.$$

Um aus dieser Gleichung φ zu finden, berechnet man zuerst einen Näherungswerth φ^0 von φ durch die Gleichung:

$$\lg\varphi^0 = \lg s+\varepsilon-8q\cos^2\varphi'$$

und setzt $\varphi'+\frac{1}{2}\varphi^0$ statt Φ, und φ^0 statt φ. Alsdann wird

$$-8q\cos^2\Phi = -8q\cos^2\varphi'+2q\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2}+4q\sin 2\varphi'.\varphi^0,$$
$$+\tfrac{2}{3}q\varphi^2\cos 2\Phi = +\tfrac{2}{3}q\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2},$$
$$-16q^2\sin^2 2\Phi = -16q^2\sin^2 2\varphi'$$

und folglich:

$$\lg\varphi = \lg\varphi^0+4q\sin 2\varphi'.\varphi^0-16q^2\sin^2 2\varphi'+\tfrac{8}{3}q\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2}.$$

Zur Berechnung des ***Brigg***ischen Logarithmus von φ hat man demnach die Gleichungen:

$$\lg \operatorname{vulg} \varphi^0 = \lg \operatorname{vulg} s + A\varepsilon - 8Aq\cos^2\varphi'$$

$$\lg \operatorname{vulg} \varphi = \lg \operatorname{vulg} \varphi^0 + 4\frac{A}{r}q\sin 2\varphi'.\varphi^0 - 16Aq^2\sin^2 2\varphi' + \tfrac{8}{3}\frac{A}{r^2}q\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2},$$

wo $r = 206264''8$ ist, oder die Gleichungen:

$$\lg \operatorname{vulg} \varphi^0 = \lg \operatorname{vulg} s + d - fq\cos^2\varphi'$$

$$\lg \operatorname{vulg} \varphi = \lg \operatorname{vulg} \varphi^0 + gq\sin 2\varphi'.\varphi^0 - hq^2\sin^2 2\varphi' + iq\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2},$$

wo

$$d = 0{,}0014542, \qquad \lg f = 0{,}54087$$

$$\lg g = 4{,}92541, \qquad \lg h = 0{,}842, \qquad \lg i = 6{,}43-17$$

ist.

Zur Bestimmung des Längenunterschiedes λ der beiden Endpunkte des Bogens s hat man die Gleichung:

$$\lambda = \cos l \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sqrt{1-e^2+e^2\sin^2 l\cos^2\varphi}}{1-\sin^2 l\cos^2\varphi}\, d\varphi$$

(*Legendre* Exercices pag. 180), welche sich mit Berücksichtigung der Gleichung:

$$\frac{\operatorname{tg} l}{\sqrt{1-ee}} = \operatorname{tg} B$$

auf die Form:

$$(5.) \qquad \lambda = \frac{\operatorname{tg} l}{\sin B}\int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+\operatorname{tg}^2 l\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

bringen läfst. Aus den Gleichungen:

$$e\sin B = k$$

und

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} l}{\sqrt{1-ee}}$$

ergiebt sich

$$e^2 = \frac{k^2}{\sin^2 l + k^2\cos^2 l},$$

also

$$\sin B = \frac{k}{e} = \sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\sin B$ in die Gleichung (5.), so erhält man:

$$(6.) \qquad \lambda = \frac{\operatorname{cotg} l}{\sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l}}\int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\operatorname{cotg}^2 l + \sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

In diese Gleichung führe man

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u$$

als neue Variable ein, so dafs also

$$(7.) \qquad \varphi = \operatorname{am} u$$

ist, und setze

$$\frac{\pi}{2} - l = \operatorname{am}(a, k'),$$

wenn $k' = \sqrt{1-k^2}$ ist. Alsdann ist:

$$\operatorname{cotg} l = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a, k')$$

und da, wenn man $\sqrt{-1} = i$ setzt, nach Fund. pag. 34 Formel 1,

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(a, k') = \frac{1}{i}\sin\operatorname{am}(ia)$$

ist, so folgt:

$$(8.) \qquad \operatorname{cotg} l = \frac{1}{i}\sin\operatorname{am}(ia).$$

Ferner ist:

$$\sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l} = \sqrt{1-k'^2\cos^2 l} = \sqrt{1-k'^2\sin^2\operatorname{am}(a, k')},$$

welche Gröfse, wie gebräuchlich ist, mit $\Delta\operatorname{am}(a, k')$ bezeichnet wird, so dafs also

$$\sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l} = \Delta\operatorname{am}(a, k').$$

Es ist aber nach Fund. pag. 34 Formel 2 und 4

$$\Delta\operatorname{am}(a, k') = \frac{\Delta\operatorname{am}(ia)}{\cos\operatorname{am}(ia)}$$

und folglich

$$(9.) \qquad \sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l} = \frac{\Delta\operatorname{am}(ia)}{\cos\operatorname{am}(ia)}.$$

Substituirt man die Gleichungen (7.), (8.) und (9.) in die Gleichung (6.), so erhält man:

$$(10.) \qquad \lambda = \frac{1}{i}\frac{\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)}{\Delta\operatorname{am}(ia)}\int_{u'}^{u''} \frac{\Delta^2\operatorname{am}(u).du}{\sin^2\operatorname{am}(u) - \sin^2\operatorname{am}(ia)},$$

wo

$$\int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} \text{ durch } u'$$

und

$$\int_0^{\varphi''} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} \text{ durch } u''$$

bezeichnet ist. In die Gleichung (10.) lassen sich die elliptischen Functionen Θ und H, wie folgt, einführen. Nach Fund. pag. 173 Formel 1 ist:

$$\sin\mathrm{am}(u) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(u)}{\Theta(u)}$$

$$\sin\mathrm{am}(ia) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(ia)}{\Theta(ia)},$$

also

$$\Delta^2\mathrm{am}(u) = 1 - k\frac{H^2(u)}{\Theta^2(u)}$$

$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) = 1 - k\frac{H^2(ia)}{\Theta^2(ia)}.$$

Hieraus folgt:

$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) - \Delta^2\mathrm{am}(u) = k\frac{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}{\Theta^2(ia)\Theta^2(u)}$$

und, wenn man Fund. pag. 175 Formel 21 benutzt,

$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) - \Delta^2\mathrm{am}(u) = \frac{k\Theta^2(0)H(u+ia)H(u-ia)}{\Theta^2(u)\Theta^2(ia)}.$$

Es ist aber nach Fund. pag. 173 Formel 1:

$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) = k'\frac{\Theta^2(ia+K)}{\Theta^2(ia)}$$

oder, wenn man $\Theta(ia+K)$ durch $\Theta_1(ia)$ bezeichnet,

$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) = k'\frac{\Theta_1^2(ia)}{\Theta^2(ia)}$$

und folglich:

$$1 - \frac{\Delta^2\mathrm{am}(u)}{\Delta^2\mathrm{am}(ia)} = \frac{k}{k'}\frac{\Theta^2(0)}{\Theta^2(u)}\frac{H(u+ia)H(u-ia)}{\Theta_1^2(ia)}.$$

Nimmt man von beiden Seiten dieser Gleichung die Logarithmen und differenzirt alsdann in Bezug auf a, so erhält man:

$$\frac{-2ik^2\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)\Delta^2\mathrm{am}(u)}{\Delta\mathrm{am}(ia)\{\Delta^2\mathrm{am}(ia) - \Delta^2\mathrm{am}(u)\}} = \frac{iH'(u+ia)}{H(u+ia)} - \frac{iH'(u-ia)}{H(u-ia)} - \frac{2i\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)},$$

oder

$$\frac{2\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)}{i\Delta\mathrm{am}(ia)}\cdot\frac{\Delta^2\mathrm{am}(u)}{(\sin^2\mathrm{am}(u) - \sin^2\mathrm{am}(ia))}$$

$$= i\left\{\frac{H'(u+ia)}{H(u+ia)} - \frac{H'(u-ia)}{H(u-ia)} - \frac{2\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)}\right\},$$

wenn man $\frac{dH(u)}{du}$ durch $H'(u)$ und $\frac{d\Theta_1(u)}{du}$ durch $\Theta_1'(u)$ bezeichnet.

Substituirt man diese Gleichung in die Gleichung (10.), so erhält man:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}i\int_{u'}^{u''}\frac{H'(u+ia)}{H(u+ia)}du - \tfrac{1}{2}i\int_{u'}^{u''}\frac{H'(u-ia)}{H(u-ia)}du - \frac{i\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)}\int_{u'}^{u''}du$$

oder, wenn man die Integration ausführt und

$$\frac{i\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)} \text{ durch } \nu$$

bezeichnet.

$$(11.)\quad \lambda = \tfrac{1}{2}i\lg\frac{H(ia+u'')}{H(ia-u'')} - \tfrac{1}{2}i\lg\frac{H(ia+u')}{H(ia-u')} - \nu(u''-u').$$

Nach Fund. pag. 173 Formel 1 ist:

$$\lg H(u) = \lg\{\sqrt{k}\,.\,\mathrm{sin\,am}(u)\,.\,\Theta(u)\}.$$

Da aber nach Fund. pag. 99 Formel 6

$$\lg(\sqrt{k}\,.\,\mathrm{sin\,am}\,u) = \lg 2\sqrt[4]{q} + \lg\sin x + 2\left\{\frac{q\cos 2x}{1+q} + \frac{q^2\cos 4x}{2(1+q^2)} + \cdots\right\}$$

und nach Fund. pag. 145

$$(12.)\quad \lg\Theta(u) = \mathrm{Const} - 2\left\{\frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\cos 4x}{2(1-q^4)} + \cdots\right\},$$

wenn $u = \frac{2Kx}{\pi}$ gesetzt ist, so folgt:

$$\lg H(u) = \mathrm{Const} + \lg\sin x - 2\left\{\frac{q^2\cos 2x}{1-q^2} + \frac{q^4\cos 4x}{2(1-q^4)} + \cdots\right\}.$$

Führt man diese Entwickelung in die Gleichung (11.) ein, indem man $u' = \frac{2Kx'}{\pi}$, $u'' = \frac{2Kx''}{\pi}$ und $a = \frac{2K\alpha}{\pi}$ setzt und diejenigen Glieder, welche die vierte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt, so wird:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}i\lg\frac{\sin(i\alpha+x'')\sin(i\alpha-x')}{\sin(i\alpha-x'')\sin(i\alpha+x')} - \frac{2K\nu}{\pi}(x''-x')$$

$$+\frac{1}{i}q^2\{\cos 2(i\alpha+x'') + \cos 2(i\alpha-x') - \cos 2(i\alpha-x'') - \cos 2(i\alpha+x')\}$$

oder, wenn man, wie schon oben geschehen ist, $x''-x' = x$ und $\frac{1}{2}(x''+x') = X$ setzt,

$$(13.)\quad \lambda = \mathrm{arc\,tg}\frac{i\,\mathrm{tg}\,x''}{\mathrm{tg}\,i\alpha} - \mathrm{arc\,tg}\frac{i\,\mathrm{tg}\,x'}{\mathrm{tg}\,i\alpha} - \frac{2K\nu}{\pi}x - \frac{4}{i}q^2\sin 2i\alpha\sin x\cos 2X.$$

Da $\Theta_1(ia) = \Theta(ia+K) = \Theta\left\{\frac{2K}{\pi}\left(i\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ ist, so erhält man, wenn man in die Gleichung (12.), $i\alpha+\frac{\pi}{2}$ statt x setzt,

$$\lg\Theta_1(ia) = \mathrm{Const} + 2\left\{\frac{q\cos 2i\alpha}{1-q^2} - \frac{q^2\cos 4i\alpha}{2(1-q^4)} + \cdots\right\}$$

und durch Differenziation dieser Gleichung in Bezug auf α, mit Berücksichtigung der Gleichung $\frac{d\lg\Theta_1(ia)}{d\alpha} = \frac{2Ki}{\pi}\frac{\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)} = \frac{2Kv}{\pi}$,

$$\frac{2Kv}{\pi} = -4i\left\{\frac{q\sin 2i\alpha}{1-q^2} - \frac{q^2\sin 4i\alpha}{1-q^4} + \cdots\right\}$$

oder, wenn man die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt,

$$\frac{2Kv}{\pi} = 4q\frac{\sin 2i\alpha}{i} - 4q^2\frac{\sin 4i\alpha}{i}.$$

Diese Formel, in die Gleichung (13.) substituirt, ergiebt

$$(14.)\quad \lambda = \operatorname{arc\,tg}\frac{i\operatorname{tg}x''}{\operatorname{tg}i\alpha} - \operatorname{arc\,tg}\frac{i\operatorname{tg}x'}{\operatorname{tg}i\alpha} - 4q\frac{\sin 2i\alpha}{i}x + 4q^2\frac{\sin 4i\alpha}{i}x - 4q^2\frac{\sin 2i\alpha}{i}\sin x\cos 2X.$$

Führt man statt der Gröfse α einen Winkel A ein, welcher durch die Gleichung:

$$\alpha = \lg\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A$$

definirt wird, so ist:

$$\cos i\alpha = \frac{1}{\sin A},\qquad \frac{\sin i\alpha}{i} = \operatorname{cotg}A,\qquad \frac{\operatorname{tg}i\alpha}{i} = \cos A,$$

$$\frac{\sin 2i\alpha}{i} = \frac{2\cos A}{\sin^2 A},\qquad \cos 2i\alpha = \frac{1+\cos^2 A}{\sin^2 A}.$$

Substituirt man diese verschiedenen Ausdrücke in die Gleichung (14.) und setzt in das letzte Glied, welches q^2 enthält, x statt $\sin x$, so wird:

$$(15.)\quad \lambda = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}x''}{\cos A} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}x'}{\cos A} - 8q\frac{\cos A}{\sin^2 A}x + 8q^2\frac{\cos A}{\sin^2 A}x\left\{\frac{2(1+\cos^2 A)}{\sin^2 A} - \cos 2X\right\}.$$

Um den Werth des Winkels A zu finden, hat man die Gleichung:

$$\frac{\pi}{2} - l = \operatorname{am}(a, k'),$$

also $\frac{\pi}{2} - l = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a,k') - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\operatorname{am}(a,k') + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5\operatorname{am}(a,k') - \cdots$

Da aber nach Fund. pag. 34 Formel 1

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(a,k') = \frac{\sin\operatorname{am}(ia)}{i},$$

so ist:

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{\sin\operatorname{am}(ia)}{i} + \frac{1}{3}\frac{\sin^3\operatorname{am}(ia)}{i} + \frac{1}{5}\frac{\sin^5\operatorname{am}(ia)}{i} + \cdots$$

also

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + \sin \mathrm{am}(i\alpha)}{1 - \sin \mathrm{am}(i\alpha)}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + \sin \mathrm{am} \frac{2Ki\alpha}{\pi}}{1 - \sin \mathrm{am} \frac{2Ki\alpha}{\pi}}.$$

Benutzt man zur Entwickelung dieser Gleichung Fund. pag. 99 Formel 9, so erhält man:

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + \sin i\alpha}{1 - \sin i\alpha} + \frac{4}{i} \left\{ \frac{q \sin i\alpha}{1-q} - \frac{q^3 \sin 3i\alpha}{3(1-q^3)} + \cdots \right\}$$

oder, wenn die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt werden:

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + \sin i\alpha}{1 - \sin i\alpha} + \frac{4}{i} \frac{q}{1-q} \sin i\alpha$$

$$= \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + i \operatorname{cotg} \mathrm{A}}{1 - i \operatorname{cotg} \mathrm{A}} + \frac{4q}{1-q} \operatorname{cotg} \mathrm{A}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \mathrm{A} + \frac{4q}{1-q} \operatorname{cotg} \mathrm{A}$$

und folglich:

$$l = \mathrm{A} - \frac{4q}{1-q} \operatorname{cotg} \mathrm{A}.$$

Nun kann man aber statt dieser Formel, um λ mit genügender Schärfe zu berechnen, setzen:

$$l = \mathrm{A} - 4q \operatorname{cotg} \mathrm{A},$$

oder

$$\text{(16.)} \qquad \mathrm{A} = l + 4q \operatorname{cotg} l.$$

Eine andere bemerkenswerthe Formel zur Berechnung von A findet man aus der schon oben aufgestellten Gleichung:

$$e^2 = \frac{k^2}{\sin^2 l + k^2 \cos^2 l}$$

$$= \frac{k^2}{1 - k'^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - l \right)}$$

$$= \frac{k^2}{1 - k'^2 \sin^2 \mathrm{am}(a, k')}$$

$$= \frac{k^2}{\Delta^2 \mathrm{am}(a, k')},$$

also

$$1-e^2 = \frac{1-k'^2\sin^2\mathrm{am}(a,k')-k^2}{\Delta^2\mathrm{am}(a,k')} = \frac{k'^2\cos^2\mathrm{am}(a,k')}{\Delta^2\mathrm{am}(a,k')},$$

oder nach Fund. pag. 34 Formel 4:

$$1-e^2 = \frac{k'^2}{\Delta^2\mathrm{am}(ia)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\varepsilon = -\tfrac{1}{2}\lg(1-e^2) = \lg\frac{\Delta\mathrm{am}(ia)}{k'}$$

oder, wenn man die Entwickelungen Fund. pag. 99 Formel 8 und pag. 104 Formel 15 benutzt,

$$\varepsilon = \frac{4q\cos 2i\alpha}{1-q^2} + \frac{3q^3\cos 6i\alpha}{3(1-q^6)} + \cdots + 4q + \tfrac{16}{3}q^3 + \cdots$$

Vernachlässigt man endlich die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, so bekommt man die Gleichung:

$$\varepsilon = 4q\cos 2i\alpha + 4q = 8q\cos^2 i\alpha$$

oder

$$(17.) \qquad \varepsilon = \frac{8q}{\sin^2 A},$$

welche die zur Berechnung von A in den neun ersten Decimalstellen genaue Formel:

$$\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2q}}$$

ergiebt.

Macht man von dieser Formel Gebrauch, so erhält man aus Gleichung (15.) für λ die Gleichung:

$$(18.) \qquad \lambda = \mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{tg}\,x''}{\cos A} - \mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{tg}\,x'}{\cos A} - \varepsilon\cos A x\{1-\tfrac{1}{2}\varepsilon+2q+q\cos 2X\}.$$

Durch Berechnung des Dreiecks $PO'O''$ nach einer zweckmäfsigen Methode (*Gaufs*, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, Göttingen 1844, pag. 32) wird man gleichzeitig mit $l'-l''$ und $T'-T''$ den Winkel $O'PO'' = \omega$ erhalten. Die Correction, welche von dem Winkel ω zu subtrahiren ist, um λ zu geben, sei $\Delta\omega$. Die Bestimmung dieser Correction $\Delta\omega$ erhält man auf folgendem Wege. — Es sei

$$O'PO = \omega' \quad \text{und} \quad O''PO = \omega''.$$

Alsdann ist:

$$\mathrm{cotg}\,\omega' = \frac{\cos l}{\mathrm{tg}\,\varphi'} = \frac{\sin\mathrm{am}(a,k')}{\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(u')}$$

und nach Fund. pag. 34 Formel 1

$$\operatorname{cotg}\omega' = \frac{i \sin\mathrm{am}(a, k')}{\sin\mathrm{am}(iu', k')},$$

folglich

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin\mathrm{am}(iu', k') - \sin\mathrm{am}(a, k')}{\sin\mathrm{am}(iu', k') + \sin\mathrm{am}(a, k')}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a)+\frac{1}{2}(iu'-a), k'\} - \sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a)-\frac{1}{2}(iu'-a), k'\}}{\sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a)+\frac{1}{2}(iu'-a), k'\} + \sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a)-\frac{1}{2}(iu'-a), k'\}}.$$

Wendet man auf diese Gleichung die Subtractions- und Additions-Formel (Fund. pag. 32 Formel 4 und 1) an, so wird:

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'-a), k'\} \cos\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a), k'\} \Delta\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a), k'\}}{\sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a), k'\} \cos\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'-a), k'\} \Delta\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'-a), k'\}}$$

$$= \frac{1}{2i} \lg \frac{\operatorname{tg}\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'-a), k'\} \Delta\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a), k'\}}{\operatorname{tg}\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a), k'\} \Delta\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'-a), k'\}}$$

oder, nach Fund. pag. 34 Formel 3 und 4,

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'+ia)\cos\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'+ia)}{\Delta\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'+ia)} - \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'-ia)\cos\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'-ia)}{\Delta\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'-ia)}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Fund. pag. 99 Formel 6, 7 und 8, so wird:

$$(19.) \quad \frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin(x'+i\alpha)}{\sin(x'-i\alpha)} + \frac{q^2 \cos 2(x'+i\alpha)}{i(1+q^2)} + \frac{q^4 \cos 4(x'+i\alpha)}{2i(1+q^4)} + \cdots$$
$$- \frac{q^2 \cos 2(x'-i\alpha)}{i(1+q^2)} - \frac{q^4 \cos 4(x'-i\alpha)}{2i(1+q^4)} - \cdots$$

Diese Entwickelung erhält man auf kürzerem Wege durch Anwendung der *Legendre*'schen Transformation der zweiten Ordnung, indem man den Ausdruck $\frac{1}{2i} \lg \sin\mathrm{am}(u'+ia) - \frac{1}{2i} \lg \sin\mathrm{am}(u'-ia)$, nach Fund. pag. 99 Formel 6, in die Reihe

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{\sin(x'+i\alpha)}{\sin(x'-i\alpha)} + \frac{q \cos 2(x'+i\alpha)}{i(1+q)} + \frac{q^2 \cos 4(x'+i\alpha)}{2i(1+q^2)} + \cdots$$
$$- \frac{q \cos 2(x'-i\alpha)}{i(1+q)} - \frac{q^2 \cos 4(x'-i\alpha)}{2i(1+q^2)} - \cdots$$

entwickelt und alsdann q^2 statt q setzt.

Vernachlässigt man in der Gleichung (19.):

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin(x'+i\alpha)}{\sin(x'-i\alpha)} - \frac{2}{i} \left\{ \frac{q^2}{1+q^2} \sin 2i\alpha \sin 2x' + \frac{q^4}{2(1+q^4)} \sin 4i\alpha \sin 4x' + \cdots \right\}$$

die Glieder, welche die vierte und höhere Potenzen von q enthalten, so wird:

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} i\alpha}{i \operatorname{tg} x'} - \frac{4q^2}{1+q^2} \frac{\cos A}{\sin^2 A} \sin 2x'$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{\cos A}{\operatorname{tg} x'} - \frac{4q^2}{\sin^2 A} \cos A \sin 2x'$$

oder wenn man die Gleichung (17.) benutzt,

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x'}{\cos A} - \tfrac{1}{2} \varepsilon q \cos A \sin 2x'.$$

Ebenso erhält man:

$$\frac{\pi}{2} - \omega'' = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x''}{\cos A} - \tfrac{1}{2} \varepsilon q \cos A \sin 2x''$$

und folglich

$$\omega'' - \omega' = \omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x''}{\cos A} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x'}{\cos A} + \tfrac{1}{2} \varepsilon q \cos A (\sin 2x'' - \sin 2x').$$

Da $\sin 2x'' - \sin 2x' = 2 \sin x \cos 2X$, also näherungsweise

$$\sin 2x'' - \sin 2x' = 2x \cos 2X$$

ist, so wird

$$\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x''}{\cos A} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x'}{\cos A} + \varepsilon q x \cos A \cos 2X.$$

Substituirt man diese Gleichung in die Gleichung (18.), so erhält man

$$\Delta\omega = \varepsilon x \cos A \{1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + 2q + 2q \cos 2X\}$$

oder

$$\Delta\omega = \varepsilon x \cos A \{1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + 4q \cos^2 X\}$$

oder endlich, wenn man, wie bisher, $\varepsilon^2 q$ in den Gliedern, die s oder x enthalten, vernachlässigt,

$$\Delta\omega = (\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) x \cos A (1 + 4q \cos^2 X).$$

Nach Gleichung (16.) ist:

$$A = l + 4q \operatorname{cotg} l$$

also

$$\cos A = \cos(l + 4q \operatorname{cotg} l)$$

$$= (1 - 4q) \cos l$$

und folglich wird die gesuchte Correction:

$$\Delta\omega = (\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) x \cos l (1 - 4q \sin^2 X)$$

und

$$\lg \Delta\omega = \lg \{(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) x \cos l\} - 4q \sin^2 X.$$

Setzt man in diese Gleichung näherungsweise

$$\begin{aligned} x &= \varphi - 2q(\sin 2\varphi'' - \sin 2\varphi') \\ &= \varphi - 4q\varphi \cos 2\Phi \\ &= \varphi(1 - 4q\cos 2\Phi) \end{aligned}$$

also

$$\lg x = \lg \varphi - 4q \cos 2\Phi$$

und

$$X = \Phi,$$

so wird:

$$\begin{aligned} \lg \Delta\omega &= \lg(\varphi \cos l) + \lg(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - 4q\cos 2\Phi - 4q\sin^2\Phi \\ &= \lg(\varphi \cos l) + \lg(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - 4q\cos^2\Phi \end{aligned}$$

und, wenn man $\Phi = \varphi' + \frac{1}{2}\varphi^0$ setzt,

(20.) $$\lg \Delta\omega = \lg(\varphi\cos l) + \lg(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - \tfrac{1}{2}(8q\cos^2\varphi') + \tfrac{1}{2}(4q\varphi^0 \sin 2\varphi').$$

Zur Berechnung des *Brigg*ischen Logarithmus von $\Delta\omega$ hat man demnach die Gleichung:

$$\lg \operatorname{vulg} \Delta\omega$$
$$= \lg \operatorname{vulg}(\varphi\cos l) + \lg \operatorname{vulg}(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - \tfrac{1}{2}(8Aq\cos^2\varphi') + \tfrac{1}{2}\left(4\frac{A}{r}q\sin 2\varphi'.\varphi^0\right)$$

oder mit einer schon oben gebrauchten Bezeichnung

$$\lg \operatorname{vulg} \Delta\omega = \lg \operatorname{vulg}(\varphi\cos l) + 7{,}52410 - \tfrac{1}{2}fq\cos^2\varphi' + \tfrac{1}{2}gq\sin^2\varphi'.\varphi^0$$

oder endlich, wenn man

$$fq\cos^2\varphi' = C \quad \text{und} \quad gq\sin^2\varphi'\varphi^0 = D$$

setzt,

$$\lg \operatorname{vulg} \Delta\omega = \lg \operatorname{vulg}(\varphi\cos l) + 7{,}52410 - \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D.$$

Es ist jetzt noch die Formel abzuleiten, durch welche man aus der reducirten Breite l'' die Breite B'' oder aus der Gröfse $l' - l''$ die Gröfse $B' - B''$ erhält.

Aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\operatorname{tg} l'}{\sqrt{1-ee}}$$

ergiebt sich die bekannte Gleichung:

$$B' - l' = \frac{1-\sqrt{1-ee}}{1+\sqrt{1-ee}}\sin 2l' + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1-\sqrt{1-ee}}{1+\sqrt{1-ee}}\right\}^2 \sin 4l' + \tfrac{1}{3}\left\{\frac{1-\sqrt{1-ee}}{1+\sqrt{1-ee}}\right\}^3 \sin 6l' + \cdots$$

Entwickelt man $\frac{1-\sqrt{1-ee}}{1+\sqrt{1-ee}}$ in eine Reihe, so erhält man

$$\frac{1}{4}e^2+\frac{3}{4.6}e^4+\frac{3\,5}{4.6.8}e^6+\frac{3.5.7}{4.6.8.10}e^8+\cdots$$

und, wenn man $\frac{1}{2}\varepsilon = -\frac{1}{2}\lg\sqrt{1-e^2}$ in eine Reihe entwickelt,

$$\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{1}{8}e^4+\tfrac{1}{12}e^6+\tfrac{1}{16}e^8+\cdots$$

Beide Reihen weichen erst in Gliedern, welche die sechste und höhere Potenzen von e enthalten, von einander ab. Ihr Unterschied ist nämlich

$$\tfrac{1}{192}e^6+\tfrac{1}{128}e^8+\cdots$$

Es kann daher

$$\frac{1-\sqrt{1-ee}}{1+\sqrt{1-ee}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

gesetzt werden, und man erhält:

$$(21.)\qquad B'-l' = \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2l'+\tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin 4l'+\tfrac{1}{24}\varepsilon^3\sin 6l'+\cdots$$

Ebenso wird:

$$(22.)\qquad B''-l'' = \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2l''+\tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin 4l''+\tfrac{1}{24}\varepsilon^3\sin 6l''+\cdots$$

Subtrahirt man die untere Gleichung von der obern, so wird:

$$B'-B'' = l'-l''+\varepsilon\sin(l'-l'')\cos(l'+l'')+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2\sin 2(l'-l'')\cos 2(l'+l'')+\cdots$$

oder, in Secunden ausgedrückt,

$$B'-B'' = l'-l''+k\sin(l'-l'')\cos(l'+l'')+n\sin 2(l'-l'')\cos 2(l'+l''),$$

wo $\lg k = \lg r\varepsilon = 2{,}83926$ und $\lg n = \lg\frac{1}{4}r\varepsilon^2 = 9{,}7620$ ist.

* * *

Einfache Formeln, um den Einfluſs der Ellipticität des Erdmeridians auf die berechneten Winkel T''', B'', λ annähernd schätzen zu können, erhält man durch die folgenden Betrachtungen.

Man stelle sich einen sphärischen Triangel vor, der die Seiten s und $\frac{\pi}{2}-B'$, und den von ihnen eingeschlossenen Winkel $180^0-T'$ habe. Die dritte Seite sei $\frac{\pi}{2}-B_0''$, und die den Seiten s und $\frac{\pi}{2}-B'$ gegenüberliegenden Winkel seien respective λ_0 und T_0''. Diese Winkel $\frac{\pi}{2}-B_0''$, λ_0 und T_0'' würden die Werthe von $\frac{\pi}{2}-B''$, λ und T''' sein, wenn die Erde eine Kugel wäre. Setzt man

$$B'' = B_0''+\Delta B_0'', \qquad T''' = T_0''+\Delta T_0'', \qquad \lambda = \lambda_0+\Delta\lambda_0,$$

so sind $\Delta B_0''$, $\Delta T_0''$, $\Delta\lambda_0$ die Correctionen, welche den Werthen B_0'', T_0'', λ_0

wegen der Ellipticität der Erde hinzuzufügen sind. Setzt man ferner:

$$\varphi = s + \delta s \qquad l' = B' + \delta B'$$
$$\omega = \lambda_0 + \delta\lambda_0 \qquad l'' = B_0'' + \delta B_0'',$$

so sind $\delta\lambda_0$, $\delta B_0''$ und $\Delta T''$ die Correctionen, welche von ω, l'' und T'' zu subtrahiren sind, wenn man die beiden Seiten φ und $\frac{\pi}{2} - l'$ des sphärischen Hülfstriangels in s und $\frac{\pi}{2} - B'$ übergehen, den Winkel $180^0 - T''$ aber ungeändert läfst, und es werden:

$$\Delta\lambda_0 = \delta\lambda_0 - (\omega - \lambda)$$
$$\Delta B_0'' = \delta B_0'' - (l'' - B'')$$

sein.

Aus der Gleichung zur Berechnung von φ erhält man näherungsweise:

$$\lg\varphi = \lg s + \varepsilon - 8q\cos^2 X$$

also

$$\varphi = s(1 + \varepsilon - 8q\cos^2 X)$$
$$\delta s = s(\varepsilon - 8q\cos^2 X).$$

Setzt man in diese Gleichung die Näherungswerthe:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}e^2$$
$$8q = \tfrac{1}{2}k^2 = \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 B \text{ oder } = \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 l$$
$$\text{und } \cos^2 X = \cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') \text{ oder } = \cos^2\varphi',$$

so erhält man:

$$\delta s = \tfrac{1}{2}e^2 s(1 - \sin^2 l\cos^2\varphi')$$
$$\delta s = \tfrac{1}{2}e^2 s\cos^2 l'$$

oder

$$\delta s = \tfrac{1}{2}e^2 s\cos^2 B'.$$

Aus der Gleichung (21.) erhält man die Näherungsformel:

$$\delta B' = -\tfrac{1}{4}e^2\sin 2B'.$$

Die Gleichung (20.) giebt:

$$\omega - \lambda = \varepsilon\varphi\cos l \quad \text{oder} \quad \omega - \lambda = \tfrac{1}{2}e^2 s\cos B'\sin T''$$

und endlich die Gleichung (22.):

$$l'' - B'' = -\tfrac{1}{4}e^2\sin 2B'.$$

Die bekannten Differentialformeln für einen sphärischen Triangel, dessen Seiten durch α, β, γ und dessen Winkel durch A, B, I' bezeichnet, und in

welchem die Seiten β und γ variabel, der eingeschlossene Winkel A aber constant gesetzt werden, sind:

$$d\alpha = \cos\Gamma d\beta + \cos B d\gamma$$
$$dB = \frac{\sin\Gamma}{\sin\alpha} d\beta - \frac{\sin B}{\operatorname{tg}\alpha} d\gamma$$
$$d\Gamma = -\frac{\sin\Gamma}{\operatorname{tg}\alpha} d\beta + \frac{\sin B}{\sin\alpha} d\gamma.$$

Setzt man in diese Gleichungen:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - l'' \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - l' \qquad \gamma = \varphi$$
$$A = \pi - T' \qquad B = T'' \qquad \Gamma = \omega$$
$$d\alpha = \delta B_0'' \qquad d\beta = dB' \qquad d\gamma = -\delta s$$
$$dA = 0 \qquad dB = -\Delta T_0'' \qquad d\Gamma = -\delta\lambda_0,$$

so erhält man:

$$\delta B_0'' = \cos\omega\delta B' - \cos T''\delta s$$
$$\Delta T_0'' = -\frac{\sin\omega}{\cos l''}\delta B' - \frac{\sin T''}{\operatorname{cotg} l''}\delta s$$
$$\delta\lambda_0 = \frac{\sin\omega}{\operatorname{cotg} l''}\delta B' + \frac{\sin T''}{\cos l''}\delta s.$$

Vernachlässigt man in diesen Gleichungen die Glieder von der Ordnung s^2 in den Coefficienten von $\delta B'$ und von der Ordnung s in den Coefficienten von δs, so kann man statt T'' und l'' respective T' und B', und ferner

$$\sin\omega = \frac{\sin T'}{\cos B'} s$$

und $\cos\omega = 1$ setzen. Dadurch erhält man:

$$\delta B_0'' = \delta B' - \cos T'\delta s$$
$$\Delta T_0'' = -\frac{\sin T'}{\cos^2 B'} s\delta B' - \frac{\sin T'}{\operatorname{cotg} B'}\delta s$$
$$\delta\lambda_0 = \frac{\sin T'\sin B'}{\cos^2 B'} s\delta B' + \frac{\sin T'}{\cos B'}\delta s$$

und, wenn man für $\delta B'$ und δs die oben gefundenen Werthe setzt,

$$\delta B_0'' = -\tfrac{1}{4}e^2\sin 2B' - \tfrac{1}{2}e^2 s\cos^2 B'\cos T'$$
$$\Delta T_0'' = \tfrac{1}{2}e^2 s\frac{\sin^3 B'}{\cos B'}\sin T'$$
$$\delta\lambda_0 = \tfrac{1}{2}e^2 s\frac{\cos^2 B' - \sin^2 B'}{\cos B'}\sin T'$$

und folglich:

$$\Delta B_0'' = -\tfrac{1}{2} e^2 s \cos^2 B' \cos T''$$

$$\Delta T_0'' = \tfrac{1}{2} e^2 s \frac{\sin^3 B'}{\cos B'} \sin T''$$

$$\Delta \lambda_0 = -\tfrac{1}{2} e^2 s \frac{\sin^2 B'}{\cos B'} \sin T''.$$

Diese den Einflufs der Ellipticität der Erde auf die Gröfsen B'', T'', λ richtig ergebenden Näherungs-Formeln weichen von den *Jacobi*schen pag. 339 dieses Bandes gegebenen ab, welche Abweichung wohl in kleinen Rechnungsfehlern ihren Grund hat.

* * *

Um schliefslich die sämmtlichen Gröfsen, welche bei der geodätischen Linie in Betracht kommen, durch die elliptischen Functionen Θ, H, Θ_1 und H_1 auszudrücken, wenn

$$\Theta_1(u) = \Theta(K-u) \text{ und } H_1(u) = H(K-u)$$

ist, werden statt der beiden Constanten, der Excentricität e und der Breite B des Punktes, in welchem die geodätische Linie auf dem Meridian senkrecht steht, der Modul k der elliptischen Functionen (oder sein Complement k') und das Argument a als Constante mittelst der Gleichungen:

$$e = \frac{k}{\Delta \operatorname{am}(a,k')}, \qquad \cos B = k' \sin \operatorname{am}(a,k')$$

eingeführt.

Alsdann ist nach Fund. pag. 34 Formel 5:

$$e = k \sin \operatorname{coam}(ia,k) = k \sin \operatorname{am}(K-ia,k),$$

also nach Fund. pag. 173 Formel 1:

$$e = \sqrt{k} \cdot \frac{H_1(ia)}{\Theta_1(ia)}$$

und folglich

$$\sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{\Theta_1^2(ia) - kH_1^2(ia)}}{\Theta_1(ia)}$$

also nach Fund. pag. 173 Formel 1:

$$\sqrt{1-e^2} = \sqrt{k'} \cdot \frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(ia)}.$$

Ferner ist:

$$\sin B = \Delta \operatorname{am}(a,k') = \frac{\Delta \operatorname{am}(ia)}{\cos \operatorname{am}(ia)} = \sqrt{k} \frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)}$$

$$\cos B = k' \sin \mathrm{am}(a, k') = \frac{k'}{i} \operatorname{tg} \mathrm{am}(ia) = \frac{\sqrt{k'}}{i} \frac{H(ia)}{H_1(ia)}$$

$$\text{und} \quad \operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{k}{k'}} \cdot \frac{i\Theta_1(ia)}{H(ia)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\operatorname{tg} l = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B = \sqrt{k} \frac{i\Theta(ia)}{H(ia)}$$

$$\text{also} \quad \sin l = \frac{\sqrt{k} . i\Theta(ia)}{\sqrt{H^2(ia) - k\Theta^2(ia)}} = \sqrt{\frac{k}{k'}} \cdot \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}$$

$$\text{und} \quad \cos l = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{H(ia)}{iH_1(ia)}.$$

Nach den Formeln fürs rechtwinklige sphärische Dreieck ist:

$$\sin l' = \sin l \cos \varphi'$$

$$\operatorname{tg} T' = \frac{\operatorname{cotg} l}{\sin \varphi'}$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\cos l}.$$

Setzt man in diese Gleichungen $\varphi' = \mathrm{am}(u)$, so wird:

$$\sin l' = \sqrt{\frac{k}{k'}} \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)} \cos \mathrm{am}(u) = \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)} \cdot \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}$$

$$\operatorname{tg} T' = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(ia)}{i\Theta(ia)} \frac{1}{\sin \mathrm{am}(u)} = \frac{H(ia)}{i\Theta(ia)} \frac{\Theta(u)}{H(u)}$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \sqrt{k'} \frac{iH_1(ia)}{H(ia)} \operatorname{tg} \mathrm{am}(u) = \frac{iH_1(ia)}{H(ia)} \frac{H(u)}{H_1(u)}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

(23.)
$$\begin{cases} \cos l' = \dfrac{\sqrt{H_1^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H_1^2(u)}}{H_1(ia)\Theta(u)} \\ \operatorname{tg} l' = \dfrac{\Theta(ia)H_1(u)}{\sqrt{H_1^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H_1^2(u)}} \\ \sin T' = \dfrac{H(ia)\Theta(u)}{\sqrt{H^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H^2(u)}} \\ \cos T' = \dfrac{i\Theta(ia)H(u)}{\sqrt{H^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H^2(u)}} \\ \sin \omega' = \dfrac{iH_1(ia)H(u)}{\sqrt{H^2(ia)H_1^2(u) - H_1^2(ia)H^2(u)}} \\ \cos \omega' = \dfrac{H(ia)H_1(u)}{\sqrt{H^2(ia)H_1^2(u) - H_1^2(ia)H^2(u)}}. \end{cases}$$

Nach Fund. pag. 173 Formel 1 ist:

$$H_1^2(u) = \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(u) - H^2(u)\}.$$

Hieraus folgt:

$$H_1^2(ia)\Theta^2(u) = \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(ia)\Theta^2(u) - H^2(ia)\Theta^2(u)\}$$

$$\Theta^2(ia)H_1^2(u) = \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H^2(u)\}$$

$$H^2(ia)H_1^2(u) = \frac{1}{k'}\{kH^2(ia)\Theta^2(u) - H^2(ia)H^2(u)\}$$

$$H_1^2(ia)H^2(u) = \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(ia)H^2(u) - H^2(ia)H^2(u)\},$$

also

$$H_1^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H_1^2(u) = \frac{1}{k'}\{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)\}$$

$$H^2(ia)H_1^2(u) - H_1^2(ia)H^2(u) = -\frac{k}{k'}\{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)\}.$$

Substituirt man diese Formeln in die Gleichungen (23.), so wird:

(24.)
$$\begin{cases} \cos l' = \dfrac{\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}}{\sqrt{k'}.H_1(ia)\Theta(u)} \\ \operatorname{tg} l' = \dfrac{\sqrt{k'}.\Theta(ia)H_1(u)}{\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}} \\ \sin T' = \dfrac{H(ia)\Theta(u)}{i\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}} \\ \cos T' = \dfrac{\Theta(ia)H(u)}{\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}} \\ \sin \omega' = \dfrac{\sqrt{k}H_1(ia)H(u)}{\sqrt{k'}\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}} \\ \cos \omega' = \dfrac{\sqrt{k}H(ia)H_1(u)}{i\sqrt{k'}\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}}. \end{cases}$$

Da nun nach Fund. pag. 175 Formel 21

$$H^2(u)\Theta^2(ia) - \Theta^2(u)H^2(ia) = \Theta^2(0)H(u+ia)H(u-ia),$$

so ist, wenn man $\sqrt{H(u+ia)H(u-ia)} = N$ setzt,

$$\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - \Theta^2(u)H^2(ia)} = \Theta(0)N.$$

Ferner ist nach Fund. pag. 173 Formel 2:

$$\frac{\Theta(0)}{\sqrt{k'}} = \Theta_1(0)$$

$$\text{und } \sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\Theta(0) = H_1(0).$$

Substituirt man diese Formeln in die Gleichungen (24.), so wird:

$$\cos l' = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(ia)}\cdot\frac{N}{\Theta(u)}; \qquad \operatorname{tg} l' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(0)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}$$

$$\sin T' = \frac{H(ia)}{i\Theta(0)}\cdot\frac{\Theta(u)}{N}; \qquad \cos T' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta(0)}\cdot\frac{H(u)}{N}$$

$$\sin\omega' = \frac{H_1(ia)}{H_1(0)}\cdot\frac{H(u)}{N}; \qquad \cos\omega' = \frac{H(ia)}{iH_1(0)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}.$$

Setzt man in die Gleichung

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\operatorname{tg} l'}{\sqrt{1-e^2}}$$

für $\operatorname{tg} l'$ und $\sqrt{1-e^2}$ die gefundenen Ausdrücke, so erhält man:

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(0)}\cdot\frac{H_1(u)}{N},$$

also

$$\sin B' = \frac{\Theta_1(ia)\,H_1(u)}{\sqrt{\Theta^2(0)\,N^2+\Theta_1^2(ia)\,H_1^2(u)}} = \frac{\Theta_1(ia)\,H_1(u)}{H_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

und

$$\cos B' = \frac{\Theta(0)\,N}{H_1(ia)\,\Theta_1(u)}.$$

Denkt man sich den Triangel POO' so construirt, dafs $\frac{\pi}{2} - PO'$ nicht gleich der reducirten Breite l', sondern gleich der wahren Breite B' ist, und bezeichnet man durch l_0, φ'_0, ω'_0 die Werthe, welche unter dieser Voraussetzung die Gröfsen l, φ', ω' annehmen, so wird

$$\cos l_0 = \cos B' \sin T' = \frac{H(ia)\,\Theta(0)}{iH_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi'_0 = \operatorname{cotg} B' \cos T' = \frac{\Theta(ia)\,H(u)}{\Theta_1(ia)\,H_1(u)}$$

$$\operatorname{tg}\omega'_0 = \frac{\operatorname{cotg} T'}{\sin B'} = \frac{i\Theta(ia)\,H_1(ia)}{\Theta(ia)\,H(ia)}\cdot\frac{H(u)\,\Theta_1(u)}{\Theta(u)\,H_1(u)}.$$

Bezeichnet man endlich mit λ' die Länge des Punktes, welchem der Werth $\varphi' = \operatorname{am}(u)$ entspricht, wenn diese Länge von dem Meridian an gezählt wird, auf welchem die geodätische Linie senkrecht steht, so erhält man aus Formel (11.), indem $u'' = u$ und $u' = 0$ gesetzt wird,

$$\lambda' + \nu u = \tfrac{1}{2} i \lg\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)} = i\lg\sqrt{\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}},$$

wo $\nu = \frac{d\lg\Theta_1(ia)}{da}$ ist.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$e^{(\lambda'+\nu u)i} = \sqrt{\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)}}, \qquad e^{-(\lambda'+\nu u)i} = \sqrt{\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}},$$

also

$$\sin(\lambda'+\nu u) = \frac{1}{2}\frac{H(u+ia)+H(u-ia)}{N}$$

und

$$\cos(\lambda'+\nu u) = \frac{1}{2i}\frac{H(u+ia)-H(u-ia)}{N}.$$

Mithin ist:

$$\cos B' \sin(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta(0)\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

$$\cos B' \cos(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta(0)\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

$$\cos l' \sin(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta_1(0)\{H(u+ia)+H(u-ia)}{2H_1(ia)\,\Theta(u)}$$

$$\cos l' \cos(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta_1(0)\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\,\Theta(u)}.$$

Königsberg, den 15. Juli 1855.

28.

Note sur la méthode d'élimination de *Bezout.*

(Par M. *A. Cayley.*)

Voici la forme la plus simple sous laquelle on peut présenter cette méthode. Pour éliminer les variables x, y entre deux équations du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(a, \ldots\widehat{)}(x, y)^n = 0$$

$$(a', \ldots\widehat{)}(x, y)^n = 0,$$

on n'a qu'à former l'équation identique

$$\frac{(a, \ldots\widehat{)}(x, y)^n\,(a', \ldots\widehat{)}(\lambda, \mu)^n - (a', \ldots\widehat{)}(x, y)^n\,(a, \ldots\widehat{)}(\lambda, \mu)^n}{\mu x - \lambda y} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & \ldots & a_{n-1,0} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \ldots & a_{n-1,1} \\ \vdots & & & \\ a_{0,n-1} & a_{1,n-1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \widetilde{(}x, y)^{n-1} \widetilde{(}\lambda, \mu)^{n-1}$$

où l'expression qui forme le second membre représente la fonction suivante

$$\begin{aligned} &(a_{0,0}\ x^{n-1} + a_{1,0}\ x^{n-2}y \cdots + a_{n-1,0}\ y^{n-1})\lambda^{n-1} \\ +&(a_{0,1}\ x^{n-1} + a_{1,1}\ x^{n-2}y \cdots + a_{n-1,1}\ y^{n-1})\lambda^{n-2}\mu \\ &\vdots \\ +&(a_{0,n-1}\,x^{n-1} + a_{1,n-1}\,x^{n-2}y \cdots + a_{n-1,n-1}y^{n-1})\,\mu^{n-1}. \end{aligned}$$

Le résultat de l'élimination sera

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & \ldots & a_{n-1,0} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \ldots & a_{n-1,1} \\ \vdots & & & \\ a_{0,n-1} & a_{1,n-1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Par exemple on trouve

$$\frac{(a, b, c\widehat{)}(x, y)^2\,(a', b', c'\widehat{)}(\lambda, \mu)^2 - (a', b', c'\widehat{)}(x, y)^2\,(a, b, c\widehat{)}(\lambda, \mu)^2}{\mu x - \lambda y} =$$

$$\begin{vmatrix} 2(ab' - a'b), & ac' - a'c \\ ac' - a'c, & 2(bc' - b'c) \end{vmatrix} \widetilde{(}x, y)\widetilde{(}\lambda, \mu)$$

$$\frac{(a,b,c,d\widehat{)}(x,y)^3(a',b',c',d'\widehat{)}(\lambda,\mu)^3-(a',b',c',d'\widehat{)}(x,y)^3(a,b,c,d\widehat{)}(\lambda,\mu)^3}{\mu x-\lambda y} =$$

$$\begin{vmatrix} 3(ab'-a'b), & 3(ac'-a'c), & (ad'-a'd) \\ 3(ac'-a'c), & (ad'-a'd)+9(bc'-b'c), & 3(bd'-b'd) \\ (ad'-a'd), & 3(bd'-b'd), & 3(cd'-c'd) \end{vmatrix} (\widesim{x^2, xy, y^2})(\widesim{\lambda^2, \lambda\mu, \mu^2})$$

d'où l'on tire immédiatement les résultats de l'élimination entre deux équations quadratiques ou cubiques.

Londres, 2 Stone Buildings, Avril 1855.

29.

Remarque relative à la note précédente.

(Par M. *C. W. Borchardt.*)

Comme la forme élégante sous laquelle M. ***Cayley*** présente la méthode abrégée de ***Bezout*** pourrait être inintelligible aux mathématiciens qui ne sont pas familiarisés avec les notations nouvelles du géomètre distingué de Londres, je crois faire une chose utile en traduisant comme l'a déjà fait M. ***Sylvester*** (Phil. Trans. 1853 pag. 516) en signes algébriques ordinaires l'énoncé de M. ***Cayley:***

„Etant proposées deux équations du $n^{\text{ième}}$ degré

$$fx = 0, \qquad \varphi x = 0$$

divisez l'expression

$$fx\,\varphi y - fy\,\varphi x$$

par la différence

$$x - y,$$

le quotient sera une fonction entière en x et y, du degré $n-1$ par rapport à chacune des deux variables, c. à d. une fonction de la forme

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\sum_{k=0}^{k=n-1} a_{i,k}\,x^i y^k$$

et le déterminant

$$\Sigma \pm a_{0,0}\,a_{1,1}\ldots a_{n-1,n-1}$$

sera le résultat de l'élimination entre les deux équations proposées, présenté sous la forme à laquelle conduit la méthode abrégée de ***Bezout.***"

En posant $x = y$ on trouve l'équation

$$\varphi x \frac{\partial fx}{\partial x} - fx \frac{\partial \varphi x}{\partial x} = \Sigma a_{i,k} x^{i+k}$$

qui a été déjà obtenue sous cette forme par ***Jacobi*** (Voyez tome XV, p. 103 de ce Journal) mais qui ne suffit pas pour définir les quantités $a_{i,k}$.

Berlin, août 1856.

30.

Note sur l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, $D \equiv 5 \pmod 8$.

(Par M. *A. Cayley*.)

On sait que pour un déterminant positif $D \equiv 5 \pmod 8$ le nombre des formes quadratiques proprement primitives est égal au nombre des formes improprement primitives, quand il existe une solution en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$, mais que le nombre des formes proprement primitives est égal à trois fois le nombre des formes improprement primitives, quand il n'existe pas de solution en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$.

Les tables de *Degen* font voir immédiatement, pour les nombres $D \equiv 5 \pmod 8$ qui ne sont pas plus grands que 997, s'il existe ou non une solution en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$. A savoir si le nombre 4 se trouve dans la série des dénominateurs des quotients complets (la seconde ligne dans les tables), il existe une solution de l'équation; si non, il n'en existe pas. De plus, si la place où se trouve le nombre 4 est d'ordre pair il existe une solution tant de l'équation $x^2 - Dy^2 = +4$ que de l'équation $x^2 - Dy^2 = -4$, mais si cette place est d'ordre impair il existe seulement une solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$. On trouve la plus petite solution de ces équations au moyen de la série des quotients (la première ligne des tables), en s'arrêtant au nombre qui précède le nombre placé au dessus du nombre 4, et en calculant la fraction continue déterminée par cette suite; par ex. pour le nombre 61 on trouve dans les tables

61	
	7, 1, 4, 3, 1 (2, 2)
	1, 12, 3, 4, 9 (5, 5)
	226153980
	1766319049

Cela fait voir qu'il existe une solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = -4$, solution que l'on obtient au moyen de la fraction continue $7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{39}{5}$ en faisant $x = 39$, $y = 5$. La plus petite solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$ se déduit

très facilement de la plus petite solution de l'équation $\tau^2 - Dv^2 = -4$ au moyen de la formule $x + y\sqrt{D} = \frac{1}{2}(\tau + v\sqrt{D})^2$ ce qui donne $x = \tau^2 + 2$, $y = \tau v$.

On obtient pareillement la plus petite solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = -1$ au moyen de la formule $(x + y\sqrt{D}) = \frac{1}{8}(\tau + v\sqrt{D})^3$ ce qui donne

$$x = \tfrac{1}{2}(\tau^3 + 3\tau), \qquad y = \tfrac{1}{2}(\tau^2 + 1)v.$$

De même la plus petite solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = 1$ se déduit de la plus petite solution de l'équation $T^2 - DU^2 = 4$ au moyen de la formule $x + y\sqrt{D} = \frac{1}{8}(T + U\sqrt{D})^3$ ce qui donne $x = \frac{1}{2}(T^3 - 3T)$, $y = \frac{1}{2}(T^2 - 1)U$.

Je fais observer à cette occasion que suivant une remarque de *Göpel* (voyez „Notiz über *A. Göpel*" t. XXXV p. 315 de ce Journal) si dans l'équation $\left(\frac{x + \sqrt{y}}{p}\right)^n = P + \sqrt{Q}$, où x, y, p, n, P, Q sont des entiers, le dénominateur p est plus grand que l'unité et que x, y, p n'ont pas de dénominateur commun, on aura nécessairement $p = 2$, $n = 3$ ou égal à un multiple de 3, x impair et y de la forme $8n + 5$.

J'ai calculé au moyen des tables de *Degen* la table suivante des plus petites solutions en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = -4$ ou, si cette équation n'en admet pas, de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$, en d'autres termes, une table des plus petites solutions impaires de l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, $D \equiv 5 \pmod 8$.

Londres, 2 Stone Buildings, 10ième Mars 1855.

Table des plus petites solutions impaires de l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, $D \equiv 5 \pmod 8$.

D	$\pm$	x	y	D	$\pm$	x	y	D	$\pm$	x	y
5	−	1	1	341	+	277	15	677		imposs.	
13	−	3	1	349		imposs.		685	−	759	29
21	+	5	1	357	+	19	1	693	+	79	3
29	−	5	1	365	−	19	1	701		imposs.	
37		imposs.		373		imposs.		709		imposs.	
45	+	7	1	381		imposs.		717	+	241	9
53	−	7	1	389		imposs.		725	+	27	1
61	−	39	5	397	−	3447	173	733	−	27	1
69	+	25	3	405		imposs.		741	+	245	9
77	+	9	1	413	+	61	3	749	+	12945	473
85	−	9	1	421	−	444939	21685	757		imposs.	
93	+	29	3	429	+	145	7	765	+	83	3
101		imposs.		437	+	21	1	773	−	139	5
109	−	261	25	445	−	21	1	781		imposs.	
117	+	11	1	453	+	149	7	789	+	31825	1133
125	−	11	1	461	−	365	17	797	−	367	13
133	+	173	15	469	+	65	3	805	+	1447	51
141		imposs.		477	+	2599	119	813		imposs.	
149	−	61	5	485		imposs.		821	−	16189	565
157	−	213	17	493	−	111	5	829		imposs.	
165	+	13	1	501	+	28225	1261	837	+	29	1
173	−	13	1	509	−	925	41	845	−	29	1
181	−	1305	97	517	+	10573	465	853	−	27483	941
189		imposs.		525	+	23	1	861	+	1027	35
197		imposs.		533	−	23	1	869	+	49377	1675
205	+	43	3	541	−	1396425	60037	877		imposs.	
213	+	73	5	549	+	1523	65	885		imposs.	
221	+	15	1	557		imposs.		893	+	2301	77
229	−	15	1	565	−	309	13	901		imposs.	
237	+	77	5	573		imposs.		909		imposs.	
245	+	47	3	581	+	6725	279	917	+	1181	31
253	+	1177	74	589	+	4359377	179625	925		imposs.	
261	+	727	45	597	+	7949	399	933		imposs.	
269		imposs.		605	+	123	5	941	−	1135	37
277	−	2613	157	613	−	98763	3989	949	−	32685	1061
285	+	17	1	621	+	25	1	957	+	31	1
293	−	17	1	629	−	25	1	965	−	31	1
301	+	22745	1311	637	+	14159	561	973		imposs.	
309	+	5045	287	645	+	203	8	981	+	68123	2175
317	−	89	5	653	−	1661	65	989	+	103245	3283
325		imposs.		661	−	1789539	69605	997		imposs.	
333		imposs.		669	+	305285	11803				

31.

Sur une nouvelle propriété du résultant de deux équations algébriques.

(Par M. *Brioschi* à Pavie.)

1.

Soient:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$
$$\varphi(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_n = 0$$

les deux équations. En posant:

$$p_{r+1}(x) = a_0x^r + a_1x^{r-1} + \cdots + a_r$$
$$q_{r+1}(x) = c_0x^r + c_1x^{r-1} + \cdots + c_r$$

on a:

(1.) $$q_{r+1}(x)f(x) - p_{r+1}(x)\varphi(x) = m_{r+1} = \alpha_{1,r+1}x^{n-1} + \alpha_{2,r+1}x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n,r+1}$$

où:

$$\alpha_{s,r+1} = c_0a_{r+s} + c_1a_{r+s-1} + \cdots + c_{s-1}a_{r+1} - (a_0c_{r+s} + a_1c_{r+s-1} + \cdots + a_{s-1}c_{r+1}).$$

Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ les racines de l'équation $f(x) = 0$; en substituant dans (1.) x_s au lieu de x, on obtient:

(2.) $$-p_{r+1}(x_s)\varphi(x_s) = \alpha_{1,r+1}x_s^{n-1} + \alpha_{2,r+1}x_s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n,r+1}$$

équation qui divisée par $f'(x_s)$, et multipliée par $1, x_s, \cdots x_s^{n-1}$ nous donne les suivantes:

(3.)
$$\begin{cases} -[a_0S_r + a_1S_{r-1} + \cdots + a_rS_0] = \alpha_{1,r+1}\lambda_0 \\ -[a_0S_{r+1} + \alpha_1S_r + \cdots + a_rS_1] = \alpha_{1,r+1}\lambda_1 + \alpha_{2,r+1}\lambda_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -[a_0S_{r+n-1} + a_1S_{r+n-2} + \cdots + a_rS_{n-1}] \\ \qquad = \alpha_{1,r+1}\lambda_{n-1} + \alpha_{2,r+1}\lambda_{n-2} + \cdots + \alpha_{n,r+1}\lambda_0 \end{cases}$$

où l'on a posé:

$$S_r = \sum_1^n{}_s \frac{x_s^r\varphi(x_s)}{f'(x_s)}, \qquad \lambda_r = \sum_1^n{}_s \frac{x_s^{n+r-1}}{f'(x_s)}.$$

J'observe que:

$$a_0\lambda_i + a_1\lambda_{i-1} + \cdots + a_i\lambda_0 = 0, \qquad a_0\lambda_0 = 1$$

par conséquent si l'on fait:

$$h_{s+1,r+1} = \alpha_{1,r+1}\lambda_s + \alpha_{2,r+1}\lambda_{s-1} + \cdots + \alpha_{s+1,r+1}\lambda_0$$

on aura:

$$(4.) \qquad a_0 h_{m+r} + a_1 h_{m-1,r} + \cdots + a_{m-1} h_r = \alpha_{m,r}.$$

2.

Soit V le résultant des deux équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$; on a:

$$V = a_0^n \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)$$

et:

$$\frac{dV}{dx_s} = \frac{V}{\varphi(x_s)}\varphi'(x_s).$$

Or:

$$\frac{dV}{dx_s} = \frac{dV}{da_1}\frac{da_1}{dx_s} + \frac{dV}{da_2}\frac{da_2}{dx_s} + \cdots + \frac{dV}{da_n}\frac{da_n}{dx_s}$$

d'où l'on déduit:

$$\sum_1^n{}_s \frac{x_s^i \varphi(x_s)}{f'(x_s)}\frac{dV}{dx_s} = \sum_1^n{}_r \frac{dV}{da_r}\sum_1^n{}_s \frac{x_s^i\varphi(x_s)}{f'(x_s)}\frac{da_r}{dx_s}$$

et en observant que:

$$a_{r-1}S_i + a_{r-2}S_{i+1} + \cdots + a_0 S_{i+r-1} = -h_{i+1,r}$$

on aura:

$$V\sum_1^n{}_s \frac{x_s^i\varphi'(x_s)}{f'(x_s)} = \sum_1^n{}_r h_{i+1,r}\frac{dV}{da_r}.$$

On peut transformer cette équation, en posant $i=0, 1, \ldots m-1$, et en ajoutant les équations qui en résultent, multipliées par $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots a_0$. En effet on obtient:

$$V(a_{m-1}M_0 + a_{m-2}M_1 + \cdots + a_0 M_{m-1}) = \sum_1^n{}_r \alpha_{m,r}\frac{dV}{da_r}$$

où:

$$M_i = \sum_1^n{}_s \frac{x_s^i\varphi'(x_s)}{f'(x_s)};$$

et puisque l'on a par une formule connue:

$$a_0 M_{m-1} + a_1 M_{m-2} + \cdots + a_{m-1}M_0 = (n-m+1)c_{m-1}$$

on a enfin:

$$\sum_1^n{}_r \alpha_{m,r}\frac{dV}{da_r} = (n-m+1)c_{m-1}V.$$

Si dans cette équation l'on fait $m=1, 2, 3, \ldots n$, on obtient n équations

qu'on peut nommer les équations caractéristiques du résultant. En supposant $\varphi(x) = f'(x)$ on obtient les équations analogues pour le discriminant de $f(x) = 0$; les trois premières desquelles contiennent la propriété du discriminant d'être un invariant de la forme du $n^{\text{ième}}$ degré à deux indéterminées.

3.

Par conséquent si l'on représente par V le discriminant de la forme du $n^{\text{ième}}$ degré:

$$f(x, y) = p_0 a_0 x^n + p_1 a_1 x^{n-1} y + \cdots + p_n a_n y^n$$

dans laquelle:

$$p_m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}$$

on aura:

$$\sum_1^n{}_r \frac{1}{p_r} \alpha_{m,r} \frac{dV}{da_r} = (n-m+1)(n-m+2) p_{m-2} a_{m-2} V$$

où:

$$\alpha_{m,r} = \sum_1^{m-1}{}_s (r+m-2s) p_{s-1} p_{r+m-s-1} a_{s-1} a_{r+m-s-1} - (n-r+1) p_{m-1} p_{r-1} a_{m-1} a_{r-1}.$$

Si dans l'équation supérieure on fait $m = 1$ on a:

$$\sum_1^n{}_r \frac{1}{p_r} \alpha_{1,r} \frac{dV}{da_r} = -a_0 \sum_1^n{}_r r a_{r-1} \frac{dV}{da_r} = 0$$

et pareillement les autres $n-1$ équations peuvent être déduites de la suivante:

$$\sum_1^n{}_r \frac{1}{p_r} A_{m,r} \frac{dV}{da_r} = (n-m+1)(n-m+2) p_{m-2} a_{m-2} V,$$

où:

$$A_{m,r} = \alpha_{m,r} + (n-r+1) p_{m-1} p_{r-1} a_{m-1} a_{r-1},$$

en posant $m = 2, 3 \ldots n$.

Au moyen de ces équations on peut exprimer le discriminant d'une forme quelconque à deux indéterminées en fonction de ses invariants. Par exemple pour la forme du quatrième degré:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)(x, y)^4$$

si l'on pose:

$$J_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2$$

$$J_3 = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3$$

et:

$$V = J_2^3 + h J_3^2$$

les trois premières équations sont satisfaites, et la quatrième nous donne:

$$\sum_1^4{}_r \frac{1}{p_r} A_{4,r} \frac{dV}{da_r} = 12a_2V.$$

Mais en observant que:

$$\sum_1^4{}_r \frac{1}{p_r} A_{4,r} \frac{dJ_2}{da_r} = 12J_3 + 4a_2J_2, \qquad \sum_1^4{}_r \frac{1}{p_r} A_{4,r} \frac{dJ_3}{da_r} = \tfrac{2}{3}J_2^2 + 6a_2J_3$$

on a:

$$3J_2^2(12J_3 + 4a_2J_2) + 2hJ_3(\tfrac{2}{3}J_2^2 + 6a_2J_3) = 12a_2V$$

de laquelle:

$$h = -27$$

ce que l'on sait déjà.

4.

Les relations données par les formules (3.) nous sont utiles pour transformer quelques expressions formées avec les quantités S_r en autres formées avec les quantités $\alpha_{r,s}$. Nous considérons ici les expressions de la forme suivante:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_{r-1} \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{r-2} & S_{r-1} & \cdots & S_{2r-3} \\ 1 & x & \cdots & x^{r-1} \end{vmatrix}$$

lesquelles se présentent dans l'application du théorème de *Sturm* à la recherche du nombre des racines réelles de l'équation $f(x)=0$; comme l'ont déjà demontré MM. *Sylvester* et *Joachimsthal,* et moi-même dans une note publiée dans les Annales de M. *Tortolini* (Juillet 1854).

Pour effectuer cette transformation j'observe que:

$$-h_{s+1,r+1} = a_0S_{r+s} + a_1S_{r+s-1} + \cdots + a_rS_s.$$

Au moyen de cette formule et d'une propriété très-connue des déterminants nous obtenons une première transformation:

$$\Delta_r = (-1)^{r-1}\frac{1}{a_0^r} \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,r} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{r-1,1} & h_{r-1,2} & \cdots & h_{r-1,r} \\ p_1(x) & p_2(x) & \cdots & p_r(x) \end{vmatrix}$$

et à cause de l'équation (4.) on a:

$$\Delta_r = (-1)^{r-1}\frac{1}{a_0^{2r-1}}\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,r} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1,1} & \alpha_{r-1,2} & \ldots & \alpha_{r-1,r} \\ p_1(x) & p_2(x) & \ldots & p_r(x) \end{vmatrix}.$$

Les quantités Δ_r sont, à un facteur près, les dénominateurs des réduites de la fraction continue dans laquelle on peut développer $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; par conséquent les trois quantités Δ_r, Δ_{r-1}, Δ_{r-2} seront liées par une équation, comme il a été démontré autrement par M. *Joachimsthal.*

Il est évident d'après les considérations supérieures qu'on aura:

$$V = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

résultat donné par M. *Jacobi* dans son mémoire „De eliminatione variabilis etc. —" (vol. XV de ce Journal).

Pavie, Janvier 1856.

32.

Sur une formule de M. *Cayley*.

(Par M. *Brioschi* à Pavie.)

M. *Cayley* a donné récemment une relation très-remarquable entre les covariants de la forme biquadratique:

$$u = (a_0, a_1 \ldots a_4)(x, y)^4.$$

En indiquant par v le Hessien de la forme u, par δ le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \end{vmatrix}$$

et en posant:

$$v = \overline{12}^2 H, \qquad \delta = 8.\overline{12}^2 \Phi$$

la formule de M. *Cayley* est la suivante:

$$\Phi^2 = J_2 H u^2 - J_3 u^3 - 4H^3;$$

J_2, J_3 étant les invariants quadratique et cubique de la forme u. M. *Cayley* a démontré aussi comme on peut déduire de la résolution de l'équation:

$$(1.) \qquad J_3 u^3 - J_2 H u^2 + 4H^3 = 0$$

celle de l'équation $u = 0$. Or on peut observer que l'équation (1.) résulte de l'élimination des quantités a, b entre les deux équations:

$$au + bH = 0$$

$$4a^3 - J_2 ab^2 - J_3 b^3 = 0$$

de la seconde desquelles, ainsi que M. *Hesse* l'a démontré (T. XLI pag. 253 de ce Journal) on obtient des valeurs du rapport $a : b$ qui rendent l'expression $au + bH$ égale au produit des carrés de deux fonctions linéaires. L'équation $\Phi = 0$ est par conséquent l'équation du sixième degré considerée par M. *Hesse* (pag. 259), et dont les racines ont la propriété d'être quatre à quatre en rapport harmonique.

Le covariant Φ joue dans la théorie des formes biquadratiques un rôle analogue à celui que joue le Hessien dans la théorie des formes cubiques. On trouve, par exemple, que l'invariant quadratique de cette fonction est égal à

$\frac{1}{6}$ du discriminant D de la forme u; que, posant:

$$U = au + bH$$

et indiquant par V le Hessien de la forme U, de sorte que

$$V = Au + BH, \quad A = 12b(2aJ_2 + 3bJ_3), \quad B = 12(12a^2 - b^2J_2),$$

on a:

$$\begin{vmatrix} \frac{dV}{dx} & \frac{dV}{dy} \\ \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} \end{vmatrix} = 8\Phi(aB - bA).$$

Par conséquent si l'on pose:

$$U = (\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_4)(x, y)^4$$

où:

$$\alpha_0 = \frac{dD}{da_4}, \quad 4\alpha_1 = -\frac{dD}{da_3}, \quad 6\alpha_2 = \frac{dD}{da_2}, \quad 4\alpha_3 = -\frac{dD}{da_1}, \quad \alpha_4 = \frac{dD}{da_0}$$

on aura:

$$a = 3J_2^2, \quad b = -54J_3, \quad aB - bA = \overline{12}^2.27D(J_2^3 - 54J_3^2)$$

et en représentant par Ψ le covariant du sixième degré de la forme U on obtient:

$$\Psi = 27\Phi D(J_2^3 - 54J_3^2).$$

De cette dernière équation on déduit entre D et le discriminant Δ de la forme U, la relation déjà donnée par M. *Schläfli:*

$$\Delta = 729D^3(J_2^3 - 54J_3^2)$$

On trouve pour les formes cubiques à trois indéterminées une équation analogue à (1.). Soit u la forme cubique, v son Hessien; J_4, J_6 les invariants du quatrième et du sixième degrés de la même forme. En posant: $v = 6^3.H$ et en éliminant les quantités a, b entre les deux équations:

$$au + bH = 0$$

$$27a^4 - 18J_4a^2b^2 - J_6ab^3 - J_4^2b^4 = 0$$

on obtient l'équation du douzième degré:

$$27H^4 - 18J_4H^2u^2 + J_6Hu^3 - J_4^2u^4 = 0$$

laquelle sera décomposable en douze facteurs linéaires, qui donneront les quatre systèmes de droites qui passent par les points d'inflexion de la courbe $u = 0$.

Pavie, Janvier 1856.

Den Mathematikern, welche sich mit zahlentheoretischen Untersuchungen beschäftigen wird es vielleicht erwünscht sein von einer Schrift des Herrn Professor Dr. *Reuschle* in Stuttgart Nachricht zu erhalten, welche derselbe als Programm des dasigen Gymnasiums zu Michaelis 1856 hat erscheinen lassen und von welcher besondere Abdrücke durch die Antiquariats-Buchhandlung von *Liesching* et Comp. in Stuttgart zu beziehen sind. Diese Schrift enthält sehr werthvolle, mit Fleifs und Sachkenntnifs berechnete Tafeln zum Gebrauch für Zahlentheorie, nämlich: 1) Die Zerlegung der Zahlen $10^n - 1$ in ihre Primfaktoren für eine gewisse Anzahl von Werthen des n, bis $n = 242$, für welche die Faktoren als wirkliche Primfaktoren constatirt sind. 2) Eine Anzahl ähnlicher Zerlegungen der in der Form $a^n - 1$ enthaltenen Zahlen in ihre Primfactoren, für eine Reihe von Werthen der Zahlen a und n, für welche die in denselben vorkommenden Primfaktoren als solche haben constatirt werden können. 3) Eine Tafel der Zerlegung der Primzahlen $p = 6n+1$ in die Formen $p = A^2+3B^2$ und $4p = C^2+27M^2$, welche für die Theorie der cubischen Reste, so wie für die Kreistheilung wichtige Dienste leistet. Diese Tafel erstreckt sich für beide Formen vollständig bis $p = 5743$, sodann für die Form $p = A^2+3B^2$ allein weiter bis 13669, und endlich für diejenigen Werthe des p, für welche die Zahl 10 cubischer Rest ist, noch bis $p = 49999$. 4) Eine Tafel der Zerlegung der Primzahlen $p = 4n+1$ in die Form a^2+b^2, zugleich mit der Zerlegung der Primzahlen $p = 8n+1$ in die Form c^2+2d^2 bis $p = 12377$. An diese schliefst sich noch die Zerlegung derjenigen Primzahlen $p = 4n+1$, für welche die Zahl 10 quadratischer Rest ist, in die Form a^2+b^2, bis $p = 24917$, zugleich mit der Zerlegung derjenigen Primzahlen, für welche die Zahl 10 biquadratischer Rest ist, in die Form $p = c^2+2d^2$, bis $p = 24889$. Der Nutzen welchen diese Zerlegungen, namentlich für die Theorie der biquadratischen Reste und auch für die Kreistheilung haben, wird den Kennern dieser Theorieen einleuchten. 5) Folgt noch eine Reihe von Tafeln, in welchen die kleinsten Exponenten berechnet sind, zu denen gegebene Zahlen gehören nach bestimmten Moduln, oder die Bestimmung der kleinsten Zahl e, welche der Congruenz $a^e \equiv 1$, mod. p, genügt. Der erste Theil dieser Tafel umfafst die sechs Werthe des $a = 2, 3, 5, 6, 7, 10$, und als Moduln alle Primzahlen bis $p = 997$. Von da an bis $p = 4999$ erstreckt sich diese Tafel nur auf die beiden Grundzahlen $a = 2$ und $a = 10$, und endlich von da an bis zu $p = 14983$ nur auf die eine Grundzahl 10. Diese Tafeln, welche unter andern auch die Frage nach der Anzahl der Ziffern der Periode eines aus einem gewöhnlichen Bruche entstandenen Decimalbruchs beantworten, geben aufserdem zu manchen interessanten, so zu sagen statistischen Bemerkungen Veranlassung, welche in der Einleitung zu den Tabellen angestellt sind.

Aus dem angegebenen Inhalte wird man ersehen, dafs die ganze Arbeit im Interesse der Wissenschaft und zum wirklichen Nutzen derselben unternommen und ausgeführt ist, wofür auch noch der Antheil Bürgschaft leistet, welchen der verewigte *Jacobi* an der Entstehung derselben gehabt und der Werth, welchen dieser grofse Mathematiker den berechneten Tafeln beigelegt hat. Herr Professor *Reuschle* ist nämlich wegen dieser Arbeit mit *Jacobi* in schriftlichen und mündlichen Verkehr getreten und die aus zwei Briefen von *Jacobi* und zwei Briefen von Prof. *Reuschle* bestehende Correspondenz über diesen Gegenstand, in welcher mehrere Fragen über Potenzreste erörtert werden, bildet einen interessanten Bestandtheil der Einleitung, welche Herr Professor *Reuschle* seinen Tafeln vorangeschickt hat.

Kummer.

Druckfehler.

Band 50. Heft 3.

S. 244 Z. 6 v. u. st. $q_{\nu+1}=0$ l. $y_{\nu+1}=0$.
— 245 — 11 v. u. st. je zu λ l. zu je λ.
— 254 — 10 v. o. ist nach haben das Kolon zu streichen.
— 256 ist in der untersten Zeile nach schneiden st. des Semikolon ein Komma zu setzen.
— 257 — 6 v. o. soll es heifsen: Also hat der Faden, vermöge der etc. λ^{ten} Schwingung, $\lambda-1$ Schwingungsknoten.
— 262 — 7 v. o. st. $\log ndt\xi$ l. $\log \text{nat}\,\xi$.

Band 53. Heft 1.

S. 13 Z. 4 v. u. st. $< \frac{1}{2}c$ l. $< c$
— 23 — 7 v. u. st. $\frac{d'}{e'}$ l. $\frac{d'}{c'}$
— 30 — 2 v. u. st. dessen l. dessen Theilnenner
— 34 — 1 v. o. st. u l. u_h
— 38 — 6 v. u. st. A l. A_h
— 49 die Worte: Eigentlich ist etc. bis S. 50 Z. 3 sind in eine Anmerkung zu setzen.
— 54 letzte Zeile st. $qh'-(q-1)$ l. $qh'-a-1$
— 59 Z. 6. v. o. l. $\frac{\sqrt{A+J'}}{D'}$
— 62 — 4 v. o. st. und allein l. allein
— 68 — 5 v. u. st. q l. 9
— 77 — 5 v. o. st. s^2 l. s'^2

Heft 3.

— 285 — 9 u. 10 v. o. st. x^{2n+1} und x^{2n+2} l. x^{2n} und x^{2n+1}